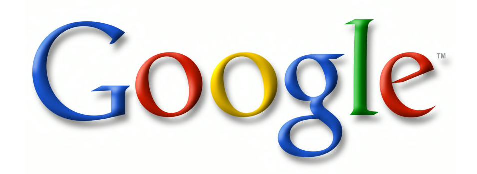
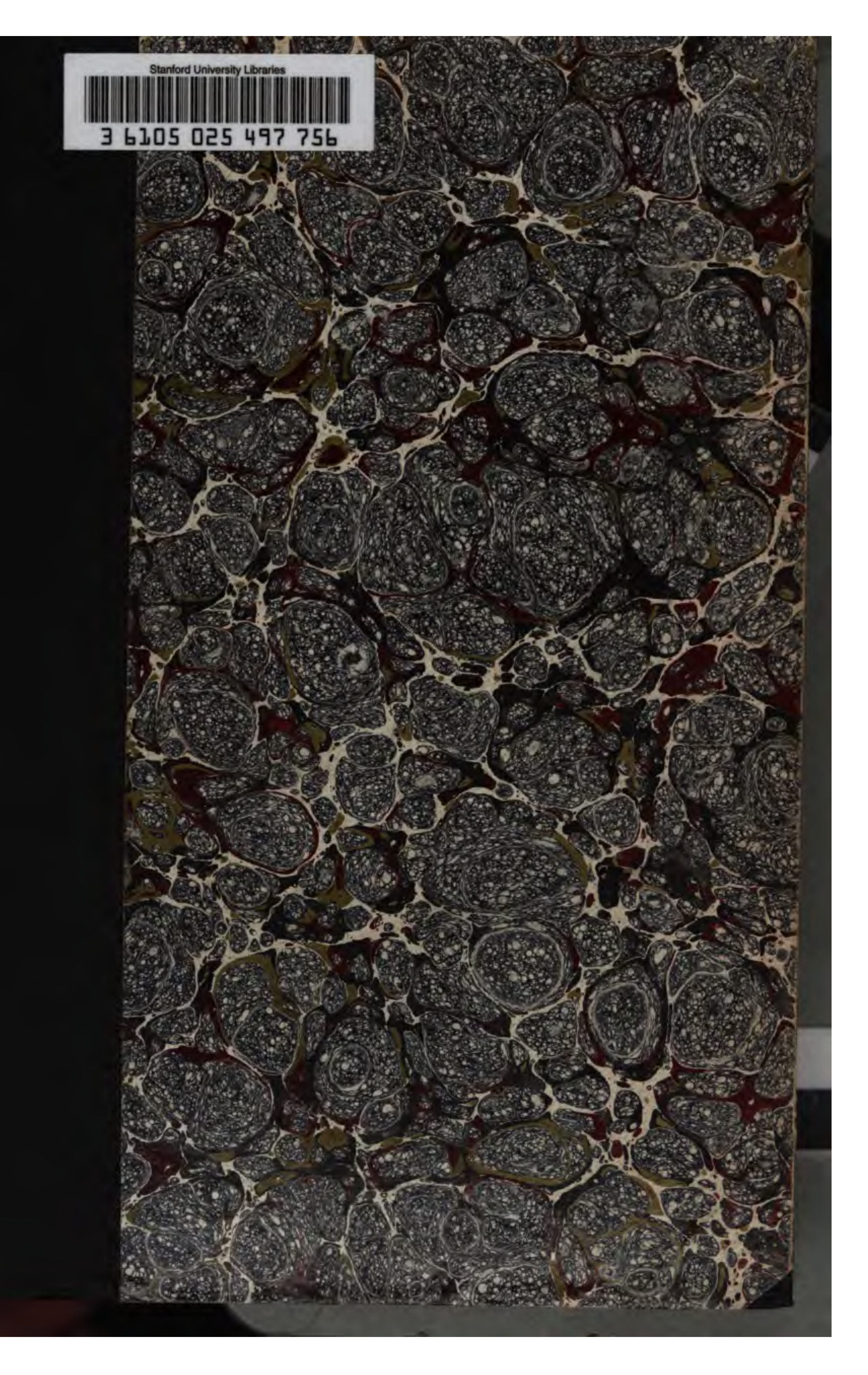
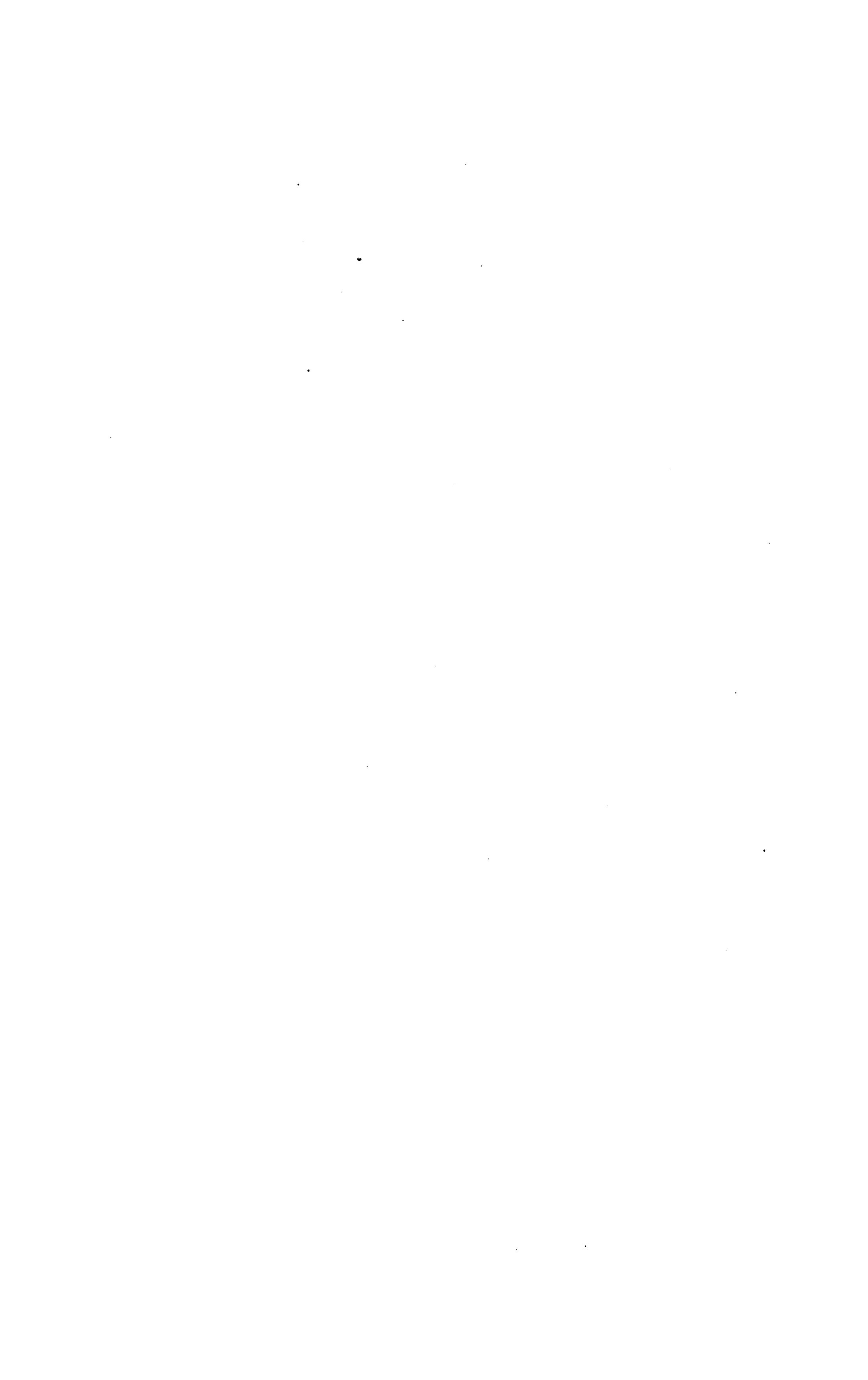



Stanford University Libraries
3 6105 025 497 756

10.5
673





Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert.

Königl. Geheimer Regierungs-Rath

und

Professor zu Greifswald.

Zweiundfunfzigster Theil.

Mit dreizehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1871.

Inhalts-Verzeichniss
des zweiundfunfzigsten Theils.

Geometrie.

Trigonometrie.

Mechanik.

Astronomie.

Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte*).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Note über die Integration von Differentialgleichungen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,
Professor am Polytechnikum in Wien.

Das Integrale der Differentialgleichung

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^2y}{dx^2} = x^2y$$

wurde von mir auf verschiedene Arten dargestellt. Im X. Bande der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" gab ich das Integrale nach der Kummer'schen Methode folgendermassen an:

$$(2)$$

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} v(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx} + C_4 e^{\lambda_4 uvx})\, du\, dv.$$

In diesem Integrale bedeuten

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4$$

die vier Wurzeln der Gleichung

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda^4 = 1.$$

C_1, C_2, C_3, C_4 sind willkürliche Constante, zwischen welchen folgende zwei Bedingungsgleichungen stattfinden:

$$(4) \ldots\ldots \begin{cases} C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2 + C_4\lambda_4^2 = 0, \\ C_1\lambda_1^3 + C_2\lambda_2^3 + C_3\lambda_3^3 + C_4\lambda_4^3 = 0. \end{cases}$$

Im VIII. Bande der „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ gab ich das Integrale der Gleichung (1) in der Form:

$$(5) \ldots \quad y = A\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + Bx\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}$$

an, woselbst A und B willkürliche Constante bedeuten. Ich ziehe vor das in (5) gegebene Integrale der Differentialgleichung (1) dem in (2) gegebenen Integrale; denn nach meiner Auffassung ist es Aufgabe des Mathematikers, das Doppelintegrale auf ein einfaches Integrale zurückzuführen, gelingt diess nicht direct durch wirkliche Reduction, so muss man auch zufrieden sein, diess indirect gefunden zu haben.

Trotzdem hat die Form (2) manches Empfehlenswerthe. So lässt sich z. B. der Ausdruck (2) mit grosser Leichtigkeit beliebig oft differenziren, während das wiederholte Differenziren des in (5) stehenden Ausdrucks doch immer eine Arbeit ist.

Es lässt sich leicht die Richtigkeit der beiden in (2) und (5) gegebenen Integrale darthun, und ich glaube, man sollte es nie unterlassen, diess wirklich zu thun, weil man mit den Formen, mit welchen man rechnet, erst hierdurch recht vertraut wird.

Der Ausdruck:

$$(2)$$

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} v\left(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx} + C_4 e^{\lambda_4 uvx}\right) du\,dv$$

gibt zweimal differenzirt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^2v^3 \left\{ \begin{array}{l} C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 uvx} \\ + C_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 uvx} + C_4\lambda_4^2 e^{\lambda_4 uvx} \end{array} \right\} du\,dv.$$

Setzt man nun statt $e^{-\frac{v^4}{4}} v^3 dv$ seinen Werth $-de^{-\frac{v^4}{4}}$ und behandelt man dann das Integrale

$$\int e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^2v^3 \left(C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 uvx} + C_4\lambda_4^2 e^{\lambda_4 uvx}\right) du\,dv,$$

welches sich auch folgendermassen schreiben lässt:

$$-\int e^{-\frac{u^4}{4}} u^2 \left(C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 uvx} + C_4\lambda_4^2 e^{\lambda_4 uvx}\right) de^{-\frac{v^4}{4}}$$

nach der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man:

$$-e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^2(C_1\lambda_1{}^2e^{\lambda_1uvx}+C_2\lambda_2{}^2e^{\lambda_2uvx}+C_3\lambda_3{}^2e^{\lambda_3uvx}+C_4\lambda_4{}^2e^{\lambda_4uvx})+$$

$$+x\int e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^3(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2uvx}+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4uvx})dv;$$

folglich ist:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^2v^3(C_1\lambda_1{}^2e^{\lambda_1uvx}+C_2\lambda_2{}^2e^{\lambda_2uvx}+C_3\lambda_3{}^2e^{\lambda_3uvx}+C_4\lambda_4{}^2e^{\lambda_4uvx})\,dv$$

$$=e^{-\frac{u^4}{4}}u^2(C_1\lambda_1{}^2+C_2\lambda_2{}^2+C_3\lambda_3{}^3+C_4\lambda_4{}^2)$$

$$+x\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^3(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2uvx}+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4uvx})dv$$

und demnach hat man:

$$(6)\ldots\ldots\frac{d^2y}{dx^2}=(C_1\lambda_1{}^2+C_2\lambda_2{}^2+C_3\lambda_3{}^2+C_4\lambda_4{}^2)\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}u^2du$$

$$+x\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^3\left\{\begin{array}{l}(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2uvx}\\+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4uvx})\end{array}\right\}du\,dv.$$

Schreibt man nun wieder statt $e^{-\frac{u^4}{4}}u^3du$ seinen Werth $-de^{-\frac{v^4}{4}}$ und behandelt man dann das Integrale

$$\int e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^3(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2uvx}+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4uvx})\,du,$$

welches sich folgendermassen schreiben lässt:

$$-\int e^{-\frac{v^4}{4}}(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2uvx}+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4uvx})\,de^{-\frac{u^4}{4}}$$

nach der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man:

$$-e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2uvx}+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4uvx})$$

$$+x\int e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}v(C_1\lambda_1{}^4e^{\lambda_1uvx}+C_2\lambda_2{}^4e^{\lambda_2uvx}+C_3\lambda_3{}^4e^{\lambda_3uvx}+C_4\lambda_4{}^4e^{\lambda_4uvx})du;$$

demnach ist:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^3(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4 uvx})\,du$$

$$= e^{-\frac{v^4}{4}}(C_1\lambda_1{}^3+C_2\lambda_2{}^3+C_3\lambda_3{}^3+C_4\lambda_4{}^3)$$

$$+x\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} v(C_1\lambda_1{}^4e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^4e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3{}^4e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^4e^{\lambda_4 uvx})\,du$$

und folglich hat man:

$$(7)\ldots\ \frac{d^2y}{dx^2}=(C_1\lambda_1{}^2+C_2\lambda_2{}^2+C_3\lambda_3{}^2+C_4\lambda_4{}^2)\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}u^2du$$

$$+(C_1\lambda_1{}^3+C_2\lambda_2{}^3+C_3\lambda_3{}^3+C_4\lambda_4{}^3)x\int_0^\infty e^{-\frac{v^4}{4}}dv$$

$$+x^2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} v\left\{\begin{array}{l}(C_1\lambda_1{}^4e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^4e^{\lambda_2 uvx}\\ +C_3\lambda_3{}^4e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^4e^{\lambda_4 uvx}\end{array}\right\}dudv.$$

Setzt man nun

$$\lambda_1{}^4=\lambda_2{}^4=\lambda_3{}^4=\lambda_4{}^4=1,$$

so lässt sich die Gleichung (7) einfacher so schreiben:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^2y+(C_1\lambda_1{}^2+C_2\lambda_2{}^2+C_3\lambda_3{}^2+C_4\lambda_4{}^2)\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}u^2du$$

$$+(C_1\lambda_1{}^3+C_2\lambda_2{}^3+C_3\lambda_3{}^3+C_4\lambda_4{}^3)x\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}du,$$

und wenn man noch

$$(4)\ldots.\ \left\{\begin{array}{l}C_1\lambda_1{}^2+C_2\lambda_2{}^2+C_3\lambda_3{}^2+C_4\lambda_4{}^2=0,\\ C_1\lambda_1{}^3+C_2\lambda_2{}^3+C_3\lambda_3{}^3+C_4\lambda_4{}^3=0\end{array}\right.$$

setzt, so hat man:

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ \frac{d^2y}{dx^2}=x^2y;$$

folglich genügt wirklich dieser Gleichung der in (2) stehende Ausdruck, falls nur zwischen den Constanten, welche in das Integrale eintreten, die Bedingungsgleichungen (3) und (4) erfüllt sind.

Auf eben so einfache Weise lässt sich die Richtigkeit des Integrales

$$(5)\ldots\quad y = A\int_{-1}^{+1}\frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + Bx\int_{-1}^{+1}\frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}$$

darthun; denn differenzirt man das in (5) aufgestellte y, so erhält man:

$$y' = Ax\int_{-1}^{+1}\frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + B\left(x^2\int_{-1}^{+1}\frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}} + \int_{-1}^{+1}\frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}\right),$$

$$y'' = A\left(\int_{-1}^{+1}\frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + x^2\int_{-1}^{+1}\frac{\lambda^2 e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}}\right)$$

$$+ B\left(x^3\int_{-1}^{+1}\frac{\lambda^2 e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}} + 3x\int_{-1}^{+1}\frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}\right);$$

folglich ist:

$$(8)\ldots\ldots\ldots\quad y'' - x^2 y =$$

$$A\left(\int_{-1}^{+1}\frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} - x^2\int_{-1}^{+1} e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\sqrt[4]{1-\lambda^2}\,d\lambda\right)$$

$$+ B\left(3x\int_{-1}^{+1}\frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}} - x^3\int_{-1}^{+1}\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}\,e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda\right).$$

Nun ist identisch:

$$\int\frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} = -2\int e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\sqrt[4]{1-\lambda^2};$$

ferner lässt sich das letzte Integrale mittelst der Methode des theilweisen Integrirens behandeln und gibt:

$$\int\frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} = -2e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\sqrt[4]{1-\lambda^2} + x^2\int\sqrt[4]{1-\lambda^2}\,e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda;$$

folglich ist:

Im VIII. Bande der „**Zeitschrift für Mathematik und Physik**“ gab ich das Integrale der Gleichung (1) in der Form:

$$(5) \ldots \quad y = A\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + Bx\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}$$

an, woselbst A und B willkührliche Constante bedeuten. Ich ziehe vor das in (5) gegebene Integrale der Differentialgleichung (1) dem in (2) gegebenen Integrale; denn nach meiner Auffassung ist es Aufgabe des Mathematikers, das Doppelintegrale auf ein einfaches Integrale zurückzuführen, gelingt diess nicht direct durch wirkliche Reduction, so muss man auch zufrieden sein, diess indirect gefunden zu haben.

Trotzdem hat die Form (2) manches Empfehlenswerthe. So lässt sich z. B. der Ausdruck (2) mit grosser Leichtigkeit beliebig oft differenziren, während das wiederholte Differenziren des in (5) stehenden Ausdrucks doch immer eine Arbeit ist.

Es lässt sich leicht die Richtigkeit der beiden in (2) und (5) gegebenen Integrale darthun, und ich glaube, man sollte es nie unterlassen, diess wirklich zu thun, weil man mit den Formen, mit welchen man rechnet, erst hierdurch recht vertraut wird.

Der Ausdruck:

$$(2)$$

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} v\,(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx} + C_4 e^{\lambda_4 uvx})\,du\,dv$$

gibt zweimal differenzirt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^2 v^3 \left\{ \begin{array}{c} C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 uvx} \\ + C_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 uvx} + C_4\lambda_4^2 e^{\lambda_4 uvx} \end{array} \right\} du\,dv.$$

Setzt man nun statt $e^{-\frac{v^4}{4}} v^3 dv$ seinen Werth $-de^{-\frac{v^4}{4}}$ und behandelt man dann das Integrale

$$\int e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^2 v^3 (C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 uvx} + C_4\lambda_4^2 e^{\lambda_4 uvx})\,du\,dv,$$

welches sich auch folgendermassen schreiben lässt:

$$-\int e^{-\frac{u^4}{4}} u^2 (C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 uvx} + C_4\lambda_4^2 e^{\lambda_4 uvx})\,de^{-\frac{v^4}{4}}$$

nach der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man:

$$-e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^2(C_1\lambda_1{}^2e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^2e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3{}^2e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^2e^{\lambda_4 uvx})+$$

$$+x\int e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^3(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4 uvx})dv;$$

folglich ist:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^2v^3(C_1\lambda_1{}^2e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^2e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3{}^2e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^2e^{\lambda_4 uvx})\,dv$$

$$=e^{-\frac{u^4}{4}}u^2(C_1\lambda_1{}^2+C_2\lambda_2{}^2+C_3\lambda_3{}^3+C_4\lambda_4{}^2)$$

$$+x\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^3(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4 uvx})dv$$

und demnach hat man:

$$(6)\ldots\ldots\frac{d^2y}{dx^2}=(C_1\lambda_1{}^2+C_2\lambda_2{}^2+C_3\lambda_3{}^2+C_4\lambda_4{}^2)\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}u^2du$$

$$+x\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^3\left\{\begin{array}{l}(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2 uvx}\\+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4 uvx})\end{array}\right\}du\,dv.$$

Schreibt man nun wieder statt $e^{-\frac{u^4}{4}}u^3du$ seinen Werth $-de^{-\frac{v^4}{4}}$ und behandelt man dann das Integrale

$$\int e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^3(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4 uvx})\,du,$$

welches sich folgendermassen schreiben lässt:

$$-\int e^{-\frac{v^4}{4}}(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4 uvx})\,de^{-\frac{u^4}{4}}$$

nach der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man:

$$-e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}(C_1\lambda_1{}^3e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^3e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3{}^3e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^3e^{\lambda_4 uvx})$$

$$+x\int e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}v(C_1\lambda_1{}^4e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2{}^4e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3{}^4e^{\lambda_3 uvx}+C_4\lambda_4{}^4e^{\lambda_4 uvx})du;$$

demnach ist:

$$A'y_1' + B'y_2' = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1},$$
$$A'y_1 + B'y_2 = 0.$$

Setzt man der Kürze halber:

$$C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1} = N,$$

so hat man:

$$(17) \ldots\ldots \begin{cases} A'y_1' + B'y_2' = N, \\ A'y_1 + B'y_2 = 0. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgen:

$$(18) \ldots\ldots \begin{cases} A' = \dfrac{Ny_2}{y_1'y_2 - y_1y_2'}, \\ B' = -\dfrac{Ny_1}{y_1'y_2 - y_1y_2'}. \end{cases}$$

Um diese beiden Ausdrücke zu vereinfachen, bemerke man, dass folgende zwei Gleichungen identisch stattfinden:

$$y_1'' + Ly_1' + My_1 = 0.$$
$$y_2'' + Ly_2' + My_2 = 0.$$

Elliminirt man aus diesen beiden Gleichungen das M, so erhält man:

$$y_1''y_2 - y_1y_2'' + L(y_1'y_2 - y_1y_2') = 0,$$

und diess lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{d(y_1'y_2 - y_1y_2')}{dx} + L(y_1'y_2 - y_1y_2') = 0;$$

hieraus folgt:

$$\frac{d(y_1'y_2 - y_1y_2')}{y_1'y_2 - y_1y_2'} = -Ldx;$$

ferner durch Integration:

$$\log(y_1'y_2 - y_1y_2') = -\int Ldx,$$

und somit *):

$$y_1'y_2 - y_1y_2' = e^{-\int Ldx};$$

daher ist:

---

*) Siehe: Oeuvres complètes de N. H. Abel, tom. I, pag. 93.

$$A' = \quad N y_2 e^{\int L dx},$$
$$B' = - N y_1 e^{\int L dx};$$

und folglich hat man als vollständiges Integrale der Gleichung (15):

$$(19) \ldots \quad y = y_1 \int N y_2 e^{\int L dx} dx - y_2 \int N y_1 e^{\int L dx} dx.$$

Wollte man nun auf diesem Wege das vollständige Integrale der Gleichung

$$(y'' - x^2 y)' = 0,$$

d. i. der Gleichung

$$(20) \ldots \ldots \ldots \quad y''' = x^2 y' + 2xy$$

ermitteln, welche einmal integrirt die Gleichung

$$y'' = x^2 y + C$$

liefert, so käme man auf höchst verwickelte Ausdrücke. Ich habe das vollständige Integrale der Gleichung (20) auf viel einfachere Weise ermittelt.

Da nämlich der Ausdruck:

$$(2)$$
$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4 + v^4}{4}} v \left(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx} + C_4 e^{\lambda_4 uvx}\right) du\, dv$$

unter der Voraussetzung, dass

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4$$

die vier Wurzeln der Gleichung

$$(3) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \lambda^4 = 1$$

sind, nach dem früher Mitgetheilten auf die Gleichung:

$$y'' - x^2 y = \quad (C_1 \lambda_1^2 + C_2 \lambda_2^2 + C_3 \lambda_3^2 + C_4 \lambda_4^2) \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} u^2 du$$
$$+ (C_1 \lambda_1^3 + C_2 \lambda_2^3 + C_3 \lambda_3^3 + C_4 \lambda_4^3) x \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} dv$$

führt, so hat man, dieselbe einmal differenzirend:

$$(21) \ldots (y'' - x^2 y)' = (C_1 \lambda_1^3 + C_2 \lambda_2^3 + C_3 \lambda_3^3 + C_4 \lambda_4^3) \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} du,$$

und diess wird Null, wenn

$$C_1\lambda_1{}^3 + C_2\lambda_2{}^3 + C_3\lambda_3{}^3 + C_4\lambda_4{}^3 = 0$$

ist. Hieraus folgt, dass der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

(20) . . . . $y''' = x^2y' + 2xy$

folgender Werth von y genügt:

(2)

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} v(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx} + C_4 e^{\lambda_4 uvx}) du dv,$$

in welchem λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 die vier Wurzeln der Gleichung

(3) . . . . $\lambda^4 = 1$

sind, und C_1, C_2, C_3, C_4 willkührliche Constante bedeuten, welche gebunden sind an die Gleichung

(22) . . . . $C_1\lambda_1{}^3 + C_2\lambda_2{}^3 + C_3\lambda_3{}^3 + C_4\lambda_4{}^3 = 0.$

Man kann aber noch auf andere einfachere Weise das Integrale der Gleichung (20) bestimmen. Es führt nämlich, wie aus den früheren Betrachtungen ersichtlich, der Ausdruck:

(11) . . . . $y = A \int \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2} d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + Bx \int \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2} d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}$

auf die Gleichung:

(12) . . . $y'' - x^2y = -2e^{\frac{\lambda}{2}x^2} \sqrt[4]{1-\lambda^2}(A + Bx\sqrt{1-\lambda^2})$,

folglich führt der Ausdruck:

(23) . . . $y = A \int_0^1 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2} d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + Bx \int_0^1 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2} d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}$

auf die Gleichung

(24) . . . . $y'' - x^2y = 2(A + Bx).$

Differenzirt man diese Gleichung einmal, so erhält man:

(25) . . . . $(y'' - x^2y)' = 2B,$

und diess ist Null für $B = 0$; somit leistet der Differentialgleichung

$$(y'' - x^2y)' = 0$$

oder, was dasselbe ist, der Differentialgleichung

(20) . . . . $y''' = x^2y' + 2xy$

Genüge, folgender Werth von y:

$$y = A\int_0^1 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}}.$$

Auf gleiche Weise überzeugt man sich, dass

$$y = B\int_0^{-1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}}$$

der Gleichung (20) Genüge leistet; folglich leistet der linearen Differentialgleichung (20) Genüge folgender Werth von y:

(26)

$$y = A\int_0^1 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + B\int_0^{-1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + Cx\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}.$$

Ich ziehe diesen so eben aufgestellten Werth von y wiederum dem in Form eines Doppelintegrales gegebenen Ausdruck vor, weil eben immer, meiner Meinung nach (unter übrigens gleichen Verhältnissen), ein einfaches Integrale einem Doppelintegrale vorzuziehen ist.

Durch Schlüsse ganz ähnlicher Art habe ich gefunden, dass die nochmals differenzirte Gleichung (20), d. i. die Gleichung

(27) . . . . $y'''' = x^2y'' + 4xy' + 2y,$

ein Integral habe, das unter folgenden Formen sich darstellen lasse:

$$y = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}\,v\,(C_1e^{\lambda_1uvx} + C_2e^{\lambda_2uvx} + C_3e^{\lambda_3uvx} + C_4e^{\lambda_4uvx})\,du\,dv,$$

vorausgesetzt, dass λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 die vier Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^4 = 1$$

sind, oder

$$y = C_1\int_0^1 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + C_2\int_0^{-1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + C_3 x\int_0^1 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}$$
$$+ C_4 x\int_0^{-1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}$$

unter C_1, C_2, C_3, C_4 willkührliche Constante verstanden.

Differenzirt man die Gleichung (27) $n$mal nach x, so erhält man

$$(28) \ldots y^{(n+4)} = x^2 y^{(n+2)} + 2x(n+2)y^{(n+1)} + (n+1)(n+2)y^{(n)}.$$

Ist n eine ganze positive Zahl, so genügen dieser Gleichung nicht nur die vier particulären Integrale, die wir so eben aufgestellt haben, sondern auch alle jene particulären Integrale, welche der Gleichung

$$y^{(n)} = 0$$

genügen. Setzt man in (28)

$$y^{(n)} = z,$$

so erhält man die Gleichung

$$(29) \ldots z'''' = x^2 z'' + 2(n+2)xz' + (n+1)(n+2)z,$$

und ihr genügt ein vollständiges Integrale, welches sich auf folgende Arten darstellen lässt:

$$(30) \ldots z = \frac{d^n}{dx^n}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} v \left\{ \begin{matrix} C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} \\ + C_3 e^{\lambda_3 uvx} + C_4 e^{\lambda_4 uvx} \end{matrix} \right\} du dv$$

woselbst

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4$$

die vier Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^4 = 1$$

sind, oder

$$(31) \ldots z = \frac{d^n}{dx^n}\Big[C_1\int_0^1 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + C_2\int_0^{-1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}}$$
$$+ C_3 x\int_0^1 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}} + C_4 x\int_0^{-1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}\Big].$$

Die beiden Integrale (30) und (31) gestatten auch folgende Schreibweise:

$$(32)\ldots\ldots\ z=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^n v^{n+1}\left\{\begin{array}{l}(C_1 e^{\lambda_1 uvx}+C_2 e^{\lambda_2 uvx}\\ +C_3 e^{\lambda_3 uvx}+C_4 e^{\lambda_4 uvx})\end{array}\right\}du\,dv,$$

$$(33)\ldots\ldots\ z=\frac{d^n}{dx^n}\left[C_1\int_0^1\frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}}+C_2\int_0^1\frac{e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}}\right.$$

$$\left.+C_3 x\int_0^1\frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}+C_4 x\int_0^1\frac{e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}\right].$$

Es wäre jetzt leicht nachzuweisen, dass die in (32) und (33) aufgestellten Integrale der Gleichung (29) Genüge leisten, ich will diesen Nachweis aber bloss für das in (32) aufgestellte Integrale führen. Offenbar genügt es nachzuweisen, dass

$$(34)\ .\ .\ .\ z=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^n v^{n+1}e^{\lambda uvx}du\,dv$$

der Gleichung (29) genüge, wenn $\lambda^4=1$ ist. Aus der Gleichung (34) folgen nachstehende Gleichungen:

(35)

$$z'=\lambda\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^{n+1}v^{n+2}e^{\lambda uvx}du\,dv,$$

$$z''=\lambda^2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^{n+2}v^{n+3}e^{\lambda uvx}du\,dv,$$

$$z''''=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}}u^{n+4}v^{n+5}e^{\lambda uvx}du\,dv.$$

Ich will nun das z'''' transformiren. Zu dem Zwecke schreibe ich es folgendermassen auf:

$$z''''=-\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{v^4}{4}}u^{n+1}v^{n+5}e^{\lambda uvx}dv\,.\frac{de^{-\frac{u^4}{4}}}{du}du$$

und behandle nun das unbestimmte Integrale

$$-\int e^{-\frac{v^4}{4}} u^{n+1} v^{n+5} e^{\lambda uvx} de^{-\frac{u^4}{4}}$$

mittelst der Methode des theilweisen Integrirens. Selbes gibt:

$$-e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^{n+1} v^{n+5} e^{\lambda uvx} + \int e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^n v^{n+5} (n+1+\lambda uvx) e^{\lambda uvx} du;$$

folglich ist:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^{n+4} v^{n+5} e^{\lambda uvx} du$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^n v^{n+5} (n+1+\lambda uvx) e^{\lambda uvx} du,$$

und somit hat man:

$$z'''' = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^n v^{n+5} (n+1+\lambda uvx) e^{\lambda uvx} du dv.$$

Schreibt man nun dieses z'''' in nachstehender Gestalt:

$$z'''' = -\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} u^n v^{n+2} (n+1+\lambda uvx) e^{\lambda uvx} du \,. \frac{de^{-\frac{v^4}{4}}}{dv} dv,$$

und behandelt man das unbestimmte Integrale

$$-\int e^{-\frac{u^4}{4}} u^n v^{n+2} (n+1+\lambda uvx) e^{\lambda uvx} de^{-\frac{v^4}{4}}$$

mittelst der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man:

$$-e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^n v^{n+2} (n+1+\lambda uvx) e^{\lambda uvx}$$

$$+\int e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^n v^{n+1} e^{\lambda uvx} [(n+1)(n+2) + 2(n+2)\lambda uvx + \lambda^2 u^2 v^2 x^2] dv;$$

folglich ist:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^n v^{n+5} (n+1+\lambda uvx)^{\lambda uvx} dv$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^n v^{n+1} e^{\lambda uvx} [(n+1)(n+2) + 2(n+2)\lambda uvx + \lambda^2 u^2 v^2 x^2] dv,$$

und es ist demnach:

$$z''''$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^n v^{n+1} e^{\lambda uvx} \left\{\begin{matrix}(n+1)(n+2)+2(n+2)\lambda uvx \\ +\lambda^2u^2v^2x^2\end{matrix}\right\} du\,dv.$$

Wird nun dieser Werth von z'''' und die in (34) und (35) hingestellten Werthe von z, z' und z'' in die Gleichung (29) substituirt, so sieht man auf den ersten Blick, dass man zu einer identischen Gleichung gelangt. Es ist also in der That der in (32) aufgestellte Werth von z das vollständige Integrale der Gleichung (29).

Ueberblickt man die eben durchgeführte Rechnung, so sieht man, dass das in (32) aufgestellte Integrale auch in dem Falle der vorgelegten Differentialgleichung genügt, wenn n keine ganze positive Zahl, sondern auch, wenn n ein beliebiger positiver Bruch ist.

Ich bin durch diess zu dem Resultate gelangt, dass der linearen Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(29)\ \ldots\ z'''' = x^2z'' + 2(n+2)xz' + (n+1)(n+2)z,$$

im Falle n eine positive, ganze oder gebrochene Zahl ist, folgender Werth von z Genüge leistet:

$$(32)\ldots\ z=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^n v^{n+1} \left\{\begin{matrix}(C_1e^{\lambda_1uvx}+C_2e^{\lambda_2uvx} \\ +C_3e^{\lambda_3uvx}+C_4e^{\lambda_4uvx})\end{matrix}\right\} du\,dv,$$

woselbst λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 die vier Wurzeln der Gleichung $\lambda^4=1$ sind, und C_1, C_2, C_3, C_4 willkührliche Constante bedeuten. Ist n eine ganze positive Zahl, so hat z folgende einfachere Gestalt:

$$(33)\ldots\ z=\frac{d^n}{dx^n}\Big[C_1\int_0^1 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}} + C_2\int_0^1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{(1-\lambda^2)^3}}$$

$$+ C_3x\int_0^1 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}} + C_4x\int_0^1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}\,d\lambda}{\sqrt[4]{1-\lambda^2}}\Big].$$

Im vorliegenden Falle ist das Doppelintegrale dem einfachen Integrale vorzuziehen, denn das in (32) stehende z liefert das vollständige Integrale der Gleichung (29) für jeden beliebigen positiven, ganzen oder gebrochenen Werth von n, während das in (33) stehende z bloss für ganze und positive Werthe von n giltig ist.

II.

Integration von Differentialgleichungen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor am Polytechnikum in Wien.

Der Ausdruck

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y = e^{mx^3}$$

gibt differenzirt:

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y' = 3mx^2 e^{mx^3}.$$

Aus beiden Gleichungen (1) und (2) folgt daher die Differentialgleichung

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y' = 3mx^2 y,$$

und dieser genügt

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y = Ce^{mx^3},$$

unter C eine willkührliche Constante verstanden, oder auch:

$$(5) \ldots y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v \left(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx}\right) du\,dv,$$

unter C_1, C_2, C_3 willkührliche Constante verstanden, zwischen denen gewisse Bedingungen stattfinden; λ_1, λ_2, λ_3 sind die drei Wurzeln der Gleichung:

$$\lambda^3 = 3m.$$

Um sich von der Richtigkeit des eben aufgestellten Werthes von y zu überzeugen, differenzire man dasselbe, man erhält sodann:

$$(6)\qquad y'=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}uv^2(C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3 e^{\lambda_3 uvx})\,du\,dv.$$

Setzt man nun statt

$$e^{-\frac{v^3}{3}}v^2dv \text{ seinen Werth } -de^{-\frac{v^3}{3}},$$

und behandelt man dann das Integrale:

$$\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}uv^2(C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3 e^{\lambda_3 uvx})\,dv,$$

welches sich auch folgendermassen schreiben lässt:

$$-\int e^{-\frac{u^3}{3}}u(C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3 e^{\lambda_3 uvx})\,de^{-\frac{v^3}{3}},$$

mittelst der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man:

$$-e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}u(C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3 e^{\lambda_3 uvx})$$
$$+x\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}u^2(C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 uvx})\,dv;$$

folglich ist:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}uv^2(C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3 e^{\lambda_3 uvx})\,dv$$
$$=(C_1\lambda_1+C_2\lambda_2+C_3\lambda_3)ue^{-\frac{u^3}{3}}$$
$$+x\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}u^2(C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 uvx})\,dv,$$

und y' gestattet demnach folgende Schreibweise:

$$y'=(C_1\lambda_1+C_2\lambda_2+C_3\lambda_3)\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}}u\,du$$
$$+x\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}u^2(C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 uvx}+C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 uvx}+C_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 uvx})\,du\,dv.$$

Schreibt man nun wieder statt

$$u^2e^{-\frac{u^3}{3}}du \text{ seinen Werth } -de^{-\frac{u^3}{3}}$$

und behandelt man dann das Integrale

$$x\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^2(C_1\lambda_1{}^2 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2{}^2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3\lambda_3{}^2 e^{\lambda_3 uvx})du,$$

welches sich folgendermassen schreiben lässt:

$$-x\int e^{-\frac{v^3}{3}}(C_1\lambda_1{}^2 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2{}^2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3\lambda_3 e^{\lambda_3 uvx})\, de^{-\frac{u^3}{3}},$$

nach der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man:

$$-xe^{-\frac{u^3+v^3}{3}}(C_1\lambda_1{}^2 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2{}^2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3\lambda_3{}^2 e^{\lambda_3 uvx})$$

$$+ x^2\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v(C_1\lambda_1{}^3 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2{}^3 e^{\lambda_2 uvx} + C_3\lambda_3{}^3 e^{\lambda_3 uvx})du;$$

demnach ist, wenn man berücksichtigt, dass λ_1, λ_2, λ_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \lambda^3 = 3m$$

sind:

$$x\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^2(C_1\lambda_1{}^2 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2{}^2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3\lambda_3{}^2 e^{\lambda_3 uvx})du$$

$$= xe^{-\frac{v^3}{3}}(C_1\lambda_1{}^2 + C_2\lambda_2{}^2 + C_3\lambda_3{}^2)$$

$$+ 3mx^2\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx})du;$$

folglich hat man:

$$(8) \ldots \quad y' = (C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3)\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} u\,du$$

$$+ (C_1\lambda_1{}^2 + C_2\lambda_2{}^2 + C_3\lambda_3{}^2)\,x\int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} dv + 3mx^2 y.$$

Es ist somit in der That nicht nur

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y = Ce^{mx^3},$$

sondern auch:

$$(5) \ldots y = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx})\,du\,dv$$

das Integrale der Gleichung

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots y' = 3mx^2y,$$

falls nur zwischen den drei Constanten C_1, C_2, C_3 die Bedingungsgleichungen

$$C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3 = 0,$$

$$C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2 = 0$$

stattfinden, und λ_1, λ_2, λ_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^3 = 3m$$

sind.

Differenzirt man die Gleichung (3) einmal, so erhält man:

$$(9) \ldots\ldots\ldots y'' = 3mx^2y' + 6mxy.$$

Aus ihr folgt durch Integration:

$$y' = 3mx^2y + C,$$

und hieraus folgen ferner nacheinander folgende Gleichungen:

$$(10)$$

$$y' - 3mx^2y = C,$$

$$e^{-mx^3}(y' - 3mx^2y) = Ce^{-mx^3},$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-mx^3}y] = Ce^{-mx^3},$$

$$e^{-mx^3}y = C\int e^{-mx^3}dx,$$

$$y = Ce^{mx^3}\int e^{-mx^3}dx.$$

Diess ist das vollständige Integrale der Gleichung (9). Es lässt sich aber das Integrale der Gleichung (9) auch auf andere Art geben.

Setzt man nämlich y in nachstehender Form voraus:

$$(5) \ldots y = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v(C_1e^{\lambda_1 uvx} + C_2e^{\lambda_2 uvx} + C_3e^{\lambda_3 uvx})\,du\,dv,$$

so folgt hieraus unter der Voraussetzung, dass λ_1, λ_2, λ_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^3 = 3m$$

sind:

$$y' - 3mx^2y = (C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3)\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} u\,du$$
$$+ (C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2)\,x\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} du.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man:

$$(11)\ldots y'' - 3mx^2y' - 6mxy = (C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2)\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} du.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung wird Null, wenn

$$(12) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2 = 0$$

wird; sonach genügt der Gleichung (9) auch das in (5) stehende y, wenn nur zwischen den drei Constanten C_1, C_2, C_3 die in (12) aufgestellte Bedingungsgleichung stattfindet.

Differenzirt man die Gleichung (9), so erhält man:

$$(13) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; y''' = 3mx^2y'' + 12mxy' + 6my.$$

Um diese Gleichung zu integriren, bemerke man, dass dieselbe zweimal integrirt auf die Gleichung

$$y' = 3mx^2y + C_1 + C_2x$$

führt, woselbst C_1 und C_2 willkührliche Constante bedeuten. Aus

$$y' - 3mx^2y = C_1 + C_2x$$

folgen successive:

$$e^{-mx^3}(y' - 3mx^2y) = (C_1 + C_2x)\,e^{-mx^3},$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-mx^3}y] = (C_1 + C_2x)\,e^{-mx^3},$$

$$e^{-mx^3}y = \int (C_1 + C_2x)\,e^{-mx^3}dx;$$

folglich ist:

$$(14) \;.\;.\;.\;.\;.\quad y = e^{mx^3}\int (C_1 + C_2x)\,e^{-mx^3}dx$$

das vollständige Integrale der Gleichung (13).

Es lässt sich nun wieder das Integrale der Gleichung (13) in Form eines Doppelintegrales aufstellen. Setzt man nämlich:

$$(5)\ldots y = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v\,(C_1e^{\lambda_1 uvx} + C_2e^{\lambda_2 uvx} + C_3e^{\lambda_3 uvx})\,du\,dv;$$

so ist:

$$y' - 3mx^2y = (C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3)\int_0^\infty ue^{-\frac{u^3}{3}}du$$
$$+ (C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2)x\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}}du,$$

und diese Gleichung gibt zweimal differenzirt:

$$y''' - 3mx^2y'' - 12mxy' - 6my = 0;$$

folglich ist in der That auch das in (5) stehende y das vollständige, mit drei willkührlichen Constanten C_1, C_2, C_3 versehene Integrale der Differentialgleichung (13).

Differenzirt man die Gleichung (13) μmal nach x, so erhält man:

(15)

$$y^{(\mu+3)} = 3mx^2y^{(\mu+2)} + 6m(\mu+2)xy^{(\mu+1)} + 3m(\mu+2)(\mu+1)y^{(\mu)},$$

und dieser Gleichung genügen:

(16)

$$y = e^{mx}\int(C_1 + C_2x)e^{-mx^3}dx + A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots + A_\mu x^{\mu-1};$$

oder in anderer Gestalt aufgestellt:

$$(17)\ldots y = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}v(C_1e^{\lambda_1uvx} + C_2e^{\lambda_2uvx} + C_3e^{\lambda_3uvx})dudv$$
$$+ A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots + A_\mu x^{\mu-1};$$

in diesen Formeln bezeichnen sowohl C_1, C_2, C_3, als auch A_1, A_2, A_3, ... A_μ willkührliche Constante.

Setzt man nun in (15), (16) und (17):

$$y^{(\mu)} = z,$$

so erhält man die Gleichung:

$$(18)\ldots\; z''' = 3mx^2z'' + 6m(\mu+2)xz' + 3m(\mu+2)(\mu+1)z,$$

und ihr genügen:

$$z = \frac{d^\mu}{dx^\mu}[e^{mx^3}\int(C_1 + C_2x)e^{-mx^3}dx + A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots + A_\mu x^{\mu-1}],$$

und

$$z = \frac{d^\mu}{dx^\mu}\Big[\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v\,(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx})\,du\,dv$$

$$+ A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_\mu x^{\mu-1}\Big].$$

Die beiden letzten Ausdrücke für z gestatten folgende einfachere Schreibweise:

$$(19) \quad \ldots \quad z = \frac{d^\mu}{dx^\mu}\left[e^{mx^3}\int (C_1 + C_2 x)\, e^{-mx^3}\, dx\right],$$

und:

$$(20) \ldots z = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^\mu v^{\mu+1}(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx})\,du\,dv,$$

und es ist zu bemerken, dass jeder dieser beiden Ausdrücke das vollständige Integrale der Gleichung (18) repräsentirt. Das in (19) stehende vollständige Integrale ist aber, wie von selbst verständlich, bloss giltig, wenn μ eine ganze positive Zahl ist; das zweite Integrale, in welchem λ_1, λ_2, λ_3 die drei Wurzeln der Gleichung $\lambda^3 = 3m$ repräsentiren, ist aber merkwürdiger Weise richtig, wenn μ eine beliebige positive, ganze oder gebrochene Zahl ist. Um letzteres zu beweisen, substituire man den in (20) stehenden Werth von y in die Gleichung (18).

Offenbar genügt es, nachzuweisen, dass

$$(21) \ldots \quad z = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^\mu v^{\mu+1} e^{\lambda uvx}\,du\,dv$$

für $\lambda^3 = 3m$ der Gleichung (18) genüge. Aus (21) folgt:

(22)

$$z' = \lambda \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+1} v^{\mu+2} e^{\lambda uvx}\,du\,dv,$$

$$z'' = \lambda^2 \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+2} v^{\mu+3} e^{\lambda uvx}\,du\,dv;$$

ferner:

$$z''' = 3m \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+3} v^{\mu+4} e^{\lambda uvx}\,du\,dv.$$

Der Werth von z''' lässt sich transformiren. Es ist nämlich:

$$3m\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+3} v^{\mu+4} e^{\lambda uvx}\, dv$$

$$= -3m\int e^{-\frac{u^3}{3}} u^{\mu+3} v^{\mu+2} e^{\lambda uvx}\, de^{-\frac{v^3}{3}},$$

und diess gibt nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt:

$$-3me^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+3} v^{\mu+2} e^{\lambda uvx}$$

$$+3m\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+3} v^{\mu+1} (\mu+2+\lambda uvx)\, e^{\lambda uvx}\, dv;$$

folglich ist:

$$3m\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+3} v^{\mu+4} e^{\lambda uvx}\, dv.$$

$$= 3m\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+3} v^{\mu+1} (\mu+2+\lambda uvx)\, e^{\lambda uvx}\, dv,$$

und demnach hat man:

$$z''' = 3m\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+3} v^{\mu+1} (\mu+2+\lambda uvx)\, e^{\lambda uvx}\, du dv.$$

Dieser Ausdruck gestattet nun noch eine weitere Transformation. Setzt man nämlich für

$$3m\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+3} v^{\mu+1} (\mu+2+\lambda uvx)\, e^{\lambda uvx}\, du$$

seinen Werth:

$$-3m\int e^{-\frac{v^3}{3}} u^{\mu+1} v^{\mu+1} (\mu+2+\lambda uvx)\, e^{\lambda uvx}\, de^{-\frac{u^3}{3}},$$

so erhält man, diess nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelnd:

$$-3me^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+1} v^{\mu+1} (\mu+2+\lambda uvx)\, e^{\lambda uvx}$$

$$+3m\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu} v^{\mu+1} \left\{ \begin{array}{r} (\mu+1)(\mu+2)+2(\mu+2)\,\lambda uvx \\ +\lambda^2 u^2 v^2 x^2 \end{array} \right\} e^{\lambda uvx}\, du;$$

demnach ist:

$$3m\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\mu+3} v^{\mu+1} (\mu+2+\lambda uvx)\, e^{\lambda uvx}\, du$$

$$= 3m\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^\mu v^{\mu+1} \left\{ \begin{array}{r} (\mu+1)(\mu+2) + 2(\mu+2)\lambda uvx \\ + \lambda^2 u^2 v^2 x^2 \end{array} \right\} e^{\lambda uvx}\, du,$$

und man hat für z''' folgenden Werth:

$$z''' =$$

$$3m\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^\mu v^{\mu+1} \left\{ \begin{array}{r} (\mu+1)(\mu+2)+2(\mu+2)\lambda uvx \\ + \lambda^2 u^2 v^2 x^2 \end{array} \right\} e^{\lambda uvx}\, du\, dv.$$

Substituirt man nun diesen Werth von z''' und die in (21) und (22) aufgestellten Werthe von z, z' und z'' in die Gleichung (18), so wird selbe identisch erfüllt, was zu beweisen war.

III.

Zur Berechnung des Trapezes aus seinen Seiten.

Von

Herrn Professor *C. A. Bretschneider*

in Gotha.

(Figur s. Taf. I.)

Im Band L., pag. 109. dieses Archives hat der Herr Herausgeber aus der **Tidskrift för Matematik och Fysik** einen metrischen Satz am Trapeze als Uebungsaufgabe für Schüler mitgetheilt. Obgleich der fragliche Satz sattsam bekannt ist, so dürfte doch die nachfolgende Herleitung desselben nicht ohne Interesse sein, da sie an einem einfachen Beispiele zeigt, wie fruchtbar der Stewart'sche Lehrsatz (vergl. Bd. L., S. 11.

des Archivs) auch in der Elementargeometrie verwendet werden kann.

Es sei $ABCD$ ein Trapez, dessen Seiten der Reihe nach a, b, c, d und dessen Diagonalen $AC = e$, $BD = f$ sein mögen. Aus den Endpunkten B und C der Grundlinie BC ziehe man $BE \parallel AC$ und $CF \parallel BD$, so wird $BE = e$, $CF = f$ und $AE = DF = c$. Die Anwendung des Stewart'schen Satzes auf jedes der beiden Dreiecke BDE und CAF liefert die Gleichungen:

$$e^2a + f^2c = b^2(a+c) + ac(a+c),$$

$$f^2a + e^2c = d^2(a+c) + ac(a+c).$$

Addirt man beide, und hebt mit $(a+c)$, so erhält man:

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac,$$

welches die oben erwähnte bekannte metrische Relation ist; subtrahirt man dagegen die vorstehenden Gleichungen, so findet sich:

$$e^2 - f^2 = \frac{a+c}{a-c}(b^2 - d^2),$$

woraus man alsbald:

$$e^2 = \frac{b^2a - d^2c}{a-c} + ac,$$

$$f^2 = \frac{d^2a - b^2c}{a-c} + ac$$

ableitet.

Für den Flächeninhalt T des Trapezes ergiebt sich ausser der bekannten Formel:

$$16\,T^2 = \frac{a+c}{a-c}(a-c+b+d)(a-c+b-d)(a-c-b+d)(-a+c+b+d)$$

auch noch aus jedem der beiden, dem Trapeze gleichflächigen, Dreiecke BDE und CAF der Werth:

$$16\,T^2 = (a+c+e+f)(a+c+e-f)(a+c-e+f)(-a-c+e+f).$$

Will man noch zusammengesetztere Ausdrücke für T, so hat man nur die von mir Archiv Bd. L., S. 14. unter Nr. (10) entwickelten Formeln auf die Dreiecke BDE und CAF anzuwenden, was jedoch der Kürze halber hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

IV.

Ueber den fünften merkwürdigen Punkt.

Von

Herrn Dr. *Ad. Hochheim,*

Lehrer an der höheren Gewerbeschule zu Magdeburg.

(Figuren s. Tafel I.)

Gegeben sei ein Dreieck ABC (Fig. 1.); die Seite AB desselben möge mit der x-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, A mit dem Anfangspunkte, zusammenfallen. Ziehen wir in diesem Dreieck die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der den Seiten anbeschriebenen Kreise, so schneiden sich diese bekanntlich in einem Punkte, welcher der fünfte merkwürdige Punkt genannt wird. Es mögen zunächst die Coordinaten dieses Punktes bestimmt werden. Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks mit A, B, C, die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c und den Radius des umschriebenen Kreises mit R; letzteren führen wir mit Hülfe der Relationen:

$$(1) \quad . \; . \; . \quad a = 2R\sin A, \quad b = 2R\sin B, \quad c = 2B\sin C$$

statt der Seiten des Dreiecks ein, um möglichst einfache Ausdrücke zu erhalten.

Die Coordinaten der Scheitelpunkte der Winkel sind dann:

$$(A) \;\; 0, 0; \quad (B) \;\; 2R\sin C, 0;$$

$$(C) \quad 2R\cos A\sin B, \quad 2R\sin A\sin B.$$

Die Coordinaten des Punktes D, in dem die Seite c von dem anbeschriebenen Kreise berührt wird, sind:

$$4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\ 0.$$

Daraus ergiebt sich für die Ecktransversale CD die Gleichung:

$$(2)\ldots\eta\sin\frac{B-A}{2}=2\xi\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}-4R\sin B.\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Die Seite b werde von dem ihr anbeschriebenen Kreise im Punkte F berührt, die Coordinaten desselben sind:

$$4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos A,$$

$$4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin A.$$

Demnach ist die Gleichung der Ecktransversale BF:

$$(3)\ .\ .\ .\ .\ \eta=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin A.\sin\frac{B}{2}-\cos\frac{B}{2}}(\xi-2R\sin C).$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergeben sich als Coordinaten des fünften merkwürdigen Punktes:

$$(4)\ .\ .\ .\ \left\{\begin{aligned}\xi&=2R(\sin A-\sin B+\cos A\sin B),\\ \eta&=8R\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}.\end{aligned}\right.$$

Entfernungen des Punktes (ξ,η) von den übrigen merkwürdigen Punkten.

1) Die Entfernung des Punktes (ξ,η) von dem Schnittpunkte der Höhen.

Die Coordinaten des Schnittpunktes der Höhen sind:

$$x_1=2R\cos A\sin B,$$
$$y_1=2R\cos A\cos B;$$

daher die Entfernung der beiden Punkte von einander:

$$\{2R\cos A\sin B-2R(\sin A-\sin B+\cos A\sin B)\}^2$$
$$+\{2R\cos A\cos B-2R(1-\cos A-\cos B+\cos A\cos B)\}^2$$
$$=\varDelta_1^2,$$

oder:

$$(5) \ldots\ldots 4R^2\{1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\} = \Delta_{,}^2.$$

Die einfachste Gestalt nimmt dieser Ausdruck für das gleichseitige Dreieck an:

$$4R^2\{1-(2\sin\frac{A}{2})^3\} = \Delta_1^2.$$

2) Die Entfernung des Punktes (ξ, η) von dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises.

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind:

$$x_{,,} = R\sin(A+B),$$
$$y_{,,} = -R\cos(A+B);$$

demnach die Entfernung der beiden Punkte von einander:

$$(6) \ldots\ldots R^2\{(\sin(A-B)-2\sin A+2\sin B)^2 + (\sin A\sin B-3\cos A\cos B-2+2(\cos A+\cos B))^2\} = \Delta_{,,}^2.$$

Ist das Dreieck gleichschenklig, also $A=B$, so ist:

$$\Delta_{,,}^2 = R^2(1-2\cos A)^4.$$

Die beiden Punkte liegen in der Höhe, welche auf der Basis c steht.

3) Die Entfernung des Punktes (ξ, η) von dem Schwerpunkte des Dreiecks.

Die Coordinaten des Schwerpunktes sind:

$$x_{,,,} = \tfrac{2}{3}R(\sin A\cos B+2\cos A\sin B),$$
$$y_{,,,} = \tfrac{2}{3}R\sin A\sin B;$$

daher die Entfernung der beiden Punkte von einander:

$$(7) \ldots\ldots \tfrac{4}{9}R^2\{\sin(A-B)-3(\sin A-\sin B)\}^2 + \tfrac{4}{9}R^2\{3(\cos A+\cos B)-3-\cos(A+B)-2\cos A\cos B\}^2 = \Delta_{,,,}^2.$$

Ist das Dreieck gleichschenklig, also $A=B$, so ist:

$$\Delta_{,,,}^2 = 4R^2\{\tfrac{1}{3}\sin^2 A-(1-\cos A)^2\}^2.$$

Ist dagegen $A=90^0$, dann ergiebt sich:

$$\Delta_{III}^2 = \tfrac{4}{9} R^2 (28 - 24\cos B - 24\sin B + 12\sin B\cos B).$$

4) Die Entfernung des Punktes (ξ, η) von dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises.

Die Coordinaten des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises sind:

$$x_{IV} = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2},$$

$$y_{IV} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2};$$

demnach die Entfernung der beiden Punkte von einander:

$$(8) \ldots\ldots R^2\{\sin(A-B) - 3(\sin A - \sin B)\}^2$$
$$+ R^2\{3(\cos A + \cos B) - 3 - \cos(A+B) - 2\cos A\cos B\}^2$$
$$= \Delta_{IV}^2.$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) geht hervor:

$$(x_{III} - \xi) = \tfrac{2}{3}(x_{IV} - \xi)$$

und

$$(y_{III} - \eta) = \tfrac{2}{3}(y_{IV} - \eta).$$

Daraus ergiebt sich das bekannte Resultat:

Der fünfte merkwürdige Punkt, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises liegen in einer Geraden und zwar theilt der Schwerpunkt dieselbe im Verhältniss wie 2:1.

Geometrische Oerter des fünften merkwürdigen Punktes.

Wird die Gestalt des Dreiecks ABC nach einem bestimmten Gesetze geändert, so ändert sich zugleich auch die Lage des fünften merkwürdigen Punktes; er wird sich längs einer Curve fortbewegen. Das Folgende enthält eine Untersuchung einiger geometrischen Oerter dieses merkwürdigen Punktes, welche entstehen, wenn das Dreieck dadurch in fortwährende Bewegung gesetzt wird, dass man eins von den drei Stücken, welche die Congruenz der Dreiecke bedingen, als variable Grösse annimmt. Der Punkt A möge dabei immer im Anfangspunkte des Coordinatensystems liegen und die Seite c mit dem positiven Theile der Abscissenaxe zusammenfallen. Zur Bestimmung der Gleichungen der geometrischen Oerter werden die Relationen (1) und (4) ausreichend sein, wenn dabei berücksichtigt wird, dass

Die grössere Halbaxe ist demnach:

$$\frac{4R\sin^2\frac{B}{2}}{\sqrt{C''}},$$

die kleinere:

$$\frac{4R\sin^2\frac{B}{2}}{\sqrt{A''}}.$$

Einfacher gestaltet sich die obige Gleichung, wenn $B=90^0$ gesetzt wird:

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad 2\eta^2+2\xi\eta+\xi^2-4R\eta=0.$$

Die Coordinaten des Mittelpunkts sind dann:

$$u=-2R,$$
$$v=+2R;$$

daher die Mittelpunktsgleichung:

$$2y^2+2xy+x^2-4R^2=0.$$

Der Drehungswinkel φ ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}2\varphi=2,$$

und für die beiden Halbaxen ergeben sich die Werthe:

$$2R\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-4}} \text{ und } 2R\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}-2}}.$$

4) Es mögen die Seite a und der derselben anliegende Winkel B constant, die übrigen Grössen veränderlich sein. Eliminirt man aus den Relationen (1) und (4) die veränderlichen Grössen A und R, so ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes:

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad \eta=-\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\xi+a\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

Der merkwürdige Punkt bewegt sich demnach auf einer Geraden, welche den positiven Theil der x-Axe in der Entfernung a vom Nullpunkte schneidet und gegen dieselbe unter dem Winkel $180^0-\frac{B}{2}$ geneigt ist.

5) Die Seite a und der andere ihr anliegende Winkel C seien

constant, dann findet man die Gleichung des geometrischen Ortes durch Elimination von R, A und B aus den Gleichungen (1) und (4):

$$(14) \; . \; . \; . \; . \; . \quad \{\eta^2+(a-\xi)^2\}\{(a-\xi)\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\eta\}$$
$$=2a\eta\{a-\xi-\eta\operatorname{tg}\frac{C}{2}\}.$$

Einfacher gestaltet sich dieselbe, wenn wir die y-Axe um a nach rechts verschieben und dann das Coordinatensystem um den Winkel $\frac{C}{2}$ drehen, indem wir

$$\xi_1 = x\cos\frac{C}{2}-y\sin\frac{C}{2},$$

$$\eta = x\sin\frac{C}{2}+y\cos\frac{C}{2}$$

setzen; es ergiebt sich dann:

$$y^3+x^2y+2ax^2\sin\frac{C}{2}+2axy\cos\frac{C}{2}=0.$$

Wir wollen hier nur einen Specialfall näher in's Auge fassen; es möge $\angle C=90^0$ sein, dann ist $2a\sin\frac{C}{2}=2a\cos\frac{C}{2}=p$ und die Gleichung nimmt, wenn wir die Coordinaten vertauschen und nach y entwickeln, folgende Gestalt an:

$$(15) \; . \; . \; . \quad y=\frac{x}{2(x+p)}\{\pm\sqrt{p^2-4xp-4x^2}-p\}.$$

Die Wurzel besitzt nur dann reelle Werthe, wenn x zwischen den beiden Grenzen $+\frac{p}{2}(\sqrt{2}-1)$ und $-\frac{p}{2}(\sqrt{2}+1)$ liegt; die Curve (Fig. 2.) breitet sich daher zwischen den beiden Lothen, die in jenen Grenzpunkten auf der x-Axe errichtet sind, aus. Für jeden der beiden Grenzwerthe von x besitzt y nur einen reellen und zwar negativen Werth, für jeden Werth von x zwischen den beiden Grenzwerthen dagegen zwei verschiedene Werthe. Zwischen $x=0$ und $+\frac{p}{2}(\sqrt{2}-1)$ sind beide Werthe von y stets negativ, ebenso zwischen $x=-p$ und $-\frac{p}{2}(\sqrt{2}+1)$; zwischen $x=0$ und $-p$ dagegen ist die eine Ordinate positiv, die andere negativ. Ist $x=0$, so ist auch $y=0$, die Curve geht

demnach durch den Nullpunkt und zwar besitzt sie hier einen doppelten Punkt. Ist $x = -p$, so ist $y = \pm \infty$; beide Arme der Curve erstrecken sich hier in die Unendlichkeit.

Der erste Differentialquotient ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm (p^3 - 6p^2x - 10px^2 - 4x^3) - p^2\sqrt{p^2 - 4px - 4x^2}}{2(x+p)^2\sqrt{p^2 - 4px - 4x^2}}.$$

Für $x = 0$ wird $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$; der eine Theil der Curve besitzt demnach im Anfangspunkte des Coordinatensystems einen Culminationspunkt. Für $x = \pm \frac{p}{2}\sqrt{2} - \frac{p}{2}$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$; die Grenz-Ordinaten müssen demnach zugleich Tangenten der Curve sein. Da $\frac{dy}{dx}$ auch für $x = -p$ einen unendlich grossen Werth erhält, so muss das in diesem Punkte auf der x-Axe errichtete Loth Asymptote der Curve sein.

Aus den Vorzeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ folgt: Von den beiden Theilen, die rechts von der y-Axe liegen, kehrt der, welcher der x-Axe am nächsten ist, ihr die convexe Seite, der andere dagegen die concave Seite zu. Zwischen $x = 0$ und $x = -p$ kehren beide Theile der x-Axe die convexe Seite zu, zwischen $x = -p$ und $x = -\frac{p}{2}\sqrt{2} - \frac{p}{2}$ nur der Theil, welcher der x-Axe am nächsten liegt, der andere besitzt einen Beugungspunkt.

6) Constant seien die Seite b und der Winkel A. Eliminirt man aus (1) und (4) die veränderlichen Grössen R und B, so ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes:

(16)

$$\eta^2 \sin A - 4\eta\left(\xi + 2b\sin^2\frac{A}{2}\right)\sin^2\frac{A}{2} + 4b^2 \sin A \sin^4\frac{A}{2} = 0.$$

Der merkwürdige Punkt bewegt sich also auf einer Hyperbel fort. Die Coordinaten des Mittelpunktes sind:

$$u = -2b\sin^2\frac{A}{2},$$
$$v = 0;$$

d. h. der Mittelpunkt liegt auf der negativen Seite der x-Axe.

Durch Verschiebung des Coordinatensystems erhält man demnach die Mittelpunktsgleichung:

$$\eta^2 \sin A - 4\eta\xi \sin^2\frac{A}{2} + 4b^2 \sin A \sin^4\frac{A}{2} = 0.$$

Dreht man nun das neue Coordinatensystem um den $\angle \vartheta$, der durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = 2 \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

bestimmt ist, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$\frac{y^2}{l^2} - \frac{x^2}{m^2} = -1,$$

wo

$$l^2 = \frac{4b^2 \sin^4\frac{A}{2}}{\cos^2\vartheta + \sin 2\vartheta \operatorname{tg}\frac{A}{2}},$$

und

$$m^2 = \frac{4b^2 \sin^4\frac{A}{2}}{\sin 2\vartheta . \operatorname{tg}\frac{A}{2} - \sin^2\vartheta}$$

ist.

Auch wenn die Seite c und ein ihr anliegender Winkel constant, die übrigen Grössen dagegen veränderlich sind, bewegt sich der merkwürdige Punkt auf Kegelschnitten fort.

7) Wir wollen endlich annehmen, dass zwei Seiten constant, die dritte Seite und die Winkel dagegen veränderlich seien.

Die constanten Seiten seien a und b. Durch Elimination von R, A und B aus den Gleichungen (1) und (4) ergiebt sich die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$(17) \; . \; . \; . \; . \; . \quad \{\eta^2 + (a-\xi)^2\}^2 = \frac{4(a-\xi)a^2\eta^2}{2b-a+\xi}.$$

Die Gestalt dieser Curve ist bedingt durch das Verhältniss der beiden constanten Grössen a und b; wir haben daher drei Fälle zu berücksichtigen:

$$b > a, \quad a > b, \quad a = b.$$

α) Es sei $b > a$.

Wir wollen hier, um möglichst einfache Resultate zu erzielen, nur einen Specialfall näher in's Auge fassen, indem wir $b = 2a$ setzen. Die Gleichung heisst dann:

$$\{\eta^2 + (a-\xi)^2\}^2 = \frac{4(a-\xi)a^2\eta^2}{3a+\xi}.$$

Verschieben wir die y-Axe um a von rechts nach links und entwickeln wir dann die Gleichung des geometrischen Ortes nach η, so erhalten wir:

$$(18) \ldots \quad \eta = \pm\sqrt{\frac{2a-\xi}{2a+\xi}}\{a \pm \sqrt{\xi^2 - 3a^2}\}.$$

Für alle Werthe (Fig. 3.) von ξ zwischen $+\sqrt{3a^2}$ und $-\sqrt{3a^2}$, ebenso für $\xi > +2a$ und $\xi < -2a$ wird η imaginär. Die Curve besteht demnach aus zwei getrennten Theilen, von denen der eine zwischen $\xi = -2a$ und $-\sqrt{3a^2}$, der andere zwischen $\xi = +\sqrt{3a^2}$ und $+2a$ sich zu beiden Seiten der x-Axe ausbreitet. Für

$$\xi = -2a \quad \text{ist} \quad \eta = \begin{cases} \pm\infty \\ 0/0 = 0, \end{cases}$$

$$\xi = -\sqrt{3a^2} \quad „ \quad \eta = \pm a\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}},$$

$$\xi = +\sqrt{3a^2} \quad „ \quad \eta = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}},$$

$$\xi = +2a \quad „ \quad \eta = 0.$$

Für alle Werthe von ξ zwischen $-2a$ und $-\sqrt{3a^2}$, ferner zwischen $+\sqrt{3a^2}$ und $+2a$ ergeben sich immer vier reelle Werthe von η und zwar zwei positive und zwei negative. In $\xi = +2a$ besitzt die Curve einen vierfachen Punkt.

Der erste Differentialquotient ist:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm\left\{\frac{\mp 2a(\xi^2 - 3a^2) - 2a^2\sqrt{\xi^2 - 3a^2} \pm \xi(4a^2 - \xi^2)}{(2a+\xi)\sqrt{4a^2 - \xi^2}\sqrt{\xi^2 - 3a^2}}\right\}.$$

Setzt man $\xi = \pm\sqrt{3a^2}$, so wird $\frac{d\eta}{d\xi} = \infty$. Die diesen Abscisssen entsprechenden Ordinaten werden demnach zugleich Tangenten der Curve sein.

Für

$$\xi = \pm 2a$$

wird

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \begin{cases} \pm\infty \\ 0 \end{cases}.$$

In jedem dieser Punkte besitzt also die Curve zwei Tangenten, von denen die eine der y-Axe parallel läuft, die andere mit der x-Axe zusammenfällt. Die Culminationspunkte liegen demnach in der x-Axe, je zwei um $2a$ vom Nullpunkte entfernt. Das in $-2a$ auf der x-Axe errichtete Loth ist Asymptote der beiden Arme, die sich in die Unendlichkeit erstrecken.

Zwischen $\xi = +\sqrt{3a^2}$ und $\xi = +2a$ kehren die beiden Theile der Curve, welche der x-Axe am nächsten liegen, ihr die convexe Seite zu, die entfernteren Theile dagegen die concave Seite. Zwischen $\xi = -\sqrt{3a^2}$ und $\xi = -2a$ kehren die beiden näheren Theile ebenfalls der x-Axe die convexe Seite zu, die entfernteren Theile besitzen Beugungspunkte.

β) Es sei $a > b$.

Wir behandeln auch hier nur einen Specialfall eingehend; es sei $a = 2b$. Führen wir in die Gleichung (17) überall $2b$ statt a ein, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$\{\eta^2 + (2b-\xi)^2\}^2 = \frac{16\,(2b-\xi)\,b^2\eta^2}{\xi}.$$

Verschieben wir nun die y-Axe um b nach rechts und entwickeln dann die so erhaltene Gleichung nach η, so ergiebt sich:

$$(19) \ldots\ldots \eta = \pm\sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}}\{2b \pm \sqrt{\xi^2+3b^2}\}.$$

Für jeden Werth von ξ (Fig. 4.) zwischen $+b$ und $-b$ besitzt η vier reelle Werthe, von denen je zwei gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind. Ertheilt man ξ Werthe, die kleiner als $-b$, oder grösser als $+b$ sind, so wird η imaginär. Die Curve breitet sich demnach symmetrisch zur x-Axe zwischen den beiden in $+b$ und $-b$ auf derselben errichteten Lothen aus.

Für $\xi = +b$ ist $\eta = 0$,

$\xi = 0$ „ $\eta = \pm(2b \pm \sqrt{3b^2})$,

$\xi = -b$ „ $\eta = \begin{cases} \pm\infty \\ 0/0 = 0. \end{cases}$

Alle vier Arme der Curve gehen demnach von dem Punkte $(+b, 0)$ der x-Axe aus und durchschneiden die y-Axe in vier verschiedenen Punkten. Nur zwei von ihnen vereinigen sich dann wieder in der x-Axe $(-b, 0)$; die beiden Andern erstrecken sich in die Unendlichkeit.

Der erste Differentialquotient ist:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm \frac{-2b^2\sqrt{\xi^2+3b^2} \mp (b\xi^2+3b^3) \pm (\xi b^2-\xi^3)}{(b+\xi)\sqrt{b^2-\xi^2}\sqrt{\xi^2+3b^2}}.$$

Ist $\xi = +b$, so ist:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \begin{cases} \mp\infty \\ {}^0/_0 = 0 \end{cases}.$$

Zwei Arme der Curve haben demnach die x-Axe zur gemeinschaftlichen Tangente und besitzen hier zwei Culminationspunkte. Die Tangente der beiden andern Arme läuft der y-Axe parallel.

Für $\xi = 0$ ist

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \mp(2 \pm \sqrt{3});$$

daraus folgt, dass die beiden Theile über der x-Axe hier herabsteigen, die beiden unteren dagegen aufsteigen.

Für $\xi = -b$ ist

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \begin{cases} \mp\infty \\ {}^0/_0 = \infty \end{cases}.$$

Das auf der x-Axe in $(-b, 0)$ errichtete Loth berührt also die beiden Arme, die sich hier vereinigen und ist zugleich Asymptote der beiden Theile, die sich in die Unendlichkeit erstrecken.

Zwischen $\xi = -b$ und $\xi = 0$ kehren die beiden Arme, die der x-Axe am nächsten liegen, derselben die concave Seite zu, die beiden Entfernteren dagegen die convexe Seite.

Zwischen $\xi = 0$ und $\xi = +b$ besitzen alle vier Arme der Curve Beugungspunkte.

γ) Nehmen wir endlich an, es sei $a = b$, so geht die Gleichung (17) über in

$$\{\eta^2 + (a-\xi)^2\}^2 = \frac{4(a-\xi)a^2\eta^2}{a+\xi},$$

und nimmt, wenn wir sie nach η entwickeln, die Gestalt an:

$$(20) \ldots\ldots\ldots \eta = \pm \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}(a \pm \xi).$$

Berücksichtigen wir zunächst nur das positive Vorzeichen in der Klammer, so erhalten wir:

$$(21) \ldots\ldots\ldots \eta^2 + \xi^2 = a^2;$$

d. h. der eine Theil unserer Curve (Fig. 5.) ist ein Kreis, welcher mit dem Radius a um den Anfangspunkt des Coordinatensystems beschrieben ist.

Es bleibt nun noch übrig, den Theil des geometrischen Ortes näher zu betrachten, welcher durch die Gleichung:

$$(22) \ldots\ldots\ldots \eta = \pm \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}(a - \xi)$$

repräsentirt wird.

Ertheilt man ξ alle möglichen Werthe zwischen $-a$ und $+a$, so erhält man für η stets zwei Werthe, die gleich aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind. Wird $\xi > +a$ oder $< -a$ gesetzt, so ist η imaginär. Die Curve breitet sich demnach symmetrisch zur x-Axe zwischen den beiden auf derselben in $(+a, 0)$ und $(-a, 0)$ errichteten Lothen aus. Beide Arme der Curve gehen aus von dem Punkte $(a, 0)$, in dem der Kreis die x-Axe schneidet, treffen auch die y-Axe in denselben Punkten mit dem Kreise und erstrecken sich für $\xi = -a$ in die Unendlichkeit.

Die beiden ersten Differentialquotienten sind:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \mp \frac{\sqrt{a-\xi}(2a+\xi)}{(a+\xi)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \pm \frac{3a^2}{(a+\xi)^{\frac{5}{2}}(a-\xi)^{\frac{1}{2}}};$$

$\frac{d\eta}{d\xi}$ hat mit η immer entgegengesetzte Vorzeichen, der obere Theil der Curve steigt also herab, der untere auf. Für $\xi = +a$ ist $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, die Tangente beider Arme fällt hier mit der x-Axe zusammen. Wird $\xi = -a$, so ist $\frac{d\eta}{d\xi} = \mp \infty$; das Loth im Punkte $(-a, 0)$ auf der x-Axe errichtet ist demnach Asymptote beider Arme.

Da der zweite Differentialquotient stets gleiche Vorzeichen mit η besitzt, so muss jeder Theil der Curve der x-Axe die convexe Seite zukehren.



V.

Ueber die Auflösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ in ganzen Zahlen, wo A positiv und kein vollständiges Quadrat sein muss.

Von

dem Lehrer Herrn **P. Seeling**
in Hückeswagen.

Wenn man $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch verwandelt, so bilden die Kettenbruchsnenner symmetrische Perioden von der Form:

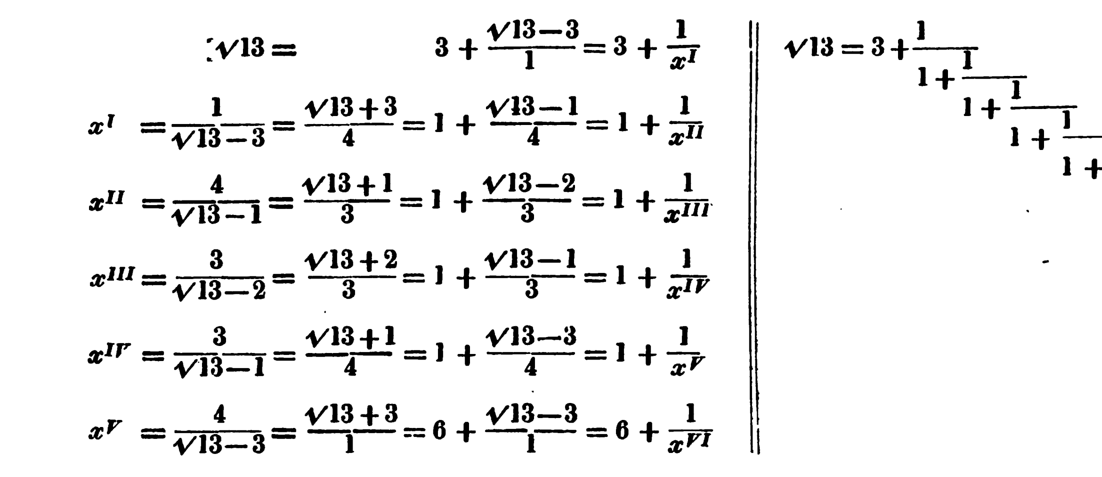
$$(n);\ a,\ b,\ c,\ldots,\ c,\ b,\ a,\ 2n;\ a,\ b,\ c,\ldots,\ c,\ b,\ a,\ 2n;\ \text{u. s. w.},$$

wo n die grösste in $\sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Entwickelt man nun die Näherungswerthe von $\sqrt{A}$, so geben Zähler und Nenner derjenigen Näherungswerthe, zu welchen der Quotient $2n$ gehört (d. h.: welche durch Multiplication mit dem diesem Quotienten vorhergehenden Quotienten a entstanden sind), die Werthe für x und y in obiger Gleichung. Ist die Anzahl der Quotienten einer Periode gerade, so ist auch die Anzahl der Quotienten von 2, 3, 4, 5, u. s. w. Perioden gerade. Dann ist immer $x^2 - Ay^2 = +1$. Ist hingegen die Anzahl der Quotienten einer Periode ungerade, so ist die Anzahl der Quotienten von 2, 4, 6, 8, u. s. w. Perioden gerade, von 3, 5, 7, 9, u. s. w. Perioden aber ungerade. Dann ist $x^2 - Ay^2$ abwechselnd $= -1$ oder $= +1$, und zwar $= -1$ am Schlusse der 1., 3., 5., 7., u. s. w. Periode, und $= +1$ am Schlusse der 2., 4., 6., 8., u. s. w. Periode.

Demnach wird die Gleichung $x^2 - Ay^2 = +1$ durch jeden irrationalen Werth von A lösbar, die Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ aber nur durch diejenigen Werthe für A, deren Quadratwurzeln, in Kettenbrüchen dargestellt, Perioden von ungerader Stellenzahl geben. (Egen's Handbuch I., §§. 296. und 297.).

Beispiele.



$$\sqrt{13} = 3 + \frac{\sqrt{13}-3}{1} = 3 + \frac{1}{x^{I}}$$

$$x^{I} = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} = 1 + \frac{\sqrt{13}-1}{4} = 1 + \frac{1}{x^{II}}$$

$$x^{II} = \frac{4}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3} = 1 + \frac{\sqrt{13}-2}{3} = 1 + \frac{1}{x^{III}}$$

$$x^{III} = \frac{3}{\sqrt{13}-2} = \frac{\sqrt{13}+2}{3} = 1 + \frac{\sqrt{13}-1}{3} = 1 + \frac{1}{x^{IV}}$$

$$x^{IV} = \frac{3}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{4} = 1 + \frac{\sqrt{13}-3}{4} = 1 + \frac{1}{x^{V}}$$

$$x^{V} = \frac{4}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{1} = 6 + \frac{\sqrt{13}-3}{1} = 6 + \frac{1}{x^{VI}}$$

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \text{u. s. w.}}}}}}$$

Näherungswerthe.

3	1	1	1	1	6	1	1	1	1	6	1	1	1	1	6
1	3	4	7	11	18	119	137	256	393	649	4287	4936	9223	14159	23382
0	1	1	2	3	5	33	38	71	109	180	1189	1369	2558	3927	6485
					−					+					−

$18^2 - 13.5^2 = -1$ $649^2 - 13.180^2 = +1$ $23382^2 - 13.6485^2 = -1.$

$$\sqrt{14} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \text{u. s. w.}}}}}$$

3	1	2	1	6	1	2	1	6	1	2	1	6
1	3	4	11	15	101	116	333	449	3027	3476	9979	13455
0	1	1	3	4	27	31	89	120	809	929	2667	3596
				+				+				+

$15^2 - 14.4^2 = +1$ $449^2 - 14.120^2 = +1$ $13455^2 - 14.3596^2 = +1.$

$$\sqrt{26} = 5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{10 + \text{u. s. w.}}}}$$

5	10	10	10	10	10	10
1	5	51	515	5201	52525	530451
0	1	10	101	1020	10301	104030
	−	+	−	+	−	+

$5^2 - 26.1^2 = -1$ $\quad 51^2 - 26.10^2 = +1$ $\quad 515^2 - 26.101^2 = -1$ $\quad 5201^2 - 26.1020^2 = +1$

$52525^2 - 26.10301^2 = -1$ $\quad 530451^2 - 26.104030^2 = +1.$

Um die gegebene Gleichung zu lösen, muss man jedenfalls aus A wirklich die Quadratwurzel ziehen, wie oben aus 13.

Was aber speciell die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = -1$$

betrifft, so ist es, um vergeblicher Versuche überhoben zu sein, wünschenswerth, im Voraus wissen zu können, ob $\sqrt{A}$ eine Periode von gerader oder von ungerader Stellenzahl ergibt.

Soll $\sqrt{A}$ eine Periode von ungerader Stellenzahl ergeben, so muss A folgende Eigenschaften haben:

I. A muss entweder von der Form $4m+1$ oder von der Form $4m+2$ sein. Dies ergiebt sich von selbst aus der obigen Gleichung. Schreiben wir dieselbe also:

$$x^2 + 1 = Ay^2.$$

Ist nun x gerade, so ist x^2+1, also auch Ay^2, von der Form $4m+1$, demnach sowohl A wie y^2 ungerade, folglich

y^2, und schliesslich auch A, von der Form $4m+1$. Ist aber x ungerade, so hat x^2+1, also auch Ay^2, die Form $4m+2$, was nur dann möglich ist, wenn A ebenfalls von der Form $4m+2$ ist.

II. A darf durch keine Zahl von der Form $4m+3$ theilbar sein.

Denn hätte A einen solchen Faktor, so müsste, da $x^2+1=Ay^2$, auch x^2+1 durch denselben theilbar sein, welches unmöglich ist, da keine Quadratzahl, durch irgend eine Zahl von der Form $4m+3$ dividirt, -1 zum Rest lässt. (Schwarz, Elemente der Zahlen-Theorie, S. 234.).

Diese beiden Bedingungen werden aber nur erfüllt durch:

a. die Primzahlen von der Form $4m+1$,
b. die Produkte aus zweien oder mehreren solcher Primzahlen,
c. die Doppelten der Zahlen unter a. und b.

a.

Ist A eine Primzahl von der Form $4m+1$, so ergibt $\sqrt{A}$, in einem Kettenbruche dargestellt, eine Periode von ungerader Stellenzahl.

Beweis.

Bezeichnet man drei aufeinander folgende Näherungswerthe irgend eines Kettenbruchs mit $\frac{p^0}{q^0}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, so ist bekanntlich

$$pq^0-p^0q=\pm 1.$$

(Egen, §. 269.). Demnach können nicht zugleich p^0 und p gerade sein, und eben so wenig q^0 und q, oder p^0 und q^0, oder p und q. Auch können nicht diese vier Grössen p^0, p, q^0, q alle zugleich ungerade sein.

Bezeichnet man ferner bei der Entwickelung von $\sqrt{A}$ die zu $\frac{p^0}{q^0}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ gehörenden vollständigen Quotienten mit

$$\frac{\sqrt{A}+J^0}{D^0},\quad \frac{\sqrt{A}+J}{D},\quad \frac{\sqrt{A}+J'}{D'},$$

und die in denselben enthaltenen grössten ganzen Zahlen mit m^0, m, m', so ist (Egen, §. 291.)

$$D=\frac{p^2-Aq^2}{pq^0-p^0q},$$

oder, da der Nenner dieses Bruches $=\pm 1$, auch $D=\pm(p^2-Aq^2)$, und also $D^0=\mp(p^{0\,2}-Aq^{0\,2}.)$.

Ist nun A gerade und auch p^0 gerade, so ist D^0 ebenfalls gerade. Dann ist aber p ungerade, und D ebenfalls ungerade.

Ist A ungerade und p^0, so wie auch q^0, ebenfalls ungerade, so ist D^0 gerade. Dann ist aber entweder p gerade und q ungerade, oder p ungerade und q gerade. In beiden Fällen ist D ungerade.

Folglich können nicht zwei aufeinander folgende D gerade sein.

Da die bei Entwickelung von $\sqrt{A}$ entstehenden Perioden, das letzte Glied abgerechnet, symmetrisch sind, so haben die geradstelligen Perioden Ein Mittelglied, die ungeradstelligen zwei gleiche.

Bei genauer Betrachtung dieser Entwickelung findet man Folgendes.

Wenn bei einer geradstelligen Periode der vollständige Quotient $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$ das Mittelglied m ergibt, so ist $J=J'$, und wenn bei einer ungeradstelligen Periode die Quotienten $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$ und $\frac{\sqrt{A}+J'}{D'}$ die beiden einander gleichen Mittelglieder m und m' ergeben, so ist nicht $J=J'$, aber wohl $D=D'$.

Es sei nun A eine ungerade Primzahl.

Soll die Periode von $\sqrt{A}$ geradstellig sein, so muss, da $mD=J+J'$ (Egen, §. 290.), und in diesem Falle $J=J'$, auch $mD=2J=2J'$, also $\frac{2J}{D}$ oder $\frac{2J'}{D}$ eine ganze Zahl sein. Dann ist D entweder erstens $=2$ oder eine Potenz von 2, oder zweitens eine ungerade Zahl, oder drittens ein Produkt aus 2 oder einer Potenz von 2 und einer Ungeraden. Im zweiten und dritten Falle hätten also J und D einen gemeinschaftlichen ungeraden Faktor. Da aber (Egen, §. 290.)

$$A-J'^2=A-J^2=DD',$$

folglich

$$A=J^2+DD',$$

so müsste dieses ungerade D auch ein Faktor von A sein, welches unmöglich ist, da A eine Primzahl, und $D=1$ nur am Ende einer Periode vorkommen kann.

Soll also die Periode geradstellig sein, so muss $D = 2$ oder eine Potenz von 2 sein. Dann ist aber $J (= J')$ ungerade; folglich kann, da $\frac{2J}{D}$ eine ganze Zahl ist, D nicht eine höhere Potenz von 2 sein. Also ist $D = 2$.

Ist nun A von der Form $4m + 3$, so ist

$$A - J'^2 = A - J^2 = DD'$$

von der Form $4m + 2$, also D' ungerade. Sollte aber A von der Form $4m + 1$ sein, so müsste

$$A - J'^2 = A - J^2 = DD'$$

von der Form $4m$, also D' gerade sein. Dann müssten also zwei aufeinander folgende D gerade sein, welches, wie oben bewiesen, unmöglich ist.

Ist folglich A eine Primzahl von der Form $4m + 1$, so kann $\sqrt{A}$ keine Periode von gerader Stellenzahl ergeben, sondern die Periode muss ungeradstellig sein. Q. e. d.

Zusatz. Da, wie oben bemerkt, bei ungeradstelligen Perioden nicht $J = J'$, aber wohl $D = D'$ ist, so geht für diesen Fall die obige Gleichung

$$A - J'^2 = DD'$$

in die folgende über:

$$A - J'^2 = D'^2,$$

und hieraus folgt:

$$A = J'^2 + D'^2.$$

Folglich ist jede Primzahl von der Form $4m + 1$ in zwei quadratische Summanden zerlegbar.

---

b. und c.

Unter den zu b. und c. gehörigen Zahlen gibt es, auch abgesehen von den unter b. vorkommenden Quadratzahlen, viele Ausnahmen, d. h. solche Zahlen, deren Quadratwurzeln Perioden von gerader Stellenzahl ergeben.

Bei vielen Zahlen kann man freilich auch ohne Extrahirung erkennen, wie viele Stellen die Periode enthält.

So ergeben z. B. die Zahlen von der Form n^2+1 einstellige (z. B. 10, 65), die ungeraden Zahlen von der Form n^2+4 fünfstellige Perioden (85).

Dagegen ergeben die Zahlen von der Form $n^2+\frac{2n}{a}$ (ausgenommen, wenn $a=2n$) zweistellige (146, 410), die Zahlen von der Form $m^2-\frac{2m}{q}$, wenn $2 < q < 2m$, vierstellige Perioden (34,890).

Die Zahlen von den Formen

$$n^2+n+\frac{n+2}{3}$$

und

$$n^2+\frac{2n+1}{3}\left(=n^2+n-\frac{n-1}{3}\right)$$

ergeben, wenn n von der Form $3r+1$ ist, sechsstellige Perioden (514; 178.). Auch die ungeraden Zahlen von der Form m^2-4 ergeben sechsstellige Perioden (221.). U. s. w. (Siehe meine Aufsätze im „Archiv der Mathematik und Physik" Theil XLIX., S. 4—44, und Theil L., S. 232—237.).

Aus den meisten der zu b. und c. gehörigen Zahlen muss man aber, um die Stellenzahl der Periode zu erfahren, wirklich die Quadratwurzel extrahiren.

Es folgen nun die sämmtlichen Zahlen bis 7000, deren Quadratwurzeln Perioden von ungerader Stellenzahl ergeben. Alle diese Werthe machen also, für A eingesetzt, die Gleichung

$$x^2-Ay^2=-1$$

auflösbar.

2	298	653	1009	1325	1709	2017	2389	2777	3001	3373	3769
5	313	661	1010	1354	1714	2026	2393	2785	3026	3385	3770
10	314	673	1013	1361	1721	2029	2402	2789	3029	3386	3785
13	317	677	1018	1370	1730	2042	2405	2797	3037	3389	3793
17	325	685	1021	1373	1733	2050	2417	2801	3041	3413	3797
26	337	697	1025	1378	1741	2053	2425	2810	3049	3418	3809
29	338	698	1033	1381	1745	2069	2426	2813	3050	3425	3821
37	346	701	1037	1385	1753	2074	2437	2825	3061	3433	3833
41	349	709	1042	1402	1754	2081	2441	2833	3065	3434	3845
50	353	730	1049	1409	1765	2089	2458	2834	3074	3445	3853
53	362	733	1061	1417	1769	2113	2465	2837	3077	3449	3865
58	365	746	1066	1418	1777	2117	2473	2857	3085	3457	3866
61	370	754	1069	1429	1781	2122	2474	2858	3089	3461	3869
65	373	757	1073	1433	1789	2125	2477	2861	3098	3466	3874
73	389	761	1082	1445	1801	2129	2482	2873	3109	3469	3877
74	394	769	1090	1450	1810	2137	2501	2885	3121	3482	3881
82	397	773	1093	1453	1825	2138	2509	2890	3125	3485	3889
85	401	778	1097	1465	1850	2141	2521	2897	3130	3490	3890
89	409	785	1105	1466	1853	2146	2522	2906	3133	3517	3898
97	421	794	1109	1481	1861	2153	2545	2909	3137	3529	3917
101	425	797	1114	1489	1865	2161	2549	2917	3145	3530	3922
106	433	809	1117	1490	1873	2165	2554	2929	3161	3533	3925
109	442	818	1129	1493	1877	2173	2557	2930	3169	3538	3929
113	445	821	1130	1514	1882	2186	2561	2941	3170	3541	3946
122	449	829	1138	1522	1889	2197	2570	2953	3181	3545	3961
125	457	842	1145	1525	1898	2210	2581	2957	3194	3554	3970
130	458	845	1153	1546	1901	2213	2593	2965	3202	3557	3973
137	461	853	1157	1549	1906	2218	2602	2969	3209	3562	3977
145	481	857	1165	1553	1913	2221	2605	2977	3217	3578	3985
149	485	865	1181	1565	1921	2234	2609	2986	3221	3581	3986
157	493	877	1189	1570	1930	2237	2617		3226	3589	3989
170	509	881	1193	1585	1933	2249	2621		3229	3593	3994
173	521	901	1201	1586	1937	2257	2626		3233	3601	
181	530	914	1213	1594	1949	2258	2633		3242	3613	
185	533	922	1217	1597	1970	2269	2642		3250	3617	
193	538	925	1226	1601	1973	2273	2657		3253	3625	
197	541	929	1229	1609	1985	2281	2665		3257	3637	
202	554	937	1237	1613	1993	2285	2677		3265	3649	
218	557	941	1241	1618	1994	2290	2689		3274	3653	
226	565	949	1249	1621	1997	2293	2690		3277	3665	
229	569	953	1250	1625		2297	2693		3281	3673	
233	577	962	1258	1637		2305	2705		3293	3677	
241	586	965	1261	1642		2309	2713		3301	3697	
250	593	970	1277	1649		2314	2725		3313	3701	
257	601	977	1285	1657		2330	2729		3314	3706	
265	610	985	1289	1658		2333	2738		3329	3709	
269	613	986	1297	1669		2341	2741		3338	3722	
274	617	997	1301	1682		2357	2746		3341	3725	
277	626		1306	1685		2362	2749		3349	3730	
281	629		1313	1693		2377	2753		3361	3733	
290	634		1321	1697		2378	2762		3365	3754	
293	641		1322	1706		2381	2770		3370	3761	

4001	4357	4714	5009	5386	5717	6002	6337	6673
4013	4373	4717	5018	5389	5722	6010	6353	6682
4021	4385	4721	5021	5393	5729	6025	6361	6689
4033	4394	4729	5042	5410	5737	6029	6362	6698
4045	4397	4733	5045	5413	5741	6037	6373	6701
4049	4409	4745	5050	5417	5749	6053	6385	6709
4057	4421	4754	5065	5426	5765	6065	6389	6725
4058	4426	4762	5077	5429	5770	6073	6397	6730
4073	4441	4765	5081	5437	5777	6074	6401	6733
4082	4442	4777	5090	5441	5785	6085	6409	6737
4093	4457	4778	5098	5449	5801	6089	6418	6746
4097	4469	4789	5101	5450	5813	6101	6421	6749
4106	4474	4793	5113	5458	5818	6109	6425	6757
4121	4481	4801	5114	5465	5821	6113	6437	6761
4129	4490	4813	5122	5473	5825	6121	6442	6770
4133	4493	4817	5153	5477	5834	6122	6445	6778
4138	4498	4825	5161	5482	5837	6130	6449	6781
4141	4505	4861	5162	5485	5849	6133	6458	6793
4153	4513	4874	5165	5498	5857	6145	6466	6817
4157	4514	4877	5185	5501	5858	6154	6469	6826
4177	4517	4885	5189	5521	5861	6161	6473	6829
4181	4537	4889	5197	5545	5869	6170	6481	6833
4201	4538	4901	5209	5554	5881	6173	6485	6841
4210	4549	4909	5210	5557	5882	6178	6506	6845
4217	4553	4913	5213	5569	5897	6185	6521	6850
4226	4561	4925	5233	5570	5906	6197	6529	6857
4229	4570	4933	5234	5573	5914	6205	6530	6865
4234	4573	4937	5237	5578	5930	6217	6553	6866
4241	4586	4954	5242	5581	5933	6218	6554	6869
4250	4589	4957	5245	5585	5941	6221	6562	6890
4253	4594	4969	5261	5594	5953	6229	6565	6893
4261	4597	4973	5266	5597	5954	6242	6569	6917
4265	4610	4985	5273	5617	5965	6245	6577	6922
4273	4618	4993	5281	5618	5981	6250	6581	6925
4274	4621		5297	5626	5993	6253	6586	6929
4282	4625		5305	5629		6257	6602	6938
4285	4637		5309	5641		6266	6610	6949
4289	4649		5317	5653		6269	6617	6953
4297	4657		5321	5657		6274	6625	6961
4306	4666		5330	5669		6277	6626	6970
4325	4673		5333	5674		6301	6637	6977
4330	4682		5353	5689		6305	6641	6989
4337	4685		5354	5693		6317	6649	6994
4346	4706		5365	5701		6322	6653	6997
4349	4709		5381	5713		6329	6661	

VI.

Aufgabe.

Von

Herrn *P. Nippert*,
Studirendem der Technik in Berlin.

Legt man um ein regelmässiges Dreieck einen Kreis von beliebigem Radius concentrisch mit dem umschriebenen Kreise des Dreiecks, und verbindet man einen beliebigen Punkt auf der Peripherie des ersteren mit den Ecken des Dreiecks, so ist zu beweisen, dass die Summe der Quadrate dieser Verbindungslinien constant ist für jede Lage jenes Punktes *).

Beweis.

Seien A, B, C die Ecken, r der Radius des umschriebenen, R der Radius des mit demselben concentrischen Kreises, P ein auf der Peripherie des letzteren beliebig angenommener Punkt, der so liegen mag, dass seine Verbindungslinie mit dem Centrum O zwischen A und B durchgeht, ferner seien AO, BO, CO, PA, PB, PC gezogen und der Winkel POA mit α bezeichnet, so ist:

$$1) \ldots \quad PA^2 = R^2+r^2-2Rr\cos\alpha,$$

$$2) \ldots \quad PB^2 = R^2+r^2-2Rr\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right),$$

$$3) \ldots \quad PC^2 = R^2+r^2-2Rr\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\alpha\right)$$

$$= R^2+r^2-2Rr\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$$

$$3a) \ldots\ldots = R^2+r^2-2Rr\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right).$$

---

*) M. s. Thl. L. S. 115. G.

Weil aber

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha$$

ist, und

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\tfrac{1}{2},$$

so erhält man durch Addition der Gleichungen 1), 2), 3a):

$$\begin{aligned}PA^2+PB^2+PC^2&=3(R^2+r^2)-2Rr(\cos\alpha-\cos\alpha)\\&=3(R^2+r^2).\end{aligned}$$

Da nun über den Punkt P nur die Voraussetzung gemacht worden, dass PO zwischen A und B durchgeht, die Bezeichnung der Ecken aber rein zufällig ist, so kann P jede Lage auf dem Kreise annehmen; folglich gilt die gefundene Gleichung für jede Lage des Punktes P, und es ist somit die Summe $PA^2+PB^2+PC^2$ constant.

Dieser für das reguläre Dreieck bewiesene Satz gilt aber überhaupt für jedes reguläre Polygon.

B e w e i s.

Seien A_1, A_2, $A_3 \ldots A_{n-1}$, A_n die Ecken, r der Radius des umschriebenen Kreises eines regulären Polygons, R der Radius eines mit jenem concentrischen Kreises, O der Mittelpunkt beider, P ein beliebiger Punkt auf der Peripherie des letzteren, der so gewählt sein mag, dass PO zwischen A_1 und A_2 durchgeht, und endlich α der Winkel, welchen A_1O und PO bilden, so ist, wenn man A_1, $A_2 \ldots A_n$ mit O und P verbindet:

$$PA_1^2=R^2+r^2-2Rr\cos\alpha,$$

$$PA_2^2=R^2+r^2-2Rr\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha\right),$$

$$PA_3^2=R^2+r^2-2Rr\cos\left(\frac{4\pi}{n}-\alpha\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$PA_n^2=R^2+r^2-2Rr\cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}-\alpha\right).$$

Folglich ist:

$$\Sigma PA^2=n(R^2+r^2)-2Rr\left[\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha\right)+\ldots+\cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}-\alpha\right)\right].$$

In dieser Formel ist nur die Summe der Cosinus zu berechnen.

Wir unterscheiden, ob n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Ist n eine gerade Zahl, etwa gleich $2k$, so ist in jener Summe

das 1te Glied $\cos\alpha$,

„ 2„ „ $\cos\left(\frac{\pi}{k}-\alpha\right)$,

„ 3„ „ $\cos\left(\frac{2\pi}{k}-\alpha\right)$,

. . . .

„ $(k-2)$„ „ $\cos\left(\frac{k-3}{k}\pi-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{3\pi}{k}+\alpha\right)$,

„ $(k-1)$„ „ $\cos\left(\frac{k-2}{k}\pi-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{k}+\alpha\right)$,

„ k„ „ $\cos\left(\frac{k-1}{k}\pi-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{k}+\alpha\right)$,

„ $(k+1)$„ „ $\cos\left(\frac{k}{k}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$,

„ $(k+2)$„ „ $\cos\left(\frac{k+1}{k}\pi-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{k}-\alpha\right)$,

„ $(k+3)$„ „ $\cos\left(\frac{k+2}{k}\pi-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{k}-\alpha\right)$,

. . . .

„ $(2k-2)$„ „ $\cos\left(\frac{2k-3}{k}\pi-\alpha\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{k}+\alpha\right)$,

„ $(2k-1)$„ „ $\cos\left(\frac{2k-2}{k}\pi-\alpha\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{k}+\alpha\right)$,

„ $2k$„ „ $\cos\left(\frac{2k-1}{k}\pi-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{k}+\alpha\right)$.

Man sieht hieraus, dass immer die Cosinus derjenigen zwei Winkel, welche sich um π unterscheiden, entgegengesetzt sind, dass also die ganze Summe Null ist. Folglich ist:

$$\Sigma PA^2 = n(R^2+r^2),$$

d. h. eine constante Grösse.

Ist n eine ungerade Zahl, etwa gleich $2k+1$, also

$$k=\frac{n-1}{2} \text{ und } k+2=n-k+1,$$

so ist in jener Summe:

das 1te Glied $\cos\alpha$,

„ 2„ „ $\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha\right)$,

„ 3„ „ $\cos\left(\frac{4\pi}{n}-\alpha\right)$,

. . . .

„ $(k-1)^{te}$ „ $\cos\left(\frac{2(k-2)}{n}\pi-\alpha\right)$,

„ k „ „ $\cos\left(\frac{2(k-1)}{n}\pi-\alpha\right)$,

„ $(k+1)$„ „ $\cos\left(\frac{2k}{n}\pi-\alpha\right)$,

„ $(k+2)$ oder $(n-k+1)^{te}$ Glied $\cos\left(\frac{2(n-k)}{n}\pi-\alpha\right)=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+\alpha\right)$,

„ $(n-k+2)^{te}$ Glied $\cos\left(\frac{2(n-k+1)}{n}\pi-\alpha\right)=\cos\left(\frac{2(k-1)}{n}\pi+\alpha\right)$,

„ $(n-k+3)$„ „ $\cos\left(\frac{2(n-k+2)}{n}\pi-\alpha\right)=\cos\left(\frac{2(k-2)}{n}\pi+\alpha\right)$,

. . . .

„ $(n-1)$ „ „ $\cos\left(\frac{2(n-2)}{n}\pi-\alpha\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)$,

„ n „ „ $\cos\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi-\alpha\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)$.

Addirt man das 2te und n^{te}, das 3te und $(n-1)^{te}$, u. s. f., kurz, immer diejenigen zwei Glieder, deren Stellenzahlen die Summe $n+2$ haben, und bezeichnet die ganze Summe mit S, so ist:

$$S=\cos\alpha+2\cos\frac{2\pi}{n}\cos\alpha+2\cos\frac{4\pi}{n}\cos\alpha+\dots$$

$$\dots+2\cos\frac{2(k-2)}{n}\pi\cos\alpha+2\cos\frac{2(k-1)}{n}\pi\cos\alpha+2\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\alpha,$$

oder, indem man $k = \frac{n-1}{2}$ setzt:

$$S = \cos\alpha\left[1 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \ldots\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots. + \cos\frac{n-5}{n}\pi + \cos\frac{n-3}{n}\pi + \cos\frac{n-1}{n}\pi\right)\right].$$

Setzt man:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \ldots\ldots$$
$$\ldots. + \cos\frac{n-5}{n}\pi + \cos\frac{n-3}{n}\pi + \cos\frac{n-1}{n}\pi = s,$$

so ist auch:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{6\pi}{n}\right) + \ldots\ldots$$
$$\ldots. + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n-5}{n}\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n-3}{n}\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n-1}{n}\pi\right) = s,$$

oder:

$$\sin\frac{n-4}{2n}\pi + \sin\frac{n-8}{2n}\pi + \sin\frac{n-12}{2n}\pi + \ldots\ldots$$
$$\ldots. + \sin\frac{10-n}{2n}\pi + \sin\frac{6-n}{2n}\pi + \sin\frac{2-n}{2n}\pi = s.$$

Folglich ist auch:

$$2s.\sin\frac{2\pi}{n} = 2\sin\frac{4\pi}{2n}\cdot\sin\frac{n-4}{2n}\pi + 2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{n-8}{2n}\pi$$
$$+ 2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{n-12}{2n}\pi + \ldots.$$
$$+ 2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{10-n}{2n}\pi + 2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{6-n}{2n}\pi$$
$$+ 2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{2-n}{2n}\pi.$$

Es ist aber:

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{n-4}{2n}\pi = \cos\frac{n-8}{2n}\pi - \cos\frac{\pi}{2},$$

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{n-8}{2n}\pi = \cos\frac{n-12}{2n}\pi - \cos\frac{n-4}{2n}\pi,$$

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{n-12}{2n}\pi = \cos\frac{n-16}{2n}\pi - \cos\frac{n-8}{2n}\pi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{10-n}{2n}\pi = \cos\frac{6-n}{2n}\pi - \cos\frac{14-n}{2n}\pi,$$

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{6-n}{2n}\pi = \cos\frac{2-n}{2n}\pi - \cos\frac{10-n}{2n}\pi,$$

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{2-n}{2n}\pi = \cos\frac{2+n}{2n}\pi - \cos\frac{6-n}{2n}\pi;$$

folglich die Summe:

$$\begin{aligned} 2s\sin\frac{2\pi}{n} &= \cos\frac{2-n}{2n}\pi + \cos\frac{2+n}{2n}\pi - \cos\frac{n-4}{2n}\pi \\ &= 2\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= -\sin\frac{2\pi}{n}; \end{aligned}$$

also:

$$s = -\tfrac{1}{2}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Formel für S, so hat man:

$$S = \cos\alpha[1+2.(-\tfrac{1}{2})] = 0.$$

Mithin wird auch für diesen Fall in der Formel

$$\Sigma PA^2 = n(R^2+r^2) - 2Rr(\cos\alpha + \ldots)$$

das letzte Glied Null, und es ist also für jedes regelmässige n-Eck:

$$\Sigma PA^2 = n(R^2+r^2).$$

oder, indem man $k = \frac{n-1}{2}$ setzt:

$$S = \cos\alpha [1 + 2 (\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \cos\frac{n-5}{n}\pi + \cos\frac{n-3}{n}\pi + \cos\frac{n-1}{n}\pi)].$$

Setzt man:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \cos\frac{n-5}{n}\pi + \cos\frac{n-3}{n}\pi + \cos\frac{n-1}{n}\pi = s,$$

so ist auch:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{6\pi}{n}\right) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n-5}{n}\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n-3}{n}\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n-1}{n}\pi\right) = s,$$

oder:

$$\sin\frac{n-4}{2n}\pi + \sin\frac{n-8}{2n}\pi + \sin\frac{n-12}{2n}\pi + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \sin\frac{10-n}{2n}\pi + \sin\frac{6-n}{2n}\pi + \sin\frac{2-n}{2n}\pi = s.$$

Folglich ist auch:

$$2s.\sin\frac{2\pi}{n} = 2\sin\frac{4\pi}{2n}\cdot\sin\frac{n-4}{2n}\pi + 2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{n-8}{2n}\pi$$
$$+ 2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{n-12}{2n}\pi + \ldots\ldots$$
$$+ 2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{10-n}{2n}\pi + 2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{6-n}{2n}\pi$$
$$+ 2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{2-n}{2n}\pi.$$

Es ist aber:

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{n-4}{2n}\pi=\cos\frac{n-8}{2n}\pi-\cos\frac{\pi}{2},$$

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{n-8}{2n}\pi=\cos\frac{n-12}{2n}\pi-\cos\frac{n-4}{2n}\pi,$$

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{n-12}{2n}\pi=\cos\frac{n-16}{2n}\pi-\cos\frac{n-8}{2n}\pi,$$

. . . .

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{10-n}{2n}\pi=\cos\frac{6-n}{2n}\pi-\cos\frac{14-n}{2n}\pi,$$

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{6-n}{2n}\pi=\cos\frac{2-n}{2n}\pi-\cos\frac{10-n}{2n}\pi,$$

$$2\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{2-n}{2n}\pi=\cos\frac{2+n}{2n}\pi-\cos\frac{6-n}{2n}\pi;$$

folglich die Summe:

$$\begin{aligned}2s\sin\frac{2\pi}{n}&=\cos\frac{2-n}{2n}\pi+\cos\frac{2+n}{2n}\pi-\cos\frac{n-4}{2n}\pi\\&=2\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)\\&=-\sin\frac{2\pi}{n};\end{aligned}$$

also:

$$s=-\tfrac{1}{2}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Formel für S, so hat man:

$$S=\cos\alpha[1+2.(-\tfrac{1}{2})]=0.$$

Mithin wird auch für diesen Fall in der Formel

$$\Sigma PA^2=n(R^2+r^2)-2Rr(\cos\alpha+\ldots)$$

das letzte Glied Null, und es ist also für jedes regelmässige n-Eck:

$$\Sigma PA^2=n(R^2+r^2).$$

VII.

Ueber Fusspunktcurven.

Von

Herrn *Carl Albrich,*
Professor und scientifischem Leiter der Realschule in Herrmannstadt in Siebenbürgen.

Zieht man von einem gegebenen Punkt (dem Pol) auf die Tangenten einer Curve Senkrechte, so nennt man den geometrischen Ort der Fusspunkte bekanntlich die Fusspunktlinie der Basis in Bezug auf den gegebenen Pol. Wählt man zur Basis einen Kegelschnitt und zieht die Linien unter dem beliebigen Winkel α, so findet man als den geometrischen Ort der Durchschnittspunkte dieser Linien mit den Tangenten ebenfalls eine Fusspunktlinie, deren Basis ein Kegelschnitt derselben Art ist, dessen Axen aber in Bezug auf die des gegebenen eine andere Lage und Grösse haben. Des einfacheren Ausdrucks wegen werde in Folgendem unter $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Fusspunktlinie die gewöhnliche Fusspunktlinie, unter (α) Fusspunktlinie dagegen der geometrische Ort der Durchschnittspunkte derjenigen aus dem Pol auslaufenden Geraden verstanden, welche mit den Tangenten der Basis den constanten Winkel α bilden.

Sei nun r der zum Winkel φ gehörige Leitstrahl der $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Fusspunktlinie, so steht dieser auf einer Tangente der Basis senkrecht und der zu derselben Tangente gezogene Leitstrahl ϱ der (α) Fusspunktlinie schliesst mit der Polaraxe den Winkel $\varphi+90^{0}-\alpha$ und mit r den constanten Winkel $90^{0}-\alpha$ ein und es ist also $\varrho \sin\alpha = r$. Nun ist für die centralen Kegelschnitte, wenn (f, g)

die Coordinaten des Pols in Bezug auf den Mittelpunkt sind, für den Pol als Coordinatenanfang und für die durch den Pol parallel zur ersten Axe des Kegelschnittes gezogene Gerade als Polaraxe

$$r = -f\cos\varphi - g\sin\varphi \pm \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi},$$

wo das Zeichen + für die Ellipse, — für die Hyperbel gilt, die Polargleichung der $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Fusspunktlinie; also der zum Winkel φ gehörige Leitstrahl der (α) Fusspunktlinie

$$\varrho\sin\alpha = -f\cos(\varphi+\alpha-90^0) - g\sin(\varphi+\alpha-90^0) \pm \sqrt{a^2 - c^2\sin^2(\varphi+\alpha-90^0)}.$$

Geht man nun von diesem Coordinatensystem auf ein anderes über, dessen Ursprung derselbe ist, dessen Polaraxe aber mit der früheren den Winkel $90^0 - \alpha$ bildet, so geschieht dieses durch die Substitution von $\varphi + 90^0 - \alpha$ für φ, und es ist dann:

$$\varrho\sin\alpha = -f\cos\varphi - g\sin\varphi \pm \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi}$$

oder:

$$\varrho = -\frac{f}{\sin\alpha}\cos\varphi - \frac{g}{\sin\alpha}\sin\varphi \pm \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2\alpha} - \frac{c^2}{\sin^2\alpha}\sin^2\varphi} \ldots (1)$$

die Polargleichung der (α) Fusspunktlinie.

Die (α) Fusspunktlinie eines centralen Kegelschnittes ist also die $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Fusspunktlinie eines Kegelschnittes, der mit dem gegebenen ähnlich ist, dessen Axen in dem Verhältniss $\frac{1}{\sin\alpha}$ grösser sind, als die des gegebenen und mit denen des gegebenen Kegelschnittes den Winkel $90^0 - \alpha$ bilden, in Bezug auf denselben Pol. Der Mittelpunkt der neuen Basis für die $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Fusspunktlinie, welche die (α) Fusspunktlinie der gegebenen Basis ist, ergibt sich durch folgende Construction: Man zieht durch den Pol eine Linie unter dem Winkel $90^0 - \alpha$ gegen die erste Axe, auf diese in dem Abstand $\frac{f}{\sin\alpha}$ eine Senkrechte und trägt auf dieser die Gerade $\frac{g}{\sin\alpha}$ auf.

Als einige specielle Folgerungen ergeben sich hieraus die nachstehenden.

Für den Kreis ist $c = 0$, wählt man den Mittelpunkt zum Pol, so ist auch $f = g = 0$, und also:

$$\varrho = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Zieht man also um den Kreis mit dem Halbmesser r einen grösseren concentrischen mit dem Halbmesser R, und zieht von irgend einem Punkt des grösseren Kreises zum Umfang des kleineren eine Tangente, so macht jeder zum ersten Punkt gezogene Halbmesser R mit dieser Tangente einen constanten Winkel, für welchen $\sin\alpha = \frac{r}{R}$, wie diess auch aus geometrischer Betrachtung unmittelbar folgt.

Liegt der Pol auf dem Umfang des Kreises, so ist:

$$f = a, \quad g = 0, \quad c = 0;$$

und es ist

$$\varrho = -\frac{f}{\sin\alpha}\cos\varphi + \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Der geometrische Ort für die Durchschnittspunkte der aus irgend einem Punkt des Kreisumfanges gegen die Tangenten des Kreises unter dem constanten Winkel α gezogenen Geraden ist also eine Cardioide, die den Mittelpunkt ihres Grundkreises auf der gegen die Verbindungslinie des Pols und Kreismittelpunktes unter dem Winkel $90^0 - \alpha$ gezogenen Geraden in der Entfernung $\frac{a}{2\sin\alpha}$ vom Pol hat.

Wählt man für die Ellipse und Hyperbel den Brennpunkt zum Pol, so ist $g = 0$, $f = c$; also:

$$\varrho = -\frac{c}{\sin\alpha}\cos\varphi \pm \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2\alpha} - \frac{c^2}{\sin^2\alpha}\sin^2\varphi},$$

oder:

$$\varrho^2 + \frac{2c\varrho}{\sin\alpha}\cos\varphi = \frac{a^2 - c^2}{\sin^2\alpha},$$

welche Gleichung durch Uebergang auf rechtwinklige Coordinaten mittelst der Substitution

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sich verwandelt in:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}.$$

Zieht man also zu den Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel aus einem Brennpunkte Strahlen unter dem Winkel α gegen die

Tangenten geneigt, so liegen die Durchschnittspunkte dieser Strahlen mit den Tangenten auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf der durch diesen Brennpunkt unter dem Winkel $90^0-\alpha$ gegen die erste Axe des centralen Kegelschnittes gelegenen Geraden in der Entfernung $\frac{c}{\sin\alpha}$ vom Brennpunkt liegt und dessen Halbmesser $\frac{a}{\sin\alpha}$ ist.

Wählt man bei der gleichseitigen Hyperbel, für welche $c^2=2a^2$, den Mittelpunkt zum Pol, so ist $f=g=0$ und daher:

$$\varrho=\frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}=\frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{\cos 2\varphi}$$

oder:

$$\varrho^2=\frac{a^2}{\sin^2\alpha}\cos 2\varphi.$$

Zieht man also aus dem Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel zu den Tangenten derselben Strahlen unter der Neigung α, so liegen die Durchschnittspunkte dieser Strahlen mit den Tangenten auf einer gemeinen Lemniscate, deren Mittelpunkt mit dem der Hyperbel zusammenfällt, bei welcher die festen Punkte, für welche das Product der zu einem Punkt der Lemniscate gezogenen Leitstrahlen einen constanten Werth hat, auf der durch den Mittelpunkt unter dem Winkel $90^0-\alpha$ gegen die erste Axe gezogenen Geraden in der Entfernung $\pm\frac{a}{\sin\alpha\sqrt{2}}$ liegen, dieses Product selbst aber $\frac{a^2}{2\sin^2\alpha}$ ist.

In gleicher Weise ergiebt sich für die Parabel, deren $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Fusspunktlinie die Gleichung

$$r=f\cos\varphi-g\sin\varphi+\frac{p}{2}\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi$$

hat:

$$\varrho\sin\alpha=f\cos(\alpha+\varphi-90^0)-g\sin(\alpha+\varphi-90^0)$$
$$+\frac{p}{2}\sin(\alpha+\varphi-90^0)\operatorname{tg}(\alpha+\varphi-90^0);$$

oder, wenn man die Polaraxe wieder um den Winkel $90^0-\alpha$ dreht:

$$\varrho=\frac{f}{\sin\alpha}\cos\varphi-\frac{g}{\sin\alpha}\sin\varphi+\frac{p}{2\sin\alpha}\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi$$

als Gleichung der (α) Fusspunktlinie der Parabel.

Die (α) Fusspunktlinie der Parabel ist also wieder die $\left(\frac{\pi}{2}\right)$Fusspunktlinie einer Parabel, deren Hauptaxe mit der der gegebenen Parabel den Winkel $90^0-\alpha$ bildet und deren Parameter im Verhältniss $\frac{1}{\sin\alpha}$ grösser als der der gegebenen ist.

Wählt man den Brennpunkt zum Pol, so ist:

$$g=0,\quad f=\frac{p}{2}$$

zu setzen, und daher:

$$\varrho=\frac{p}{2\sin\alpha}(\cos\varphi+\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi)=\frac{p}{2\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\varphi},$$

und durch Uebergang auf rechtwinklige Coordinaten:

$$x=\frac{p}{2\sin\alpha}.$$

Zieht man also zu den Tangenten einer Parabel aus dem Brennpunkte Strahlen, welche mit den Tangenten den constanten Winkel α bilden, so liegen die Durchschnittspunkte der Tangenten mit den Strahlen auf einer unter dem Winkel $90^0-\alpha$ gegen die Hauptaxe der Parabel in der Entfernung $\frac{p}{2\sin\alpha}$ von dem Brennpunkt gezogenen Geraden.

Ist der Pol im Scheitel der Parabel, also $f=g=0$, so wird:

$$\varrho=\frac{p}{2\sin\alpha}\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi.$$

Zieht man also aus dem Scheitel der Parabel zu den Tangenten derselben Linien unter dem Winkel α, so liegen die Durchschnittspunkte der Strahlen mit den Tangenten auf einer Cissoide, für welche der Mittelpunkt des ihre Gestalt bestimmenden Kreises auf einer durch den Scheitel unter dem Winkel $90^0-\alpha$ gezogenen Geraden in der Entfernung $\frac{p}{2\sin\alpha}$ liegt.

Aus der bekannten Eigenschaft der Fusspunktlinie, dass das Quadrat der Reciproken des Radiusvectors der Fusspunktlinie gleich ist der Summe der Quadrate der Reciproken des Leitstrahls der Basis und ihrer polaren Subtangente, ergibt sich für die logarithmische Spirale, wenn die Gleichung der Basis

$$R=a^{\varphi}$$

ist:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^{2\varphi}} + \frac{(la)^2}{a^{2\varphi}}$$

als Gleichung der $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Fusspunktlinie:

$$r = \frac{1}{\sqrt{1+(la)^2}} a^{\varphi};$$

oder, wenn man:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(la)^2}} = a^m$$

setzt:

$$r = a^{\varphi+m}.$$

Die $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Fusspunktlinie ist also wieder eine logarithmische Spirale, die sich nur durch ihre Lage von der Basis unterscheidet. Für die (α) Fusspunktlinie erhält man daher:

$$\varrho = \frac{a^{\varphi+\alpha-90^\circ+m}}{\sin\alpha},$$

oder, wenn man die Polaraxe wieder um $90^\circ - \alpha$ dreht:

$$\varrho = \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+(la)^2}} a^{\varphi},$$

und wenn man

$$\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+(la)^2}} = a^n$$

setzt:

$$\varrho = a^{\varphi+n},$$

also wieder eine logarithmische Spirale, die sich von der gegebenen nur durch ihre Lage unterscheidet. Für den besonderen Fall, dass $a^n = 1$, oder $\sin\alpha\sqrt{1+(la)^2} = 1$, also $\operatorname{cotg}\alpha = la$, fällt die (α) Fusspunktlinie auch der Lage nach mit der Basis zusammen, und es ergibt sich der bekannte Satz, dass der Radiusvector mit der Tangente im Berührungspunkt einen constanten Winkel bildet.

par conséquent

$$\text{cotang}\, C - \text{cotang}\, C'' = \tfrac{2}{3}\text{cotang}\, A + \tfrac{2}{3}\text{cotang}\, B + \tfrac{2}{3}\text{cotang}\, C,$$

ce qui s'accorde avec ce qui précède.

Thorn, 4. Mai 1870.

Druckfehler.

Thl. L. p. 108, Z. 2. v. u. statt „$\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}z$", l. „x, y, z".

Thl. LI. p. 76, Z. 4. v. o. statt

$$\frac{d}{d\theta}\{\sin \tau\} \quad \text{l.} \quad \frac{d}{d\theta}\{r \sin \tau\}.$$

p. 88, Z. 6. v. o. statt „^{3}" l. „$\frac{3}{2}$".

p. 92, Z. 4. v. o. statt „Gattung" l. „Gleichung".

p. 358, Z. 8. v. o. statt

$$\frac{6abc}{\Delta_1 Z} \quad \text{l.} \quad \frac{6abc}{\Delta_1 Z} T.$$

p. 358, Z. 7. v. u. statt „r_2" l. „r_3".

p. 364, Z. 8. v. u. statt „d. h." l. „d. h. die".

p. 365, Z. 2. v. o. l.

$$H = \frac{\sqrt{4a^2a'^2k_1{}^2 + 4b^2b'^2k_2{}^2 + 4c^2c'^2k_3{}^2 - a^2b'^2c'^2 - a'^2b^2c'^2 - a'^2b'^2c^2 - a^2b^2c^2}}{8k_1k_2k_3}.$$

p. 365, Z. 10. v. u. statt „$+4c^2k_2{}^2$" l. „$+4c^2k_3{}^2$".

Taf. VI., Fig. 1. unten statt „v''" l. „x''".

Wien, April 1870.

Franz Unferdinger.

Thl. LI. S. 195. Z. 7. v. o. statt „GR" s. m. „EQ".

„ „ „ 265. Zwischen der dritten und vierten Zeile v. o. füge man das ausgefallene „$= 0$" bei; eben so auf S. 194. ganz am Ende (links) das ausgefallene „1".

Druckfehler in den Vega'schen Logarithmen.

Seite 300. „Tang 1° 42′ 30″ = 8,4745787" statt „8,5745787".

Heidelberg, 25. April 1870.

A. Schapringer,
stud. med.

In der Ausgabe von 1826 ist der Logarithmus richtig.

Fasbender.

IX.

Einige Beiträge zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna.

Von

Herrn Comm. Prof. Dr. ***Silvestro Gherardi***,
Präsident des Technischen Instituts zu Florenz.

[Aus dem Italiänischen übersetzt von Maximilian Curtze, Gymnasiallehrer zu Thorn.]

EIN PAAR EINLEITENDE WORTE DES DEUTSCHEN HERAUSGEBERS.

Das Original der vorliegenden Uebersetzung ist zuerst erschienen in den Annali delle Scienze Naturali di Bologna (Serie 2a, tom. 5o, p. 241—368). Unter dem Titel: Di alcuni materiali per la Storia della Facoltà Matematica nell' antica Università di Bologna composti nella opportunità di stendere delle notizie sul Padre Bonaventura Cavalieri. Discorso letto all' Academia delle Scienze dell' Istituto di Bologna nelle sessioni dei 9 e 23 maggio 1844 del dottore Silvestro Gherardi, Membro pensionario della stessa Academia, Prof. di Fisica nella P. Università, già Prof. di Mecanica e Idraulica nella medesima. Bologna 1846. Tipi Sassi nelle Spaderie, wurde von dieser wichtigen Abhandlung eine Separatausgabe in nur sehr wenigen Exemplaren veranstaltet, die bald so selten wurden, dass sie noch nicht 20 Jahre nach ihrem Erscheinen mit dem zehn- bis fünfzehnfachen Preise bezahlt wurden. Hierin und in der Schwierigkeit, sich ausserhalb Italiens dort erschienene Werke zu

verschaffen, liegt auch jedenfalls der Grund, dass es in Frankreich und Deutschland ganz unbeachtet geblieben ist. Weder VICTORIEN SARDOU in seinem Artikel CARDAN in der Nouvelle Biographie universelle[1]), noch TERQUEM in den Annales de mathématiques[2]), noch M. CANTOR in der Zeitschrift für Mathematik und Physik[3]) haben seine Resultate für die Geschichte der Erfindung der Auflösung cubischer Gleichungen benutzt, sondern geben sämmtlich nur die **absichtlich gefälschten** Nachrichten CARDANS und TARTAGLIAS wieder. Noch im Jahre 1868 konnte HIPLER in seiner kleinen Broschüre über COPERNICUS[4]) über den Lehrer dieses berühmten Astronomen, DOMENICO MARIA NOVARA DA FERRARA, schon längst von GHERARDI wiederlegte Notizen bringen. Die Seltenheit des Werkes und seine hervorragende Wichtigkeit für die Geschichte der Mathematik liessen uns um so lieber der Aufforderung des Herrn Verfassers nachkommen, ihm bei Veranstaltung einer schon mehrfach erbetenen[5]) zweiten Ausgabe behilflich zu sein, die er in deutscher Sprache veranlasst wünschte, als Herr Prof. GRUNERT sich freundlichst erbot, eine Uebersetzung in sein Archiv aufzunehmen, und auch die Verlagshandlung dieser geschätzten Zeitschrift die Erlaubniss gab, von den betreffenden Bogen eine gewisse, jedoch ziemlich beschränkte Zahl Separatabdrücke zu machen. Wir übernahmen daher mit grossem Vergnügen die Herstellung der Uebersetzung, um so vielleicht ein Bekannterwerden der wichtigen Untersuchungen zu ermöglichen, die das Werkchen enthält.

---

1) T. 8, Paris 1854. p. 686 etc.

2) Année 1856, cahier du Nov. et Déc.

3) Jahrgang 2, Leipzig 1857. S. 353 ff.: Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus, drei Charakterbilder.

4) Nikolaus Kopernikus und Martin Luther. Braunsberg, 1868. Auch in andern Puncten ist diese, sonst höchst anregend geschriebene Broschüre mit grosser Vorsicht aufzunehmen.

5) Man sehe z. B. die Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Classe di Scienze Matematiche e Naturali, Fascicolo di novembre 1866, wo Prof. Codazza diesen Wunsch ausspricht. Ueber den Werth des Gherardischen Werkes kann man ausserdem vergleichen: Brunet, Manuel du Libraire et de l'amateur de Livres, T. V, p. 661—662 der letzten Ausgabe unter Tartaglia und die Introduction des Catalogue of the mathematical, historical ect. portion of the celebrated library of M. G. Libri, Part. I, A—L, p. XIII—XV.

EINLEITUNG.

Die Liebe für die biographischen Studien, die in mir bei Gelegenheit des Berichtes erregt wurde, den ich über die Handschriften und Werke des berühmten GALVANI zu geben hatte, war der Grund, dass ich, obgleich meine Bemühungen in Bezug auf *diesen* noch nicht beendigt waren [1]), eine andere glänzende Zierde dieses Archigymnasiums zum Vorwurf ähnlicher Untersuchungen machte. Der Mann, den GALILEI — *bewunderns-würdiges Genie* — und — *zweiter Archimedes* nannte, STEFANO DEGLI ANGELI — *geometrischer Herkules* —, VIVIANI — *scharfsinnigster Geometer* —, TORRICELLI — *Eröffner eines wahrhaft königlichen Weges durch die mathematischen Dornen* —, HOBBES — *Nebenbuhler des Archimedes und Apollonius*, dem Andere andere ehrende und dankbare Beinamen gaben, war der Erste, der meine Gedanken fesselte, und dem später der grösste Theil der Musse gewidmet war, welche meine täglichen Berufsgeschäfte mir übrigliessen. Ich durchsuchte Werke jeder Art, um weniger bekannte Thatsachen über ihn aufzufinden, die werth wären in das Gedächtniss der jetzt Lebenden zurückgerufen zu werden. Ich durchstöberte auch die Bücher, die Acten und die Handschriften der alten Studienanstalt, — die nicht am Sitze

---

1) Noch in der letzten Zeit ist es dem unermüdlichen Eifer des Herrn Verfassers gelungen, werthvolle Handschriften dieses berühmten Gelehrten aufzufinden, worüber er in den Jahren 1868 und 1869 an die *Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna* berichtet hat. Diese Berichte sind auch separat unter folgenden Titeln gedruckt worden: 1. Illustrazioni su tre distinti manoscritti del Celebre Galvani. Memoria del Prof. Commend. Silvestro Gherardi preceduta da un suo Ragguaglio sopra altri autografi Galvaniani pur novellamente trovati. Bologna Tipi Gamberini e Parmeggiani 1868. 25 S. 4°. — 2. Di due preziosi MSS. del Galvani sulla Torpedine. Relazione del Prof. Commend. Silvestro Gherardi. Bologna. Tipi Gamberini e Parmeggiani 1869. 54 S. 4°. (Anm. d. Uebers.).

der modernen Universität, der Nachfolgerin jener, auch nicht im Archigymnasium, dem ehrwürdigen Sitze derselben, sondern im Archive der Erhabenen Legation [1]) aufbewahrt werden —, um Notizen über ihn zu finden, die seinen Biographen entschlüpft wären oder dazu dienen könnten, einige, die sie überliefert hatten, zu berichtigen. — Und da kann ich mich denn nicht enthalten, mitzutheilen, dass ich bei diesen letzten Untersuchungen so glücklich war, unter einigen höchst interessanten Documenten einen wahren Edelstein wiederaufzufinden: Ein hochwichtiges Stück, ***einen Brief des grossen*** GALILEI, den dieser der Regierung von Bologna als Zeugniss für die Verdienste des P. CAVALIERI einreichte, als der Letztere sich um den Lehrstuhl bemühte, den er später inne hatte und mehr, als man sagen kann, verherrlichte; ein Zeugniss, dessen Existenz bekannt war, das aber vor mir Niemand gesehen hatte [2]). Ich liess auch aus dem Brief-

---

1) Jetzt im *Archivio Notarile.* (Anm. d. Uebers.)

2) Ich täuschte mich nicht, als ich dieses Document für so äusserst wichtig hielt. Man sehe dasselbe und den grossen Werth, den ihm Herr Piola beilegt, in dessen werthvollen Lobrede auf Cavalieri (Elogio di Bonaventura Cavalieri recitato inaugurandosi un monumento alla memoria di lui all' occasione del sesto Congresso Scientifico Italiano in solenne adunanza straordinaria dell' I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti da Gabrio Piola Presidente dello stesso I. R. Istituto, ec. Con Note, Postille Matematiche ec. Milano Coi tipi di Giuseppe Bernardoni di Giovanni 1844, p. XI des Elogio und p. 12—13 etc. der Note ecc.). Ich hatte ihm dasselbe zusammen mit andern Documenten mitgetheilt, die genanntem Archive entnommen waren, und mit den Notizen und Briefen, von denen gleich die Rede sein wird.

Ich erlaube mir an dieser Stelle das obenerwähnte Capitolo di Lettera des grossen Galilei zu Gunsten des grossen Cavalieri dieser Uebersetzung in correcterer Weise und genauer dem Originale conform beizufügen, als dasselbe bis jetzt veröffentlicht ist. Dasselbe lautet, wie folgt:

Capitolo di Lettera scritta dall' Eccell^{mo}. Sign. Galileo Galilei al Sign. Cesare Marsilj. Di Firenze li 10 Marzo 1629.

„Il m^{o}. R^{do}. f. Bonaventura Cavallieri Giesuato, il quale per honorarmi „dice haver ricevuto da me qualche „ajuto nel principio de' suoi studj Mathematici, sento che ricerca la lettura „di tal facoltà in cotesta Università; „e questo per poter con maggior libertà „proseguire tale studio, nel quale egli

„Der sehr Ehrwürdige Jesuaterbruder Bonaventura Cavalieri, der um „mich zu ehren sagt, er habe am Anfange seiner mathematischen Studien „von mir einige Unterstützung erhalten, „höre ich, hält an um die Professur „in solcher Facultät an der dortigen „Universität; und zwar um mit grösserer

wechsel GALILEIS gewisse Briefe aufsuchen und copieren, suchte auch selbst zweimal nach solchen und schrieb sie mir ab, die meinen Untersuchungen zu Statten kamen [1]). Endlich unterliess ich keine Untersuchung, um festzustellen, ob nicht irgend ein Ehrengedächtniss, etwa eine Medaille, ein Porträt, oder wenigstens ein Vers auf einem Steine [2]) oder einer Mauer erinnerte oder an

---

„*si sente haver talento e genio mirabile.* „*Io se 'l giuditio mio può comprendere* „*il vero, e l' attestation mia trovar cre-* „*dito alcuno, ingenuamente stimo, pochi,* „*da Archimede in quà, e forse niuno* „*essersi tanto internato e profondato* „*nell' intelligenza della Geometria, sì* „*come da alcune opere sue comprendo;* „*e per essere questa parte la più diffi-* „*cile, e quella sopra la quale tutte le* „*altre mathematiche si appoggiano, non* „*ho dubbio alcuno ch'egli nelle altre,* „*assai più facili di questa, non sia* „*per far passate mirabili. Ne ho vo-* „*luto dar conto a V. S. (supponendo* „*che Ella sia per favorirlo) per entrare* „*a parte nell' honore ch'io son sicuro* „*che Egli arrecherà a cotesta Cathedra,* „*qualvolta succeda che sia fatta elet-* „*tione della persona sua.*"

„Freiheit dieses Studium fortsetzen zu „können, wozu er wunderbares Talent „und Genie zu haben fühlt. Ich, wenn „mein Verstand das Wahre erkennen „kann, und mein Zeugniss irgend wel- „chen Glauben findet, meine aufrichtig, „Wenige, seit Archimedes bis jetzt, „vielleicht nicht ein Einziger seien so „wie er eingedrungen und haben sich „so vertieft in das Verständniss der „Geometrie, wie ich aus einigen seiner „Werke ersehe; und da dieser Theil „der schwierigste und derjenige ist, „auf den alle andern mathematischen „Wissenschaften sich stützen, so habe „ich nicht den mindesten Zweifel, dass „er in den andern, sehr viel leichtern „als jene, im Stande sei, wunderbare „Fortschritte zu machen. Darüber „wollte ich Ew. H. Rechenschaft ge- „ben (annehmend, dass Sie ihn unter- „stützen wollen), um Theil nehmen zu „können an der Ehre, mit der Sie, wie „ich sicher glaube, jenen Lehrstuhl „bereichern werden, sobald es eintreten „sollte, dass die Wahl auf seine Per- „son fiele."

1) Diese Briefe sind ihrer bedeutenden Wichtigkeit halber dem grössten Theile nach vollständig oder auszugsweise von Herrn Don Gabrio Piola veröffentlicht worden. Man findet sie in den Note ecc. zerstreut, einen vor Allen wichtigen in der *Postilla matematica III* der vorgenannten Lobrede (p. 113 ff.).

2) Man sehe auf S. 76—77 der *Anmerkungen* zu dem genannten Elogio des Cavalieri die Anzeichen, die ich eines Tages über die Existenz eines Erinnerungszeichens in Stein auf Cavalieri in der hiesigen Parochialkirche *della Mascarella* fand, wie dann der Stein wieder entdeckt wurde und der Tenor der Inschrift desselben, endlich die Inschrift, die der ersten nach dem sogleich gefassten, aber noch immer Project gebliebenen Beschlusse hinzugefügt werden sollte, den Stein an einem schicklichen Platze wieder aufzurichten. Ich muss

irgend einem Orte dieser Stadt an den Geometer erinnert hätte, der keinem der Docenten oder Professoren nachgestanden, welche vorzugsweise den Ruhm dieses Archigymnasiums ausbreiteten, und der unvergleichlich viel höher stand, als sehr viele von denen, welche im Archigymnasium selbst mit einem Monumente ausgezeichnet sind.

Aus diesen, wenngleich zahlreichen und wichtigen Schriftstücken und Notizen allein, die ich auf diesen verschiedenen Wegen gesammelt, hätte ich niemals ein Werk zu verfassen gedacht, wenn ich es nicht zu einem Anhang oder Ausführung einer der bessern Lebensbeschreibungen bestimmen konnte, die wir von dem grossen Jesuater besitzen, und diese so als nothwendiges Bindemittel jener Notizen und Schriftstücke benutzen, die zum grössten Theile dem Inhalte nach sehr verschieden und unter einander unverbunden waren. Das Letztere nun hatte ich die Absicht mit Musse zu thun. Ich wählte zu dem angegebenen Zwecke die gründliche und energische Lobrede auf ihn, die uns die berühmte Feder Frisis hinterlassen [1]), nicht ohne das Vertrauen, dass durch

---

hinzufügen, dass es dem hochgeehrten Dr. G. B. Bianconi, einem der Patrone genannter Kirche, gelang den Stein da zu finden, wo er ihn nach meinen Angaben und meinen Anstiftungen gesucht hatte. = Das Project ist später in geziemender Weise zur Ausführung gekommen, indem man einige Jahre darauf an der innern Mauer genannter Kirche den alten Denkstein auf Cavalieri mit einer daruntergesetzten sehr angemessenen Inschrift in Marmor wiederaufrichtete (Alles unter Aufsicht der Familie Bianconi, Mitpatronin dieser Kirche).

1) Diese Lobrede auf Cavalieri war sicher die beste, die man vor Erscheinen der obengenannten von Piola verfassten besass; sie wird ewig ihren Werth behalten sowohl dadurch, dass sie die erste des Gepriesenen würdige ist, als auch durch ihren vortrefflichen wissenschaftlichen Werth, ihre historischen Episoden — obwohl man über die Unparteilichkeit einiger von ihnen Zweifel hegen kann —, ihren lebendigen und glänzenden Stil: aber sie wird, besonders in wissenschaftlicher Hinsicht, von der obengenannten Piolas bedeutend in den Schatten gestellt, die allen Wünschen Genüge leistet, ja sie noch übertrifft; die Cavalieri noch grösser hinstellt, als man bis jetzt glaubte, vielleicht noch viel grösser, als man ihn zu den Zeiten Frisis beurtheilen konnte, in denen man in der höhern algebraischen Analysis gewisse Fortschritte sowohl im Gebiete des reinen Calculs als in dem der Metaphysik entbehrte. Unter Vergleichung mit diesen wusste der neue Mailänder Cavalieri die ganze Originalität, Strenge und Ausdehnung der geometrischen Analysis des alten Cavalieri hervortreten zu lassen. Die waren Genies, wie der letztere, sind in der Tiefe des Wissens ihrem Zeitalter um ein gutes Stück voraus, und

mein Zuthun ihr Werth einigermassen erhöht werden könnte; denn an unzweideutigen Zeichen merkte ich, dass — in wahrhaft unglaublicher Weise — weder FRISI noch sonst Jemand von denen, die vor ihm oder nach ihm CAVALIERI durch eine Lobrede verherrlichten, daran gedacht hatten, die Acten dieser alten Studienanstalt zu Rathe zu ziehen, die ihn betreffen, in denen ich so Schätzbares gefunden hatte; in gleicher Weise nahm ich wahr, dass keiner von ihnen einige Briefe des obengenannten Briefwechsels gesehen oder hinreichend gewürdigt hatte, die CAVALIERI zur grössten Ehre gereichen und für ihn und seine Biographie von höchstem Interesse sind, dass ihnen eine Leichenrede [1]), eine Sammlung von hier in Bologna auf den Tod CAVALIERIS herausgegebenen Gelegenheitsgedichten und eine Zahl anderer mehr oder weniger bemerkenswerther Thatsachen unbekannt geblieben waren. Im vergangenen Sommer aber liess mich der in Mailand unter Beförderung und unter den Auspicien des dortigen K. K. Instituts gefasste Beschluss, zu Ehren CAVALIERIS ein Denkmal zu errichten und eine neue Lobrede herauszugeben — zu enthüllen und vorzutragen bei der Feierlichkeit des sechsten italiänischen wissenschaftlichen Congresses, den genannte Stadt am nächsten 5. September aufnehmen wird — meinen Entschluss dahin umändern, dem berühmten Verfasser der Lobrede alle vorgenannten Schriftstücke und Notizen zur Disposition zu stellen. Dazu aufgefordert von Seiten dieses Schriftstellers selbst, bevor ich noch ihm meinen Vorsatz mitgetheilt, unterstützte ich von da an, so viel in meiner Macht stand, den neuen Beschluss und die gewünschten Bemühungen durch Beantwortung aller Fragen dessel-

---

es bedarf ganzer Jahrhunderte des Fortschrittes im Wissen selbst, um die volle Grösse ihrer Kraft genau zu messen. Aber hier bedurfte es auch des ganzen Wissens und des ganzen Eifers eines Piola, um das jetzt für Cavalieri zu thun. Jetzt kann man endlich sagen, dass dieser gewürdigt ist, und dass seine vollständige Würdigung in der Lobrede Piolas sich findet, diesem Denkmal, werthvoller als das, an sich höchst löbliche, der Marmorstatue, die diesem grossen Manne errichtet wurde.

1) Ein nicht unwichtiger Beitrag zum Verständniss dieser Leichenrede findet sich im neuesten (Juli) Hefte des Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche pubblicato da B. Boncompagni. T. II°. Roma 1869, p. 299—312 (Notizia Sconosciuta relativa a Bonaventura Cavalieri. Nota dell' Ingre. Ferdinando Jacoli Professore nella Regia Scuola Allievi Macchinisti di Marina (Genova)). (Anm. d. Uebers.).

ben, die ich mit Hilfe meiner Documente aufklären konnte, durch Nachrichten über Einzelnes, für ihn völlig Neues, was ich zufällig in den Antworten berührt hatte, endlich dadurch, dass ich einige meiner Notizen in einem Artikel zusammenstellte, der im November — December-Hefte 1843 dieser Annali delle Scienze Naturali erschien, und in welchem ich zum Theil für CAVALIERI die Erfindung der sogenannten ***Dietzschen Wasserpumpe*** in Anspruch nehme. Von diesem Artikel war die Figurentafel schon gedruckt, bevor der mit so grossem Beifall aufgenommene Beschluss des K. K. Lombardischen Instituts zu meiner Kenntniss gelangt war[1]). Alle diese von mir mitgetheilten Schriftstücke und Notizen und die noch mitzutheilenden wurden von mir einfach als Anmerkungen zu verschiedenen Puncten der Schriften, des Lebens und der Arbeiten CAVALIERIS abgefasst, auf die sie sich bezogen. Aber indem ich so arbeitete musste ich, wieviel ich mich auch vorsah, von derselben nicht abgezogen zu werden, doch der Nothwendigkeit nachgeben, einige allgemeinere Notizen hineinzubringen, nämlich Notizen über die mathematische Facultät in der alten Bologneser Studienanstalt. Ein sehr umfassender Vorwurf und schwer zu behandeln! Denn die andern Universitäten

---

1) Ich bemerke dies, weil ich, wenn vorgenannte Tafel und alles Andre nicht schon vollständig zum Drucke des Artikels vorbereitet gewesen, als genannter Beschluss mir bekannt wurde, auch diesen Artikel zur freien Disposition des trefflichen Verfassers des *Elogio* gestellt haben würde, wie ich es durch Briefe und mündlich — denn ich war zu diesem Zwecke nach Mailand gereist — mit allen meinen Studien über Cavalieri gethan habe. Bei unsrer beiderseitigen Beschäftigung mit demselben Gegenstande kamen wir meistens auf dieselben Gesichtspuncte, auf dieselben Urtheile, auf dieselben Schlüsse — wohlverstanden, soweit dies mich betrifft, nur in Betreff der Sachen, die mein schwacher Verstand erfassen konnte —; und daher hatten wir sowohl in unsrer litterarischen Correspondenz als im Gespräche häufig Gelegenheit, uns gegenseitig gefällig zu sein. Gerade in Bezug auf jenen speciellen Gegenstand aber, den wir, ohne einer vom andern zu wissen, vornahmen und zunächst behandelten, konnten wir nicht mehr zu voller Uebereinstimmung gelangen. Und hier fühle ich mich verpflichtet dem berühmten italiänischen Mathematiker für die Art von Vorzug meinen Dank abzustatten, die er meinem vorgenannten Artikel in der betreffenden Stelle seiner Lobrede auf Cavalieri (Note ecc. p. 29—30) zu geben die Güte hatte, wo er bei Berührung des betreffenden Gegenstandes den Leser auf jenen Artikel in für mich sehr schmeichelhaften Ausdrücken verweist, statt seine eigene Arbeit über den vorliegenden Gegenstand abdrucken zu lassen. Ich zweifle aber sehr, ob dieser Wechsel für den Leser von Vortheil gewesen.

Italiens besitzen jede ihre Geschichte im Drucke mehr oder weniger bis auf unsere Zeit fortgeführt, aber die berühmteste, die von Bologna, besitzt nur die von Sarti und Fattorini vom XI.—XIV. Jahrhundert [1]), die in Betracht des Dunkels jener Jahrhunderte sehr werthvoll ist, auch in Bezug auf die alten berühmten Rechts- und ähnlichen Studien sehr schätzenswerth, aber für die mathematischen Studien und für die noch jüngeren der hauptsächlich beobachtenden Wissenschaften nichts oder wenig nützt. Jetzt wird, wie ich hoffe, jeder einsehen, wie es mir bei der fortschreitenden Zusammenstellung der Notizen über Cavalieri nöthig zu sein schien, dieselben für den geehrten Präsidenten des K. K. Lombardischen Instituts — den Verfasser jener erwähnten neuen Lobrede — mit einem solchen Auszug von Bemerkungen über die mathematische Facultät im Archigymnasium zu begleiten, der gleichsam als ein Ueberblick über diese Facultät dienen konnte, um die Stellung, die Cavalieri darin einnahm und das, was er darin geleistet, besser zu erkennen. Aber dieser Auszug verlangte zunächst den Entwurf einer viel umfassendern Arbeit derselben Art, aus dem man ihn entnehmen konnte. Nun hier ist wirklich ein solcher Entwurf, dessen Ausarbeitung ich mir angelegen sein liess, und den ich heute der Akademie vorzulegen mir erlaube, indem ich lieber den sehr kleinen Theil vorführe, den ich zu einem gewissen Abschluss bringen konnte, und den ich in der Folge und in mehreren Absätzen — wie es der Umfang der Arbeit fordert, welche einem gewaltig unter den Händen wächst — mir vollständig auszuführen vornehme. Ich habe die Zuversicht, dass man nicht blos wegen meiner geringen Fähigkeiten und der vielfachen von diesen Studien ablenkenden Beschäftigungen, sondern auch wegen der Schwierigkeit des Gegenstandes und anderer Schwierigkeiten ähnlicher Arbeiten die Unvollkommenheiten des Versuches verzeihen wird, den ich hierüber vorlege; einige von ihnen sehe ich schon jetzt und werde sie in gelegener Zeit zu verbessern versuchen können, wenn die Akademie einen gewissen Werth darauf legen zu dürfen glaubt. Bei der Ausarbeitung des genannten Entwurfs einer Geschichte und des vorliegenden Abrisses habe ich zunächst dem Gegenstande gedient, welcher den Anlass dazu lieferte. Ich habe mich deshalb grösstentheils auf diejenigen Thatsachen beschränkt,

---

1) De claris Archigymnasii Bononiensis Professoribus etc.

aus denen man leicht nützliche Vergleiche mit CAVALIERI, Aufklärungen und Ergebnisse in Bezug auf Fragen ziehen konnte, die ihn betrafen. Jemehr ich jedoch in meinen Bemühungen vorschritt, um so mehr entwickelten sich die Zielpuncte und dehnten sich auf alle Specialitäten des allgemeinen Gegenstandes aus; ich habe daher Puncte jeder Art berührt und auch wohl ausführlich besprochen, die für die Geschichte genannter Facultät und auch für die der Wissenschaft selbst von Interesse waren, was, wie ich hoffe, auch aus dieser ersten Schrift ersehen werden kann. Hierdurch wird, wenn derselben noch drei oder vier ähnliche Schriften hinzugefügt werden, wenn auch nicht die vollständige Geschichte, doch eine hinlänglich breite Vorarbeit zur Geschichte des Mathematischen Unterrichts an der Universität dieser erlauchten Stadt geliefert sein. Solange aber diese Vorarbeit noch nicht beendigt und der Akademie mitgetheilt ist, werde ich die einzelnen Theile derselben, wie ich es mit diesem ersten gemacht habe, als Materialien zur Geschichte der Mathematischen Facultät der alten Universität Bologna betiteln. Diese Benennung ist gut, wenn sie nicht überflüssig ist; und überflüssig scheint sie mir nicht, und würde sie mir selbst dann nicht scheinen, wenn auch der Vorsatz, diese Vorarbeit zu vollenden, nicht zur Ausführung käme; in diesem Falle — der, so viel an mir liegt, nicht eintreten soll — würde diese Schrift oder die einzelnen mitgetheilten Schriften immer noch gesammelte Materialien für diese Geschichte darstellen und hätten folglich einen gewissen Nutzen für den, welcher eine solche zu schreiben sich anschickte. Um den Entwurf zu dieser Vorarbeit zu machen, den ich, wie ich mittheilte, schon zusammengestellt habe, genügte es die glänzendsten Thatsachen genannter Facultät zu benutzen, die gerade ihres Glanzes wegen den Geschichtsschreibern der mathematischen Wissenschaften nicht entgehen konnten, ebenso wenig den so zahlreichen Schriftstellern über unsre Litteratur, und noch weniger denen, welche uns Abhandlungen über die Docenten dieser alten Studienanstalt hinterliessen; Thatsachen, die überdies zum grössten Theile Unsterblichkeit erlangt haben, wegen der Unvergänglichkeit der Schriften jener Docenten, die ihre Förderer oder Haupturheber waren. Um aber aus dem Entwurfe die Arbeit selbst herzustellen, muss man in eine Menge Specialuntersuchungen sich einlassen, ähnlich denen, die ich über CAVALIERI erwähnte. Einige derselben, die nämlich, welche sich auf die entlegeneren Zeiten be-

ziehen, werden durch die Dunkelheit und Spärlichkeit der Erinnerungen mühevoll, die davon noch aufbewahrt sind; andere, die nämlich, welche die näher liegenden Zeiten behandeln, werden aus zu grosser Fülle des Stoffes mühsam; alle sind nachher schwer zu vollenden, zu ordnen und in eine historische Schrift zu verknüpfen. Unter den vielen Untersuchungen dieser Art, die ich schon unternommen, will ich die nennen, welche den grossen CASSINI betreffen, der dem Ruhme nach, welcher der mathematischen Facultät der alten Universität durch die einzelnen Nachfolger CAVALIERIS geworden ist, unter diesen der erste genannt werden kann, sowohl der Zeitfolge als dem Rufe nach. Ich fing sie vor längerer Zeit an, da ich sie schon vorher bei der Sammlung von Notizen über seinen Vorgänger gefunden hatte, und verfolgte sie mit Eifer, da ich dabei einzelne nutzbare Ergebnisse fand, obgleich der Zweck, dass sie für die Materialien dienen könnten, die ich mitzutheilen unternommen habe, meinem Geiste noch nicht vorschwebte. Ich bin zufrieden, wenn diese Bemühungen zu dem Ziele geführt werden können, das ich bezeichnete; und wenn dann durch sie die oftgenannte Geschichte so angeregt und genügend untersucht würde, dass sie von hier aus ihre Ausarbeitung und ihren Abschluss erhielte durch jemand, der sie vollendete und erläuterte, durch jemand, begabt mit Geist, mit Kenntniss der exacten und der schönen Wissenschaften, mit Eifer, Geduld und auch mit dem Blick, der dazu nöthig ist.

Indem ich einen Augenblick zu dem mich zurückwende, von wo ich meinen Ausgang nahm, nämlich zu meinen speciellen Bemühungen über CAVALIERI, von dessen Zeit der vorliegende Abriss noch weit entfernt bleibt, will ich, ohne Furcht zu prahlen, aussprechen, dass ich, wenn ich an den Glanz denke, den sie in der Königlichen Krone erlangen werden, die ihm ein PIOLA aufsetzen wird, darin schon einen Ersatz über jeden Wunsch hinaus erblicke [1]).

---

1) Ich bin nicht in die Nothwendigkeit versetzt, etwas zur Begründung dieser meiner Ausdrücke hinzuzufügen, die um vier Monate der Ausgabe der neuen Lobrede auf Cavalieri vorangehen, nach dem, was ich in einer der vorhergehenden Anmerkungen von dieser entscheidenden Hauptarbeit gesagt habe, die in solcher Weise von jemand geschätzt ist, dem eine andere Autorität des Urtheils beiwohnt, als mir. Gewiss hätte ich niemals verstanden, aus meinen Studien über Cavalieri das herauszuholen, was Piola zur Verherrlichung dieses Namens und der Wissenschaft daraus entnahm. Aus diesem doppelten

Hochgeehrteste Collegen, ich habe in diesem Eingang, dem ich hier ein Ende setze, offen zeigen wollen, wie ich auf die Arbeit geführt bin, welche ich Ihnen hier darbiete, weil dies zum Verständniss und zur Beurtheilung dieses Werkes von Nutzen war. Aber ich kann einen andern und vielleicht mächtigern Beweggrund, den ich bei dieser Erklärung hatte, nicht verbergen, der aus dem Vertrauen entstand, dass Sie gern hören würden, wie einer der Ihrigen, wenn auch in armseliger Weise, mit thätig war, CAVALIERI zu ehren, diesem von der ganzen Nation ihm geschuldeten Werke, aber vorzugsweise von Mailand, der Stadt seiner Geburt, und von Bologna, der Stadt seines Amtes und seiner berühmtesten Studien!

Grunde bin ich daher hocherfreut gewesen, sie ihm abgetreten zu haben, der sie überdies mehr als belohnt hat durch die Art, mit der er von ihnen in seinem Werke gesprochen, indem er sie dem reichen Apparate seiner eigenen Studien einverleibte, der so viel wesentlicher und werthvoller ist. Diesen Gründen meiner Freude fühle ich mich aber gedrungen einen andern hinzuzufügen: das hochgeschätzte Geschenk der ergebenen und beschützenden Freundschaft Piolas!

Man würde sich eine sehr ungenaue und unter gewissen Gesichtspuncten sogar falsche Vorstellung des Zustandes irgend einer wissenschaftlichen Facultät der alten Universitäten zu einer beliebigen Zeit und ihrer Veränderungen von einem Zeitpuncte zum andern machen, wenn man sie einzig und allein oder auch nur vorzugsweise aus der Zahl und Art der Vorlesungen entnehmen wollte, ebenso aus der Eintheilung der auf jene Facultät bezüglichen Unterrichtsgegenstände, die sich aus den ***Rotoli*** dieser Universitäten ergeben zugleich mit den Namen der Docenten und dem Stundenplan der Vorlesungen. Wie langsam auch die Fortschritte in jedem speciellen Zweige der Wissenschaft, die in ihnen gelehrt wurde, gewesen sein mögen, wenn man anfangend von den frühesten Zeiten gegen die unsere gelangt, so waren sie doch in Wirklichkeit viel bewegter, als man im Allgemeinen aus den ***Rotoli*** folgern würde. In diesen sieht man fast dieselben Vorlesungscurse von Jahrhundert zu Jahrhundert unverändert sich erhalten und erst sehr spät durch Errichtung neuer Lehrstühle oder durch grössere Theilung des jeder Wissenschaft eigenthümlichen Lehrstoffes den Fortschritten Rechnung tragen, die in diesen Wissenschaften schon eingetreten waren. Und doch wäre nicht erlaubt anzunehmen, dass diese Fortschritte immer oder auch nur sehr häufig ausserhalb der Universitäten eingetreten seien, nämlich durch die Arbeit von Gelehrten, die nicht zu ihnen gehörten, oder dass die Wissenschaften in ihnen, von den ausserhalb gehegten Wissenschaften gleichsam ins Schlepptau genommen, diesen nur von ferne gefolgt wären. Wie wäre das möglich, wenn dieselben Männer, die man hintereinander als Lehrer an den Universitäten auftreten sieht, grösstentheils die nämlichen waren, die sich an die Spitze der Bewegungen der Wissenschaft nach einer bessern Zukunft stellten, die durch ihre Schriften und das gesprochene Wort dieser Bewegung die Richtung gaben, sie beherrschten,

überall die verehrten Hauptbegründer eben dieser Fortschritte wurden? Der Widerspruch zwischen dem, was die Wissenschaften wirklich auf den Universitäten waren, und dem, was sie, wenn man den Acten folgt, gewesen zu sein scheinen, kommt ohne Zweifel aus Folgendem: dass einerseits die Spärlichkeit des öffentlichen Aerars, mit welchem die Archigymnasien, wenn nicht bei ihrem Entstehen, doch bei ihrem Wachsthum unterhalten wurden, noch mehr aber die gewohnte und nicht immer tadelnswerthe Neigung, wie alle alten Sachen, so auch die alten Lehrpläne zu conservieren, mit denen die Archigymnasien entstanden oder gegründet waren, verbunden mit der absoluten Schwierigkeit in nutzenbringender Weise bei jedem, auch bemerkenswerthen Schritte der Wissenschaft diese Pläne zu ändern, sehr behutsam mit Schaffung und Hinzufügung neuer Lehrstühle vorgehen liess; dass aber andererseits die aufeinanderfolgenden Professoren auf diesen veralteten und lange Zeit stationär gebliebenen Lehrstühlen, sei es durch den natürlichen Trieb das eigene, dem augenblicklichen Stande der Wissenschaft entsprechende Wissen mitzutheilen, sei es durch den Nutzen, den sie daraus durch die zahlreichen Schüler erhielten, oder sei es auch durch die Verträge, die bei der Amtsübertragung stipuliert waren, dazu geführt wurden, wirklich Sachen zu behandeln, die weit über die Obliegenheiten hinausgingen, die aus den Titeln des jedesmaligen Unterrichtsfaches erscheinen, die in alter Zeit entstanden und benannt waren. Sie umfassten in ihren öffentlichen Vorlesungen im Archigymnasium, vorzugsweise aber in ihren Privatcollegien in ihren eigenen Wohnungen die neuen Materien, die durch das Wachsen der vorgetragenen Wissenschaft gefordert wurden. Wer sollte das bezweifeln auch ohne den Apparat völlig sicherer Beweismittel, die man darüber hat, vorzugsweise in Bezug auf die grosse Zahl von Universitätslehrern, denen die Wissenschaft ganze Neuschöpfungen, Fortschritte, oder wichtige Einzelnheiten verdankt? Wer könnte glauben, dass sie sich in den engen Grenzen der ihnen durch die ***Rotoli*** vorgezeichneten Instructionen halten konnten, die vielleicht von einigen mittelmässigen Vorgängern pünctlichst innegehalten waren?

Seit 1589 hatte Galilei den ersten Lehrstuhl der Mathematik an der Studienanstalt zu Pisa inne — mit einem jährlichen Gehalte von 60 Scudi! — Mit dieser Stellung war die Verpflichtung verknüpft, in zwei Jahren die Elemente des Euklides, die Sphaera des Sacrobosco und des Theodosius und das

Quadripartitum des PTOLEMAEUS zu erklären [1]). Wer wird nun glauben, dass er sich an die Kärglichkeit solcher Instruction gehalten hat, die ebenso in den ältesten ***Rotoli*** dieser Wissenschaft allen Docenten ***ad Mathematicam*** vorgeschrieben war? Aber als er einige Zeit später auf dem Puncte war zu versuchen sich von jenen Hindernissen los zu machen, indem er wichtigere und tiefere Lehren der alten mathematischen Wissenschaft zurückrief, indem er die neue Mechanik des GUIDO UBALDO einführte und wichtigere neue Erfindungen Anderer und eigene, wer würde glauben, dass er da, nachdem er kaum ein Triennium Vorlesungen gehalten, sich genöthigt sah, die Professur an dem heimischen Athenäum aufzugeben? Und doch war er damals erfreut, wenn nicht befriedigt, denn die Widerwärtigkeiten und die Verachtung, durch die er sich geplagt und beleidigt sah, waren ihm die Staffeln, um an das freiere Athenäum zu Padua überzugehen, um nachher mit Ehre und unvergänglichem Ruhm überhäuft zu werden und damit wieder die ganze Nation zu bedecken! Was war aber dazu der Grund? Vielleicht eine von ihm und durch seine neuen Lehren an günstigerem Orte gegründete Schule? Nein, nein: er kam um MOLETO in der Professur zu ersetzen, der nach Vorschrift der patavinischen ***Rotoli*** abwechselnd jährlich den EUCLIDES und SACROBOSCO hatte tractieren müssen, oder höchstens eben jenes Quadripartitum des PTOLEMAEUS. Wer mögte aus denselben Gründen, daraus, dass in dem ***Rotolo*** dieser Studienanstalt von Bologna von 1629 zum ersten Male verzeichnet steht: „***Ad. R. P. Bonaventura Cavalerius Mediolanensis Ordinis*** „***Jesuatorum S. Hieronymi — Ad Mathematicam — legat*** „***Euclidem***", entnehmen, dass es P. BONAVENTURA gefiel, mit dieser bescheidenen Vorlesung seine Laufbahn in dem berühmten Archigymnasium zu eröffnen — wenn gleich in einem von ihm selbst geschriebenen Briefe [2]) die Stelle sich findet: „***mi vado*** „***preparando . . . per principiare a leggere Euclide ecc.***" —, er, der mit so grossen Erwartungen von Allen betrachtet wurde; er, dem das Manuscript seiner berühmten Geometrie vorangegangen war, in der das Unendliche zuerst unter einer vollständig rationalen, systematischen Form erschien, die Wissenschaft auf ihren

---

1) Fabroni, Historia Academiae Pisanae, Vol. 2, p. 392.

2) Es ist dies einer der Briefe, die ich Herrn Don Gabrio Piola mitgetheilt habe. Er ist vollständig abgedruckt in dem vorerwähnten Elogio (Note ecc. p. 16—17).

kühnsten und schwierigsten Flügen, wie auf den leichtesten Wegen begleitete und sie in ihrem ganzen Umfange beherrschte; er endlich, der sich als den GALILEI der reinern Mathematik fühlen musste?

Man muss sich also sehr hüten, beim Durchgehen der Reihe der vorgedachten *Rotoli*, den Werth der Docenten und der gehaltenen Vorlesungen aus den Bezeichnungen zu entnehmen, unter denen sie in denselben aufgeführt sind. Darin sind die Professoren sehr häufig den zugewiesenen Lehrstühlen überlegen: und nicht immer, sogar selten, können die andern aufbewahrten Acten der alten Studienanstalten, wie etwa die oben erwähnten Vocationen jedes Professors, in nutzenbringender Weise in diesem Puncte den *Rotoli* zu Hilfe kommen. Aehnliches versteht sich für den, welcher die Tragweite eines Lehrgegenstandes und des Lehrenden aus der Besoldung desselben entnehmen wollte, ohne alle die Regeln und die vielfachen Rücksichten zu kennen, nach denen das Einkommen der Lehrstühle an den alten Universitäten festgesetzt, vermehrt und vermindert wurde, und ohne sich, je mehr er sich unsern Zeiten nähert, um das progressive Heruntergehen des Preises oder wahren Werthes des Geldes zu kümmern, der mit dem der übrigen Sachen sich veränderte.

Aus alle dem dürfte erhellen, wenn ich nicht irre, dass man ohne die beiden erörterten Kriterien zur Erkenntniss der Art und des Verdienstes der Professoren der alten Universitäten zu vernachlässigen und den Werth, den die Universität selbst hatte, dennoch bei diesem Gegenstande mehr den Ruf zu beachten nöthig hat, den sie durch ihre Werke erlangten, durch die wichtigen Erfindungen, die ihnen von ihren Zeitgenossen zugeschrieben wurden, durch die Menge der Zuhörer und durch die Berühmtheit sowohl ihrer Schüler als derjenigen, die sie als Mitarbeiter oder Assistenten bei ihren Privatstudien hatten. Mit Hilfe dieser und ähnlicher die Docenten betreffenden Thatsachen wirken alsdann die Beschaffenheit, die Zahl der Vorlesungen, die Theilung der Lehrgegenstände, welche einer Facultät angehören, was in den *Rotoli* verzeichnet steht, und auch die Abmessung der Gehälter zusammen, um genau den Stand dieser Facultät zu einer gewissen Zeit und die Veränderungen von einer Zeit zur andern zu kennzeichnen. Diese letzten Thatsachen können so angesehen werden, als ob sie gleichsam die Kette des historischen Gewebes dieser

Facultät bilden, während jene mit den Schlussfolgerungen, denen sie Entstehung geben, dazu gleichsam den Einschlag ausmachen.

Nach diesen Bemerkungen, die sich mir aufdrängten, als ich ohne ihre Hilfe zuerst die Hunderte von ***Rotoli*** durchlief, komme ich ohne Weiteres zu meinen Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der bologneser Studienanstalt. Ich bemerke, dass mir in ihr sechs mehr oder weniger hervortretende Epochen scheinen unterschieden werden zu müssen. In jeder derselben steigt der wohlthätige Einfluss dieser Facultät auf die Erhaltung und das Wachsthum der mathematischen Disciplinen in und ausserhalb Italiens über das gewöhnliche Mass, wird auch den entfernteren und ungebildeteren Gegenden, besonders in den älteren Epochen, fühlbar und verdient, dass der Ruhm dieser Facultät in dem dankbaren Andenken der Nachwelt für alle Zeiten erhalten bleibt. Ich will für sie nicht gerade behaupten, aber ich glaube, dass es in Wahrheit keine entsprechende Facultät auf den vaterländischen Universitäten ihr an die Seite zu stellen gibt, die so berühmt und so wohlverdient wäre als sie in der Gesammtheit ihrer sechs ruhmvollen Epochen betrachtet.

Um zunächst mit der Darstellung der beiden ersten zu beginnen, — da auf diese allein die gegenwärtige Schrift sich bezieht —, will ich kurz über meine Methode sprechen, die ich festhalte. Ich nenne zunächst in jeder Epoche die berühmtesten Docenten, die für sie bezeichnend sind, nicht ohne mit grösster Genauigkeit die Jahre anzugeben, in denen sie ihre Professur ausübten. Ich führe dann von jedem das an, was mir am Wesentlichsten für die Geschichte scheint, die ich zum Zielpuncte habe, indem ich ausführlicher von denen spreche, denen die Nachwelt den Dank schuldig blieb, oder gegen die sie freigebig im Tadeln war, und indem ich über einige neue Betrachtungen anstelle, oder Berichtigungen der Angaben Anderer gebe. Ich unterlasse dabei nicht andere Docenten, die sie begleiteten, ihnen kurz vorhergingen oder folgten, zu erwähnen. Ich zähle dann die berühmtesten Namen von Gelehrten Bolognas auf, oder von solchen, die sich dort aufhielten, welche in der Periode jeder Epoche die mathematischen Wissenschaften pflegten und die, obgleich nicht unter

die Zahl der Docenten der Universität aufgenommen, hier den Glanz dieser Studien vermehrten. — Alle diese Hauptdocenten, die in zweiter Linie stehenden, sowie die gelehrten Mathematiker, die nicht Docenten waren, sollen in dem Rahmen der genannten Epochen, die ich meiner Arbeit einverleiben werde, sobald sie vollendet ist, an ihre richtigen Zeiten vertheilt werden. — Aber die Zusammensetzung und Organisation der Lehrmethode, alle die Verhältnisse, unter denen sie dauerte, alle Veränderungen auch die kleinsten, die sie im Laufe der Jahre erlitt, bilden einen Haupttheil in meinen Materialien, sowohl weil es mir, wie ich oben angegeben, scheint, dass darin Stoff zur ersten Kette des Gewebes unserer Geschichte gesehen oder gegeben werden soll, als auch wegen der Gelegenheit, die sie mir darboten, gewisse Ungenauigkeiten und falsche oder seltsame Meinungen zu beseitigen, die in Bezug auf diesen Gegenstand von gewichtigen Schriftstellern vorgebracht worden sind. Mit diesem Theile beschäftige ich mich vorzugsweise, wenn ich über die Zwischenräume spreche, welche eine Epoche von der andern trennen.

ERSTE EPOCHE.

Die erste Epoche der Mathematischen Facultät der alten Studienanstalt zu Bologna wird mir durch einen Mann dargestellt und bezeichnet, durch Cecco d'Ascoli oder Francesco di Simone Stabili, der während drei oder vier Jahre, von 1322—1325, hier die Astrologie lehrte [1]). Der Beginn derselben würde nach der Meinung derjenigen noch um 75 Jahre hinaufsteigen, welche behaupten, es sei um 1250 an dieser Studienanstalt der berühmte Guido Bonatti aus Forli, wie er selbst sagt, oder aus Florenz, wie andere wollen, Professor der Astrologie gewesen. Sicherlich erstreckt sich diese Epoche aber über 1325 nur wenig hinaus, da man viele Jahre nach Cecco die Professur der Astrologie keinem wirklich berühmten Namen anvertraut sieht, wenn man nicht vielleicht Pelacani genannt Biagio da Parma (*aut diabolus est*, *aut Blasius Parmensis* sagten von ihm die Pariser) ausnimmt, der von 1380—1384 hier zuerst diese Professur und später die der Philosophie inne hatte und der, wie in andern Studienfächern, so auch in der Mathematik als Autorität galt, da er dadurch, dass er sich mit Statik und Perspective beschäftigte, die damals noch in den Kinderschuhen steckten, einen gewissen Ruf hinterliess [2]). Dieselbe Epoche würde endlich nach der Zeit des unglückseligen Ascolaners, wenn nicht gerade mit

---

1) Alidosi, Li Dottori forestieri che in Bologna hanno letto ecc., p. 16 unter Cecho da Ascolo.

2) Alidosi, Li Dottori forestieri ecc. p. 12 unter Biagio da Parma. — Cossali, Origine, Trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra ecc. Vol. 2. p. 107. — Franchini, La Storia dell' Algebra ecc. in dem Supplemento al suo Saggio, p. 40. — Libri, Histoire des Sciences Mathématiques en Italie, T. 2. p. 208—209. — G. J. Vossius, De scientiis Mathematicis ecc. Cap. 26. § 12. n. 6. — Ireneo Affò, Memorie degli scrittori e letterati Parmigiani. T. 2. p. 108—125.

ihm selbst einen neuen und wahrhaften Glanz erlangt haben. Denn es scheint wenigstens am Ende dieses Zeitraums die Errichtung eines neuen fest mit der Astrologie verbundenen Lehrstuhls einzutreten, nämlich des Lehrstuhls der ***Arithmetik und Geometrie***, und zwar dadurch, dass dies bei geeigneten Doctoren, die in den ***Rotoli*** aufgeführt werden, meistens gleichzeitig bei verschiedenen, beigefügt wird, die sie daher nicht immer allein, sondern oftmals mit der Astronomie verbunden ausübten. — Dass der Astrolog oder Astronom manches Jahr auch die Function des Arithmetikers vertrat, schliesse ich aus Folgendem, dass nämlich in dem ***Rotolo*** von 1466 FONDI ebenso wie in den vorhergehenden und nachfolgenden ***Rotoli ad Lecturam Astronomiae*** verzeichnet, speciell das ***Liber Algorisimi de minutis et integris*** 1) zu lesen bestimmt ist; das wird er im Schuljahre 1466—1467 gethan haben, da bekanntlich alle ***Rotoli*** dieser alten Studienanstalt das Datum des ersten October jedes Jahres tragen, und da man jedes Schuljahr mit dem 5. desselben Monats beginnend und mit den Sommerferien des nächsten Jahres endend annahm — das muss man stets gegenwärtig haben, so oft ich die Jahrgänge der ***Rotoli*** und der Professuren erwähne —. Es ist übrigens völlig gesichert, dass von 1383 an in dieser Studienanstalt berühmte Docenten für die Kunst des Abacus, Arithmetik und Geometrie bekannt zu werden anfangen, und dass sie später immer reichlich damit versehen war. Davon aber ausführlicher an seinem Orte.

---

1) Das *Liber Algorismi de minutiis et integris* dürfte dasjenige sein, welches in dem Codex F. II. 33 der öffentlichen Bibliothek zu **Basel**, einer überaus reichhaltigen und werthvollen Handschrift, von Blatt 99ª—105ª sich unter dem Titel *Algorismus demonstratus* und Blatt 87ª—95ª unter dem Titel *Algorismus de minuciis* findet. Diese beiden Stücke, von einer Hand des 14. Jahrhunderts geschrieben, sind identisch mit dem 1543 zuerst anonym, später unter dem Namen Schoners herausgegebenen *Algorithmus demonstratus*, von dem man bis jetzt annahm, es sei ein nachgelassenes Werk **Regiomontans** (Man sehe z. B. Weidler, Historia Astronomiae etc., Vitembergae CIƆIƆCCXLI p. 321—322: „*5. A. 1534. Norimbergae Jo. Schonerus eiusdem „Algorithmum demonstratum . . . . evulgavit.*"). Die Abfassung des Algorismus demonstratus würde also mindestens in das XIV. Jahrhundert hinaufzurücken sein, und dürften dadurch die Schlüsse die Cantor in seinen Mathematischen Beiträgen zum Culturleben der Völker, Halle 1863, aus der später angenommenen Abfassungszeit zieht, zu modificieren sein. Eine genaue Beschreibung des Algorithmus Demonstratus, Norimbergae 1543, findet man im Bullettino Boncompagni, T. 2., fasc. di Settembre e Ottobre 1869, p. 426—427. (Anm. d. Uebers.).

Von GUIDO BONATTI, der für den ersten Mann seines Jahrhunderts galt, den DANTE unter *la perduta gente* setzt [1]), wenn er auch am Ende seines Lebens sich zum Bruder Franciskaner machte und demüthig sein Brod sich bissenweise erbettelte [2]), sage ich weiter Nichts, da mir durch keinen Beweis festzustehen scheint, dass er jemals Professor in dieser Mutter der Studien gewesen ist. — Von CECCO D'ASCOLI, der bis vor sechs Jahren von heute (1844) an gerechnet durch sein tragisches, beklagenswerthes Ende bekannter war, als durch seine Werke, will ich zunächst anführen, dass er sehr nahe an SACROBOSCO blühend unter den ersten Commentatoren der Sphaera mundi desselben war; ein Werk, das in den Schulen der Astrologie oder Astronomie eine ähnliche Dauer behaupten zu müssen schien, wie das des EUKLIDES in den Schulen der Geometrie, das aber statt dessen nach Verlauf einiger Jahrhunderte bei der Auffindung und Erkenntniss der wirklichen Fortschritte in der Astronomie für immer vertrieben wurde. — Eine Schicksalsdifferenz zwischen diesen beiden Büchern, welche ohne Weiteres den ungeheueren Unterschied des Zustandes der Astronomie und der Geometrie bei den Alten zeigt im Vergleich zu dem, was nach der Wiederherstellung der mathematischen Wissenschaften eintrat. — Im Druck hat man die angeführten Commentare CECCOS über die Sphaera des SACROBOSCO, die er zunächst hier in Bologna herausgab. Sie wurden, nicht bei seinen Lebzeiten, vielmehr viel später, allgemein gering geschätzt, weil man ihnen Schuld gab, sie seien mit astrologischen Träumereien, mit Magie, Negromantie und Schlimmern beschmutzt, obgleich man übrigens guten Grund hat anzunehmen, dass diesen Gegenständen die Vorlesungen desselben an dieser Studienanstalt zum Theil den weitverbreiteten Ruhm, den allgemeinen Applaus verdankten, den sie nach sichern Ueberlieferungen erlangt haben [3]). Das sicherste Beweismittel dafür wäre noch die Thatsache, die von ihm berichtet wird, dass er gleich nach vollendeter Studienzeit zum Professor an dieser Anstalt gewählt sei [4]). Diese Wahl hätte daher in der Jugend CECCOS statt haben müssen,

---

1) Inferno, Canto XX am Ende.

2) Bernardino Baldi, Cronica de' matematici unter Guido Bonato p. 81. — Libri, Histoire etc. T. 2. p. 54 ff.

3) Alidosi, a. a. O.

4) De Claris Archigymnasii Bononiensis professoribus, T. 1., P. 1. p. 435.

vielleicht als er mit grossen Ehren aus dieser Schule heraustrat, und man müsste sie daher genau von der getrennt halten, welche ihn auf den Lehrstuhl brachte, von dem wir sprechen: diese, welche nicht bezweifelt werden kann, fiel in sein Greisenalter. Unter den andern Werken, die man von ihm aufzählt — es sind neun oder zehn — und die grösstentheils nur in Handschriften existieren, darf ich die beiden nicht gänzlich verschweigen, deren Titel sind: Praelectiones ordinariae Astrologiae habitae Bononiae; und Epistola seu Tractatulus de qualitate planetarum. Von ihnen spricht ihr Verfasser im Eingange zu obengenanntem Commentare, in dem er unter Anderm von der Zweiten anführt, er habe sie geschickt „*ad publicum Cancellarium Bononiae ut scholaribus suis traderet*“ — ein vielleicht nicht zu verachtendes Document von der Existenz der Würde eines Kanzlers bei der Universität Bologna schon seit jener Zeit —. Es verdient ferner das Werk CECCOS eine specielle Erwähnung, das durch Herrn Prof. LIBRI wieder in Erinnerung gebracht worden ist [1]), und dessen Titel schon seine Wichtigkeit darlegt: Historia de insulis in Oceano et Mediterraneo sitis.

Aber das in Wahrheit unsterbliche Werk CECCOS ist die Acerba, eine wissenschaftliche Encyclopädie in Vulgärversen, origineller als manches ähnliche Werk jenes Jahrhunderts, insofern es über Meteorologie und Optik, sowie über die andern Theile der Physik, über Zoologie, Mineralogie, Physiologie und überhaupt über alle Zweige der Naturwissenschaften viele Begriffe enthält, die auf überraschende Weise einigen unserer Fundamentalbegriffe sich nähern. Von den zwanzig und vielleicht noch mehr Schriftstellern, die früher sich speciell mit CECCO beschäftigt haben und mit seinen Schriften, hatte Niemand die Acerba vom wissenschaftlichen Gesichtspunct aus gebührendermassen analysiert. Diese Pflicht erfüllte vor sechs Jahren [2]) der vorgenannte berühmte LIBRI im 2. Theile seiner Geschichte der mathematischen Wissenschaften in Italien (p. 191—201), diesem Werke in dem er so viele Kränze, so vielen Ruhm für seine Nation zurückgefordert und neu erwiesen hat, einem Werke, das wir als Zünder und leitenden Meister dieser unserer Studien anerkennen. Er erfüllte

---

[1]) Histoire etc., T. 2. p. 200, note 2.

[2]) Man beachte, dass die erste Ausgabe des vorliegenden Werkes 184[illegible] [illegible] und 1844 verfasst ist. (Anm. d. Uebers.).

sie, indem er mit Recht die grosse Zahl von Gelehrten in der langen Zeit tadelte, dass sie nicht die so grossen und so vielen offendaliegenden Schätze der Acerba gesehen, und indem er die Gegenwart und Zukunft, vorzugsweise aber die Italiäner antreibt, sie endlich einmal richtig zu würdigen. Und ohne Zweifel war der erste Astrologe der bologneser Studienanstalt durch die vorgenannten Begriffe — deren beste Probe man bei LIBRI nachsehen kann —, von denen einige, die sich unter den entsprechenden Begriffen der ältesten Philosophen wiederfinden, davon die Auslese bilden, während andere unbedingt ihre Analogie nur in den Werken des allermodernsten Wissens finden, seinem Jahrhundert weit voran. Als Dichter und Schriftsteller unendlich viel unter dem Gigant, den er zum Schüler hatte, unter DANTE, übertraf er diesen als Physiker, weil er weniger Metaphysiker war, und von grösserer Originalität und Erfindungskraft in den naturwissenschaftlichen Disciplinen. Vielleicht war eben diese Originalität der Acerba in diesen Disciplinen nicht der letzte Grund für die lange Vernachlässigung, in welche sie gerieth. Uebrigens wurde sie im Jahrhundert der Erfindung der Buchdruckerkunst und im Anfange des folgenden vieler Ausgaben und eines Commentars gewürdigt, so wie sie schon vor jener Erfindung und auch noch nach derselben in vielen Handschriften verbreitet wurde. Einige ehren sie mit dem Titel eines ***Opus divinum.*** Dieser Titel blieb aber nicht haften, da er übertrieben ist, und da er nicht durch eingehende und zahlreiche Studien über dieselbe empfohlen wurde. Ihr Studium wurde aus den vorgenannten Ursachen vernachlässigt, aber auch aus folgender anderen, die besser ist: weil seine Verse für das Ohr der allergenauesten Kritiker, wie der allerleichtfertigsten nicht schön sind. Monsignor BERNARDINO BALDI nennt die Acerba nur, um ihre Verse als *äusserst plump (goffissimi)* zu tadeln — ***er schrieb***, sagt er von CECCO, ***ein Werk über Naturwissenschaften und Meteorologie in sehr plumpen Versen*** —; denn er wusste den ausgezeichneten wesentlichen Inhalt nicht zu verstehen, wie er nicht genügend TARTAGLIA begriff, um Bedeutendes GIOVANNI BATTISTA BENEDETTI verkannte (dessen Schüler in den exacten Wissenschaften GALILEI war[1]), wenn dieser es überhaupt von irgend jemand war), wie er

1) Diese Thatsache, die aus der neuen und glänzenden Analyse Libris über die Werke Benedettis sich ergibt, (M. s. Histoire etc., T. 3. p. 121

Cardan, Ferro, Bombelli, Ferrari und andere ausgezeichnete Geister seiner Zeit gar nicht nannte — nämlich in seiner erwähnten Cronica —: um aber jeden dieser Männer zu begreifen und gerecht zu würdigen, war es nicht genug, in den ***Mathematici veteres*** sehr bekannt, gelehrt und erfahren zu sein, wie er es in der grossen Schule des Commandin gelernt hatte.

Libri beklagt, dass die Acerba wenig gelesen sei und auch noch immer zu wenig gelesen werde, und fügt hinzu, dass sie vielleicht mehr gelesen sein würde, wenn man davon wenigstens eine erträgliche Ausgabe besässe, dass alle Ausgaben, die er davon gesehen — und die jüngste und beste von ihm citierte ist von 1510 —, abscheulich seien, der Text sei darin in jedem Verse verändert [1]). Er kannte also die feine und schöne Ausgabe der Acerba in 8⁰ nicht, die Andreola im Jahre 1820 in Venedig besorgte unter der Aufsicht der sehr lobenswerthen Herausgeber

---

u. ff. und p. 161. Anm. 2) wurde von dem gewichtigen, wohlverdienten und scharfsinnigen Michel Angelo Ricci in einem seiner Briefe vom 14. Nov. 1666 an den Fürsten Leopold v. Toscana *vollständig klar* ausgesprochen. Zur Bestätigung der Analyse Libris nach dieser Seite hin, und zum Beweise des genauen Studiums, das man zu jener Zeit in Italien über die neuern vaterländischen Mathematiker anstellte, scheint es mir vortheilhaft, die eigenen Worte Riccis zu wiederholen, von denen ich nicht wüsste, dass schon jemals jemand darauf hingewiesen hätte; da sind sie: *„Es sind von Lorenzo Crasso die Lebens-„beschreibungen verschiedener Litteraten herausgekommen, und wo er von Galilei „spricht, habe ich mit Bedauern gesehen, dass er das Mediceische Gestirn von „den Jupiterstrabanten unterscheidet . . . .: dass er Galilei zu furchtsam dar-„stellt, seine Hauptmeinungen über die Naturphilosophie bekannt zu machen, von „denen er glaubt, er habe sie aus Celio Calcagnini und Patrizio geschöpft, „mit Verschweigung Benedettis, der ihm die Wege mehr wie jeder andere bahnte „und für ihn vielleicht der einzige Lehrmeister bei seiner Philosophie war, wie es „Ew. Hoheit durch Vergleichung der Gedanken des Einen mit denen des Andern, „die so in Uebereinstimmung sind, wohl gemerkt haben* (M. s. Angelo Fabroni, Lettere inedite di uomini illustri, T. 2. Firenze 1775, p. 142). Um in gewisser Weise den letzten der drei Fehler des Crasso zu entschuldigen, den der erhabene Kardinal bemerkt hat, mag man sich erinnern, dass Celio Calcagnini seinen kleinen Tractat: Quod Coelum stet, terra autem moveatur vor 1543 herausgab, in welchem Jahre das unsterbliche Werk des Copernicus: De revolutionibus orbium coelestium veröffentlicht wurde (M. s. Tiraboschi, Storia della Letteratura Italiana, T. 8, P. 2. Appendice al Capo 2, Memoria 1ª.; und M. Tommaso Guido Calcagnini, Della vita e degli Scritti di Celio Calcagnini, Commentario, Roma 1818, p. 30—31).

1) Histoire etc. T. 2. p. 194—195, note 2.

eines Parnaso Italiano, welche in dem Vorbericht an den Leser in dem Bändchen der Acerba – es ist der XII. des genannten Parnaso, Secolo II. Didascalici Primi — mit vollem Rechte auf die Verläumdungen anderer in Bezug ihres trefflichen Unternehmens mit folgenden Worten entgegen: „*Wer unsern Parnass* „*sieht, hat die Genugthuung, das lesen zu können, was bis* „*dahin nicht lesbar war*“ (p. XIII). In dieser Ausgabe konnte ich ohne Beschwerde alle Stellen der Acerba und ihren Sinn vergleichen, die LIBRI mit Hilfe vorgenannter Ausgabe von 1510 und verschiedener Handschriften citiert, und da ich keine bemerkenswerthen Unterschiede gefunden habe, glaubte ich dies für ein Kriterium der Genauigkeit der venetianischen Herausgeber halten zu dürfen, da die Genauigkeit LIBRIS in ähnlichen Materien sehr zuverlässig ist.

Drei schöne Codices des Gedichtes in Rede existieren in der Bibliothek dieser Universität [1]). Der Herr Bibliothekar DR. VEGGETTI (dem man für eine nochmalige genaue Vergleichung und für die Ordnung der zahlreichen handschriftlichen Codices dieser Bibliothek zu Dank verpflichtet ist) machte mich darauf aufmerksam und überliess sie mir zur Benutzung, als ich an der Hand des obengedachten Bandes von LIBRI einige Studien über die Acerba machte, die mich wünschen liessen, einen Codex nachzuschlagen. Würdig und geziemend wäre es für uns, Hochgeehrteste Collegen, dass wir den Spuren und den Anspornungen des grossen Mathematikers und tiefen Gelehrten folgend daraus Nutzen zögen; von ihm, dem es gefiel, solche und so zahlreiche andere kleinliche und beschwerliche Vergleiche anzustellen in der edlen Absicht, das vaterländische Wissen in all seine Rechte wieder einzusetzen.

Nur Unwissenheit und Wohlgefallen an Spitzfindigkeiten haben einigen Kritikern eingegeben und bei andern die unhaltbare Con-

---

1) Hier die Bezeichnungen entnommen aus den alten Katalogen der Bibliothek: I. Cecco d'Ascoli, Tractatus qui dicitur Accerbactus volgarmente l'Acerba ecc. Am Ende steht: *Finis Laus Deo 1462 die duodecimo mensis Augusti per me Joannem de Fabis Notarium transcriptus.* Codex chartaceus An. 1462. fol. — II. Dasselbe mit dem Titel Acerbattas (*Tractatus qui dicitur Acerbattas*); Codex chartaceus Saeculi XV. fol. — III. Dasselbe mit dem Titel Liber Acerbae Aetatis; Codex chartaceus Saeculi XIV. 4°. Bemerkenswerth ist, dass der zweite in Terzinen, der erste und dritte dagegen in Sestinen geschrieben sind.

jectur zur Geltung bringen können, dass der sonderbare Name, unter dem sich das Gedicht der Acerba fortgepflanzt hat, aus der Absicht des Verfassers entsprungen sei, von vornherein anzudeuten, dieses Werk sei eine Frucht seiner ***unreifen (acerbi)*** oder jugendlichen Studien; und das in blinder Beobachtung des Titels: Liber Acerbae Aetatis magistri Cechi de Eschulo, den man als Aufschrift in gewissen Handschriften und älteren Ausgaben der Acerba liest, von jenen vielen, die von dem wohlverdienten QUADRIO und MAZZUCHELLI und andern durchgesehen sind. Ausser dem Ernste des Werkes überreden nicht wenige Stellen desselben, die beim Durchblättern sogleich in die Augen springen, dass wenn auch der ASCOLANER sie in der Jugend angefangen, er doch den wesentlichen Inhalt sicherlich erst spät hineintrug und es erst im reifern Alter der Feile unterzog voller Erfahrung und Kenntniss. Folgende Verse aber, mit denen er zornig Bologna anredet:

> ***„O Bolognesi, o, anime di foco***
> ***„A picol tempo ueneriti al punto***
> ***„Che cadera Bologna apoco apoco***
> ***„Or ue ricordi, comel divin archo***
> ***„Oñe peccato con la pena a giunto***
> ***„Et aspectando assay più se fa carcho*** [1]),

Verse (sicherlich nicht plump), mit denen das Capitel XV des 2. Buches der Acerba beginnt, wurden von CECCO höchst wahrscheinlich, als er auf Bologna übel zu sprechen war, verfasst [2]); nicht

---

1) Wir haben diese Sestine wörtlich aus dem ältesten der drei vorgenannten Codices der hiesigen Bibliothek copiert. Im Wortlaut dieser Sestine haben die genannten venetianischen Herausgeber der Acerba sich einige Freiheit im zweiten und sechsten Verse genommen, die sie so drucken lassen: „*In picciol tempo arriverete al punto*" und „*Ed aspettando più, più si fa carco.*" In allen drei Handschriften nämlich liest man an Stelle der Präposition *In* die andere *A* und anstatt *arriverete* findet sich *ueneriti, voy verete, vui uērete;* ebenso findet sich in allen drei Handschriften an Stelle des ersten *più* des letzten Verses das Wort *assay*, das nur im jüngsten *assai* geschrieben ist.

2) Man weiss dass er die ersten Angriffe, die Wurzel seines letzten Leidens, in dieser Stadt aushielt durch die Intriguen, wie man sagt, eines Tommaso Del Garbo, eines Florentiner Arztes und zugleich seines Rivalen bei Bewerbung um die Professur an dieser Studienanstalt. (Alidosi, a. a. O.; Mazzuchelli, Gli scrittori d'Italia, Vol. 1. P. 2. p. 1151 ff. unter [illegible] *Francesco d'*)).

eher also als 1322, denn nicht früher fing er an, die seinem Processe, der ihn zu Grunde richtete, zunächstliegende Professur auszuüben, wenn es nicht die einzige war, die er inne hatte: und es ist ferner allbekannt, dass er im Jahre 1327 zu Florenz im Alter von 70 Jahren zu Tode gebracht wurde [1]). Wegen des kurzen Zeitraums zwischen seinem Eintritt in genannte Professur und seinem Tod ist es sogar anzunehmen erlaubt, dass er Theile der Acerba während seiner Professur selbst verfasste und sie seinen Zuhörern mittheilte. Diese Conjecturen erhalten grosse Wahrscheinlichkeit aus dem Grunde, dass das Gedicht in Rede sich als unvollendet zeigt, mit seinem letzten Buche von einer Kürze, die zuviel zu wünschen lässt, als dass man es für beendigt halten könnte, mit seinem letzten als untergeschoben angesehenen Capitel, u. s. w. [2])

Sehr wahrscheinlich ist dagegen die Meinung anderer Kritiker, gelehrter und geachteter als die obengenannten, dass nämlich mit *acervo* oder *acerbo*, was später durch Unwissenheit der Abschreiber in *acerba* verdreht sei, Cecco die Absicht gehabt habe, die Masse oder die Anhäufung von Kenntnissen und kühnen Behauptungen über fast alles Wissbare zu bezeichnen, was sein Werk ist [3]).

---

1) Alles bringt zu dem Glauben, dass er nach dem Geschmacke der Braten (*arrosti*), wie ihn die *Heiligste* Inquisition so sehr liebte!, lebendig verbrannt wurde. Wir erlauben uns hierüber einen Auszug aus der Biographie Ceccos mitzutheilen, die in dem Dizionario Biografico Universale per cura di Fr. Predari, Milano 1865—1867, Vol. 2°. p. 629 enthalten ist: „Stabili (Francesco) bekannter unter dem Namen Cecco d'Ascoli . . . . „wurde in der Stadt Ascoli im Jahre 1257 geboren. Vor dem Inquisitions„tribunal in Bologna angeklagt, *er habe schlecht und gegen die Regel von dem „katholischen Glauben gesprochen*, wurde er zu öffentlicher Busse, zu einer Geld„strafe und zum Verluste seiner Titel eines Lehrers und Doctors verurtheilt, „ausserdem wurden ihm seine sämmtlichen astrologischen Schriften weggenommen. „Sehr niedergeschlagen über ein so hartes Urtheil verliess er Bologna und „begab sich nach Florenz. Aber das heilige Ufficium folgte ihm immer „auf dem Fusse, und hier erwartete ihn noch grösseres Unglück . . . . Aus „dem Texte des Decretes des Inquisitors von Florenz selbst ergibt sich, „*dass er unter Anklage der Ketzerei zum Feuertode verdammt wurde*, und dieses „gottlose Urtheil wurde im Laufe des Jahres 1327 öffentlich vollstreckt.“

2) Libri, Histoire etc., T. 2. p. 194, Anm. 1.

3) Dieser Meinung, zuerst durch eine grosses Aufsehen machende Kritik des P. Quadrio (Della Storia e delle Ragione d'ogni Poesia, Vol. 4, p. 38—41, Ausgabe von Bologna; Libri, Histoire etc., T. 2. p. 192—193, Anm. 2) empfohlen, muss man sofort zustimmen. Aber wie dann

Nicht so sehr die Astrologie und Magie an sich, welche dieses Werk, was auch behauptet wird, verunstalten, als vielmehr, dass der Verfasser für einen Astrolog und nichtsnutzigen Negromant erklärt wurde, trug dazu bei, sie auch bei den Neuern in Misscredit zu setzen und zu bewirken, dass sie nicht gelesen wurden. Aber unsere Zeiten sind wahrhaftig nicht mehr, Gott sei gedankt, danach angethan, sich durch dergleichen Vorurtheile berücken zu lassen und nicht die Strahlen aufzunehmen und zur Kenntnissnahme zu empfehlen, die in Mitten der dichtesten Finsterniss erscheinen, die Niemandem mehr grosse Furcht einjagt. Und dennoch musste ich mich vor einiger Zeit sehr verwundern, dass einer unserer italiänischen Gelehrten, dem ich in Etwas meinen Aerger bemerklich machte, dass er in einem bestimmten wissensehaftlichen Werke in keiner Weise Cecco und seine Acerba erwähnt hätte, ganz offen antwortete: „*Sie bemerken* „*mir, dass Sie keine Notiz* (in seinem Werke) *der Acerba des* „*Cecco d'Ascoli gefunden haben; aber mir scheint, man* „*dürfe ein Buch nicht erwähnen, das eher die Arbeit eines* „*Astrologen genannt werden kann, als das eines urtheilsvollen* „*Schriftstellers.*“ Wenn ich geglaubt hätte, dass diese Behauptung der Mühe einer Antwort werth wäre, so würde diese gewesen sein: dass (von demselben Gesichtspuncte aus, von dem ich sie dem Gelehrten empfohlen hatte) die Arbeit unter Andern so weder

---

die Einfügung des obenerwähnten Titels: Liber Acerbae Aetatis und anderer ähnlicher erklären? Jener hochgelehrte Schriftsteller nimmt als das Wahrscheinlichste an, dass der von Cecco selbst geschriebene Titel des Gedichtes Liber Acervatus gewesen sei, der nach seiner Erklärung sehr nahe die Absicht des Dichters ausspricht, und dass man durch starke und immer grössere Verstümmelungen dieses Titels durch die Abschreiber zu den Titeln übergegangen sei: Liber Acerbatus, Liber Acerbattus, Liber Acerbae Aetatis, Acerba Aetas, u. s. w. „*In der That*“, fügt er hinzu (p. 40), „*von den so zahlreichen Manuscripten, die ich von diesem Werke ange-* „*merkt habe, sind die, welche die letzten Titelformen haben*, der Zeit nach „sämmtlich später als jene andern, *die den Titel* Acerbattus *tragen.*“ Ich bedaure, dass diese Beweisführung durch die drei genannten Handschriften der hiesigen Bibliothek widerlegt wird. Denn, wie aus unserer betreffenden Anmerkung erhellt, ist die älteste von ihnen gerade diejenige, welche den Titel Liber Acerbae Aetatis hat, von dem ich, um nach Art Quadrios zu argumentieren, sagen müsste, er sei später in die Titel Acerbattas, Acerbattus der beiden andern Codices umgewandelt. Es wäre übrigens möglich, dass sie sämmtlich aus einem noch älteren Manuscripte abgeschrieben wären, als sie selbst sind, das die Bezeichnung Acervatus oder ähnliche trug.

von CRESCIMBENI beurtheilt würde, noch von APPIANI, noch von ANTONELLI, noch von QUADRIO, noch von MAZZUCHELLI u. A. Alle diese Schriftsteller von anerkannter Autorität, wie sie CECCO einerseits einen schätzbaren litterarischen Ruhm zuerkennen in Anbetracht seines Gedichtes und anderer Versuche in von ihm erfundenen Versmass [1]), so erheben sie sich sogar dazu, ihn mit nicht genug zu lobender Humanität und Billigkeit gegen jene Beschuldigungen zu vertheidigen, die an Gedanken und astrologische Tractate von ihm anhaften, die sein so herbes Geschick herbeiführten. In diesem verdienstlichen Werke zeichneten sich am Meisten ANTONELLI aus Ascoli und der P. APPIANI von der Gesellschaft Jesu aus durch ihre vertheidigenden Lebensschilderungen CECCOS. Ueber diesen und sein erwähntes Ende schliessen wir mit Wiedergabe eines Abschnittes bei QUADRIO, einer andern Zierde desselben Ordens, der mir darüber sehr richtig zu sein scheint und gerade geeignet, die Zeiten CECCOS zu charakterisieren: „***Es waren diese Zeiten***", sagt also QUADRIO [2]), „***so*** „***durch Unwissenheit versperrt, dass jeder Mensch, der auch*** „***nur ein klein Wenig in den mathematischen Wissenschaften*** „***und der Naturphilosophie unterrichtet war, unter dem Volke*** „***sogleich als Zauberer verschrieen wurde und als Zugabe*** „***eingekerkert und verurtheilt.***"

Und damit setze ich auch meinen Betrachtungen über die erste Epoche ein Ziel und gehe sogleich zur zweiten über, ohne für jetzt Etwas dem Wenigen hinzuzufügen, was ich schon in Bezug auf Beschaffenheit, Zahl und Verbindung der Unterrichtsfächer in dieser Facultät bemerkt habe. Dieses Thema habe ich angekündigt, wollte ich mit der nöthigen Ausführlichkeit behandeln, wenn ich speciell über die Zwischenräume zwischen einer Epoche und der folgenden spräche. Der Stoff aber, den mir Gelegenheit gegeben war zu diesem Zwecke in Betreff der beiden ältesten Epochen zu sammeln, gehört vielmehr der zweiten und dem Intervalle zwischen dieser und der dritten an, als der ersten; die Behandlung wird daher vortheilhaft der der Docenten der zweiten Epoche nachgestellt. Sie wird sogar den vorliegenden

---

1) Cecco d'Ascoli gilt als Erfinder des *le Zingaresche* genannten Metrums (Quadrio, Della Storia etc. d'ogni Poesia, Vol. 2. Lib. 2. p. 284; Mailänder Ausgabe).

2) Della Storia etc. d'ogni Poesia, Vol. 4, p. 39.

bis 1492), der nicht, wie MONTUCLA annimmt, ein Vorfahr der MANFREDI unserer Tage ist. Er hatte eine der Professuren der Astronomie inne, verband sie aber mehrfach mit einer Professur der Medicin, obwohl er weder in der einen noch andern Wissenschaft irgend etwas Nennenswerthes geleistet hat. In der Kirche S. Margherita in Bologna (jetzt schon seit Napoleon I. Zeiten geschlossen und zu profanen Zwecken benutzt) liess ihm sein Sohn folgende Grabschrift setzen:

„*Hieronymo Manfredo Bonon. Philosopho ac Medico suae*
„*aetatis nemini secundo Astronomorumque citra invidiam*
„*facile primario posuit superstes Joan. filius suisque po-*
„*steris, vale atque illum valere opta.*"

Ein anderes Epigramm auf seinen Tod, das uns, so wie die Grabschrift, ALIDOSI [1]) aufbewahrt hat, verfasst durch Cav. CASIO in ähnlichen übertriebenen und schwülstigen Redensarten und Lobpreisungen, lautet:

„*Il Felsineo Hieronimo Manfredo*
„*Fu tanto eccelso in prattica, e dottrina*
„*Di Astrologia professo, et Medicina*
„*Che non humano, anzi divino il credo.*

Wie war es möglich, jemand, der in der Astronomie Nichts, in der Medicin nur das Centiloquium de medicis et infirmis hinterlassen, ein Buch, das trotz seiner drei kurz hintereinander erfolgten Auflagen (Bononiae 1489, Venetiis 1500, Norimbergae 1510) nicht werth ist, im Gedächtniss der Nachwelt fortzuleben, in solcher Weise hoch zu stellen? 2. LUCA GAURICO (1506), wohlberühmt. Gleichwohl ist GAURICO *heute* fast nur noch durch seine merkwürdigen Prophezeiungen mit Hilfe der *Astrologia judiciaria* bekannt. Vielleicht das einzige Mal, dass eine solche eintraf, wiederfuhr ihm selbst durch sie ein Unglück, so dass er sich wohl gehütet haben würde, das Unglück anderer vorauszusagen, wenn er sein eigenes hätte voraussehen können. — Man höre darüber folgendes Bruchstück aus der Geschichte Bolognas. — Die BENTIVOGLI, im XII. Jahrhundert noch *Einwohner*, während des ganzen XV. Jahrhunderts von GIOVANNI I. bis GIOVANNI II. mit wechselndem Glücke *Herrscher* von Bo-

1) Li Dottori bolognesi ecc., p. 91.

logna, errichteten ihren Thurm neben ihrem eigenen grossartigen weitberühmten Palaste erst gegen Ende des genannten XV. Jahrhunderts; dieser Thurm, der da gleichsam ein Symbol und eine Vorbedeutung ihrer höchsten Erhöhung und zugleich des plötzlichen Ruins der Familie werden sollte. Am 3. November 1489 feierte GIOVANNI II. mit seinen Söhnen, nachdem durch das Horoscop der Astrologen *die beste Constellation der Sterne bestimmt war* (diese Astrologen waren vielleicht D. M. HIERONYMUS MANFREDUS, ein gewisser D. M. FERNANDUS DE VILLALOBOS CORDUBENSIS, DOMINICUS MARIA DE FERRARIA u. s. w., die in den Acten der Bologneser Studienanstalt sämmtlich im genannten Jahre *ad Astronomiam* aufgeführt sind), die Ceremonie des ersten Spatenstiches zum Fundamente des Thurmes. — Den 18. Januar 1490 wurde der Grundstein mit dem Wappen der BENTIVOGLI gelegt. — Im October 1495 war die Maurerarbeit fertig. — Aber kaum war der stolze Thurm, an Höhe mit dem höchsten noch heute bestehenden Thurme der Asinelli wetteifernd, vollendet, *als er vom Blitze getroffen wurde.* Die Schmeichler, *Nichtastrologen*, hatten darin eine Weihe desselben gesehen; aber um diesen Irrthum zu nehmen kam das Erdbeben von 1505, das den Palast und den Thurm dazu zerspaltete und zerriss und den Palast mit völligem Einsturze bedrohte. — Der Astrologe LUCA GAURICO *sagte daraus das Ende der fürstlichen Burg und der Dynastie voraus:* **vier bis fünf heftige Züge mit dem Seil** (bekannte Art der Folter) **und fünfundzwanzig Tage schweren Kerkers** *machten ihn darauf aufmerksam, ein besserer Prophet für die Grossen zu sein* [1]). Aber das Geschick, das diesmal dem Astrologen Recht gab, riss sehr bald die Höhe

---

1) Gaurico, später von Paul III., der den Astrologen wohlwollte, zum Bischof von Civitate im Königreich Neapel gemacht (es war dies derselbe Papst Paul III., welchem Copernicus sein Hauptwerk De revolutionibus orbium coelestium Libri VI. widmete, das er, nachdem er durch seine Freunde zuletzt den Cardinal Schönberg dazu dringend aufgefordert war, seit 1536 zu veröffentlichen beschlossen, und das erst 1543 gleichzeitig mit seinem Tode erschien), bezieht sich selbst offenbar auf dieses ihm geschehene Unglück mit folgenden Worten seiner Widmung des Tractatus de Sphaera an den Cardinal Cristoforo Madrucci: „*Quippe, qui „dum tu adolescens in Civitate Felsinea literarum studiis invigilares, me insontem „in carceribus detrusum in praetorio a lictoribus et impiis latronum manibus atque „lividorum insidiis eripuisti cum honore maximo.*“ (M. s. die Sammlung seiner Werke Basel 1575, 3 Bde. in fol., T. 1., p. 12).

GIOVANNI II. und seiner Dynastie nieder: dem Exil von 1506 folgte der erfolglose Restaurationsversuch von 1507 und diesem die Rache des Volkes, welches in wenigen Tagen den Palast vollständig der Erde gleichmachte und mit Vernichtung auch des Thurmes endete. 3. LODOVICO VITALI (1504—1553), und andere, welche diesen ersten um Weniges vorausgingen, sie begleiteten oder ihnen unmittelbar auf denselben Lehrstühlen an der Studienanstalt zu Bologna folgten (die drei aufgeführten waren nämlich sämmtlich für die Astronomie). Man könnte auch GIOVANNI BIANCHINI erwähnen, der um 1455 blühete, wenn auch nicht Docent in Bologna und lange in Ferrara lebend, wo er das Bürgerrecht erworben, da er in Bologna geboren wurde und dort auch wahrscheinlich die ersten Unterweisungen in dem Studium der Astronomie oder Astrologie, durch welche er vorzugsweise berühmt ist, erhielt [1]). BIANCHINI ist aber auch bekannt durch Arbeiten in der Arithmetik, Algebra und Geometrie. Es dürfte auch wohl nöthig sein, eines Instrumentes Erwähnung zu thun, das er erfand, um jedes Object in Sehweite oder auf kurze Distanz zu messen [2]).

Der Name jedoch, der diese Epoche der mathematischen Facultät der bologneser Studienanstalt am Weitesten berühmt gemacht und am Meisten in dem allgemeinen Gedächtniss der Nachwelt befestigt hat, ist der eines Schülers; der des NICOLAUS COPERNICUS nämlich, der hierher um das Jahr 1497 kam, ehe er nach Rom ging, um dort einem Lehrstuhl der Mathematik Glanz zu verleihen, und nachdem er philosophischen und medicinischen Studien auf der Universität Padua obgelegen [3]); hierhergekommen als Jüngling von fünf Lustren, gerufen durch das

---

1) Ehe man über meine Gewohnheit, dass ich für diese ersten Epochen die Worte Astronomie und Astrologie verwechsele oder ohne Unterschied gebrauche, ein schiefes Gesicht oder mir Vorwürfe macht, möge man in Geduld den Rest der gegenwärtigen Schrift zu sehen abwarten, und vor Allem das, was ich über diesen Gegenstand, *der nicht blos reine Wortangelegenheit ist*, schon für die Schrift, welche dieser folgen soll, vorbereitet habe.

2) Fantuzzi, Notizie degli Scrittori Bolognesi, T. 2., p. 180 und 186. — Libri, Histoire etc., T. 3., p. 98.

3) Der Aufenthalt des Copernicus in Padua bei diesem ersten Aufenthalte in Italien ist sehr zweifelhaft. Jedenfalls ist die Angabe Papadopolis, dass Copernicus 1499 in Padua den medicinischen Doctorgrad erworben, unwahr, da nach den neuerlichen Forschungen Prowes und Hiplers aus ermländischen Archivalien feststeht, dass Copernicus vor seinem zweiten Aufenthalte in Italien (1501—1506) medicinische Studien nicht gemacht hat. (Anm. d. Uebers.).

Renommé der Anstalt und den ausgezeichneten Ruf der Gelehrsamkeit des DOMENICO MARIA hielt er sich hier einige Zeit auf, um mit diesem zu lernen, zu vergleichen und seine geliebten astronomischen Studien zu treiben und ihn auch in diesen Studien und seinen astronomischen Beobachtungen zu unterstützen (wir sagen dies nur mit den Landsleuten des COPERNICUS). DOMENICO MARIA war damals in dem frischen Alter von 33 Jahren, obschon er davon 14 in dem öffentlichen Amte an genannter Anstalt gezählt hatte [1]). COPERNICUS hat selbst die Zeit seines Aufenthaltes in dieser Stadt bestimmt, da er in seinen Schriften hinterlassen hat, dass er an einem gewissen Tage des Jahres 1497 *(septimo Idus, 9, Martij)* um fünf Uhr Nachts hier die merkwürdige Bedeckung des glänzendsten Sternes *(Palilicium, Aldebaran)* der Hyaden hinter dem dunklen Theile des abnehmenden Mondes und in grösster Nähe des südlichen Horns desselben beobachtete. Diese Beobachtung macht er in seinem Riesenwerke zum Hauptpunct, um die Wahrheit seiner Behauptungen über die Mondparallaxe darzuthun [2]).

Da man um diese Zeit eine grosse Bewegung in dem mathematischen Unterrichte der Universität eintreten sieht, indem man in den entsprechenden ***Rotoli*** ein, zwei und endlich drei dem Hauptdocenten beigegebene Docenten aufgeführt findet; da diese Assistenten sehr häufig wechseln, und für eine specielle astronomische Vorlesung jedes Jahr der Professor wechselt, worüber in einer andern Schrift geredet werden soll; da alle für diese specielle Vorlesung Bezeichneten fast immer Auswärtige, nicht selten selbst nicht einmal Italiäner sind, sondern Spanier, Russen, Polen, Deutsche (von Franzosen sah ich nicht einen!), so entstand schnell der Wunsch, die Hoffnung, in diesen ***Rotoli*** die ruhmvolle Spur jenes grossen Namens aufzufinden, aber obwohl ich sie aufmerksam durchsuchte und wieder durchsuchte, ist diese Spur nicht vorhanden. Von dieser Eigenthümlichkeit will ich nicht sagen, dass sie einen sichern Grund dafür angäbe, dass COPERNICUS hier mehr Schüler als wie Assistent des NOVARA war, sondern nur, dass sie dafür ein wahrscheinliches und begründetes Indicium liefert.

---

1) Diese Behauptung, dass Domenico Maria erst 33 Jahre zählte, als Copernicus nach Bologna kam, wird später durch den Verfasser selbst widerlegt. Novara zählte damals 43 Jahre. (Anm. d. Uebers.).

2) De Revolutionibus Orbium Coelestium: Lib. 4., Cap. 27, Bltt. 128b — 129a der beiden ersten Ausgaben.

Es ist unzweifelhaft, dass die Epoche, von der wir eben sprechen, dass speciell Novara zum grossen Theile Copernicus den Ruf verdanken, mit welchem sie gewöhnlich in das Gedächtniss zurückzukommen pflegen. Es ist aber andererseits ebenso gewiss wahr, dass noch Niemand, soviel ich weiss, die Gleichzeitigkeit des Scipione Ferro und des Pacioli mit Novara an dieser Studienanstalt hervorgehoben; durch den ersten von diesen — auch vom zweiten abgesehen, da er hier nur ein kurzes Jahr sich aufhielt — erlangt die Epoche an und für sich schon eine vollständig von der Astronomie von Copernicus und von Novara unabhängige Berühmtheit; wie es auch ebenso sicher wahr ist, dass Letzterer eine grosse Achtung, die ganz sein eigenes Werk war, hinterliess, die viel allgemeiner anerkannt werden sollte, als sie es ist.

Und von ihm wollen wir beginnen. Er bestimmte, wie Libri schreibt [1], von Neuem die Positionen der Sterne, die im Almagest des Ptolemaeus enthalten sind: wenn dieses sich so verhält, so dürfte es mehr als nöthig hinreichen, damit ihm ohne jeden Zweifel die Eigenschaft eines *beobachtenden Astronomen* zuerkannt werde [2], die wir ihm aus vielen andern, vielleicht sicherern Gründen zukommen sehen werden. Da er selbst die Polhöhen für die verschiedenen Städte Italiens und auch für die Meerenge von Giberaltar im Allgemeinen um einen Grad und mehr grösser fand, als sie von Ptolemaeus angegeben waren, so zog er daraus die kühne Folgerung, und hatte den Muth, sie zu veröffentlichen, dass die Achse der täglichen Bewegung ihre Richtung in der Zeit zwischen dem alexandrinischen Astronomen und ihm verändert, dass unser Pol sich dem Zenit genähert habe [3]; diese Annahme, die von ihm in einem gewissen Prognosticon acht Jahre, bevor er Copernicus kennen lernte, veröffentlicht wurde, begegnete zu seiner Genugthuung dem Geiste dieses [4]) und

---

1) Histoire etc., T. 3., p. 99.

2) Montucla, der von Novara nur erwähnt, dass er Lehrer des Copernicus gewesen, und die nicht hinreichend begründete Meinung ausspricht, die wir sogleich mittheilen werden, lässt in seiner Geschichte folgende Worte lesen: „*Maria fut de plus, à ce qu'il paroit, observateur.*" (Histoire des Mathématiques, T. 1., p. 540, nouvelle édition).

3) Gassendi, Vita Nicolai Copernici, Opera Miscellanea. T. 5., p. 441.

4) Gassendi, a. a. O.

wurde ihm später zu grossem Verdienste angerechnet, und wenn nicht anders um deswegen, dass er mit ihr sich gegen das tief eingewurzelte und bis auf seine Zeit allseitig für richtig angenommene Vorurtheil — das auch viele Jahre nach ihm festgehalten und eingeschärft wurde — zu erheben gewagt hatte, nämlich gegen das von der Unveränderlichkeit der Elemente des Weltsystems. Es ist dies der einzige wirkliche Ehrentitel, den man für gewöhnlich heutigen Tages von NOVARA erwähnt; man will ausserdem, dass er ihn mit einem andern theile, mit einem neapolitanischen Rechtsgelehrten, der ungefähr um dieselbe Zeit die vorgenannte Conjectur vorgeschlagen habe [1]).

Wenn man aber die wichtigsten astronomischen Werke des XVI. und XVII. Jahrhunderts durchblättert, findet man nicht selten NOVARA als Autorität für Beobachtungen, für Beobachtungs- und Rechnungsmethoden, für eigenthümliche Ideen citiert, und bei alle dem eine Verehrung für ihn, die derjenigen gleicht, die man nur den gelehrtesten Menschen bezeugt. Ich begnüge mich mit Anführung weniger Beispiele, die Auslese von denen, auf die ich gestossen bin; sicherlich würden jedoch die in diesem Berufe Erfahrenen noch viele andere und vielleicht weit geeignetere finden, als die meinigen sind. Als erste Thatsache theile ich gern eine Stelle mit aus dem Directorium Generale Uranometricum des CAVALIERI; es ist ein Ehrentribut für seine berühmten Vorgänger auf dem Lehrstuhle dieser Studienanstalt. Dieser Tribut konnte seinerseits im Angesicht der ganzen Welt nicht mit grösserer Sorgfalt verfasst sein, da das Directorium Uranometricum allen seinen grösseren und kleineren Werken vorausgeht. Hier die Stelle, die man auf Seite 6 der Vorrede an den Leser [2]) findet: „*Cum ergo alijs studijs ipse detinerer, ac meo publice* „*Mathematica explicanda offitio perfungerer, nihil minus, quam* „*de hoc opere construendo cogitabam: cum vero ad Astrono*„*mica studia prae caeteris propaganda animum adderem, ut* „*praedecessorum meorum vestigijs inhaererem, qui adeo Astro*„*nomiam excoluerunt, nempe inter caeteros praestantissimi* „*viri* ***Dominicus Maria Ferrariensis Copernici Prae***„***ceptor, P. Magister Ignatius Dantes Ord. Praedicatorum,*** „*nec non* ***Maginus*** *etc.*“ — Der hochgelehrte und hochberühmte

1) Libri, Histoire etc., T. 3., p. 99.

2) Directorium Generale Uranometricum, Bononiae 1632.

Pater Giovanni Battista Riccioli in seiner doppelten Chronik der Astronomen oder Astrologen und Kosmographen, die am Anfange des ersten Theiles des 1. Bandes seines Almagestum Novum enthalten ist, bemerkt, indem er seinen Landsmann Domenico Maria Novara anführt, unter den andern Vorzügen desselben, dass er durch sein Wort und das Beispiel seiner Beobachtungen seine Schüler zur Wiederherstellung der astronomischen Wissenschaft angespornt, und dass man von ihm sage, er habe die grösste Declination der Sonne, oder, was dasselbe ist, die Schiefe der Ekliptik zu 23° 29′ bestimmt. Das Verdienst in solcher Bestimmung [1]) unermüdlich zu sein, von der man die grosse Ausdauer in den Beobachtungen, die sie verlangt, kennt, ist nicht gering. Den späteren Astronomen dieses wichtige Datum verschafft zu haben, darf man für das wichtige Geschäft der Auffindung der fortschreitenden Abnahme der vorgenannten Schiefe der Ekliptik nicht gering anschlagen. Es scheint auch unglaublich, dass er selbst nicht die Thatsache dieser Abnahme bemerkt haben sollte. Denn es kann ihm nicht unbekannt geblieben sein, dass die Schiefe der Ekliptik zu den Zeiten des Aratus zu 24 Grad geschätzt wurde, dass fünf Jahrhunderte später Ptolemaeus sie nur 23° 51′ 20″ fand, und dass noch spätere Astronomen als diese sie immer kleiner und kleiner bestimmten: er fand sie noch kleiner als alle früheren, musste also entweder die fortschreitende Abnahme annehmen, oder meinen, die alten Beobachtungen seien merkwürdig ungenau. Ohne Weiteres sieht man, welche von den beiden Annahmen der, welcher die Veränderung der Weltaxe ankündigte, lieber ergreifen musste. Aber darüber in unserer dieser folgenden Schrift; indessen darf ich nicht verschweigen, dass die Thatsache, von der ich annahm, sie könne Novara nicht unbekannt geblieben sein, sich in dem Werke seines berühmtesten Schülers bemerkt und erklärt findet [2]).

---

1) „*Dominicus Maria Italus inquit eandem (maximam Solis declinationem)* „*habere gr. 23. mi. 29.*“, so lese ich im Commentar des Clavius zur Sphaera des Sacrobosco (Romae, 1570, p. 130), und Clavius, fast um ein Jahrhundert dem Novara näher als Riccioli, muss daher in diesem Puncte noch grösseres Vertrauen geniessen als jener. Auch Pifferi Sansovino zählt in seiner Sfera di G. Sacro Bosco tradotta e dichiarata, Siena 1604, den Angaben des Clavius folgend den Domenico Maria unter die Astronomen, welche die grösste Declination der Sonne bestimmt haben. (p. 255).

2) Copernicus, De Revolutionibus Orbium Coelestium, Lib. 2., Cap. 2.; Lib. 3., Cap. 2. und Cap. 10.

„Directionum tuarum nova forma sublucet mihi, quam „quidem a diurno Solis apparenti motu derivas. Sed cum „librum nondum habuerim, in quo rationes reperiam, funda- „menta, et pericula tua non diffundar in multis. Scito tan- „tum, Dominicum Mariam Ferrariensem, Copernici praecep- „torem, fuisse una fere simili dirigendi via usum. Scripta „egregii hujus Mathematici apud Abbatem Ludovicum Mar- „cellum, meum consobrinum, sunt. Tu dirigis Lunam eodem „modo, quo Solem: Dominicus Maria Ferrariensis non. Tu „subsequenti Solis motu diurno unius ejusdem anni (ni fallor) „metiris directionum omnium spatium: Ferrariensis in singulos „annos motum Solis diurnum venatur. In Sole etiam quid- „piam singulare aliud, dirigendo inquirit, quod non bene modo „recordor. Experientiam tamen, quemadmodum naturalem „tuam rationem, existimo tibi palmam daturam.“ Diese Stelle sah ich mit Ueberraschung — am Meisten, weil ich bei Niemand erwähnt gefunden, dass NOVARA Werke in Manuscript oder gedruckt hinterlassen habe ausser dem oben erwähnten Prognosticon oder Kalender — in einem langen Briefe [1]) des Conte VINCENZO BIANCHI [2]) an KEPLER datiert aus Venedig den

---

1) Denselben Brief findet man im Giornale de' Letterati d'Italia. T. 31., art. 13., p. 303.; Libanori (Ferrara d'oro imbrunito, Ferrara 1665. P. 3., p. 81) berichtet ebenso, dass die Werke Novaras von seiner eigenen Hand geschrieben sich im Archive des Conte Lelio Roverello befänden, endlich gibt Lazaro Agostino Cotta im Museo Navarese, S. 266. p. 101 auf die Autorität Baraffaldis folgende Schriften Novaras an: Mundus sub stellis partitus, ac gentium genia a stellis infuta. — Orationes. — Opuscula diversa astrologica. — De lapis naturalibus. Weitere Mittheilungen über die *gedruckten* Schriften Novaras, von denen vier bis jetzt *gänzlich unbekannt* waren, sehe man im Anhange. Ich verdanke dieselben der Güte des Fürsten B. Boncompagni in Rom. (Anm. d. Uebers.).

2) Es scheint unmöglich, dass von diesem Vincenzo Bianchi (sonst nennt er sich oft Bianco, *Comes Vicentinus*, obgleich er in Venedig und nicht in Vicenza und zwar von einem Vater aus derselben Stadt am 4. März 1583 geboren ist), weder Tiraboschi noch die Biografia universale noch andere der gebräuchlichen biographisch-litterarischen Werke, wenigstens diejenigen, welche die italiänischen Schriftsteller enthalten, etwas Anderes berichten zu müssen glaubten als die *ausgezeichnete* Ehre, die für ihn aus seinem Briefwechsel mit einem Kepler über astrologische Fragen im eigentlichen Sinne und über solche in der reinen und wirklichen Astronomie sowie über verschiedene wissenschaftliche und litterarisch-historische Fragen entspringt; und auch daraus machen sie nicht viel! Und dennoch haben so viele berühmte

14. März 1619, dem dreihundertachtundachtzigsten Briefe des Briefwechsels, der in dem schönen und höchst werthvollen Bande enthalten ist betitelt: Epistolae ad Joannem Keplerum etc. scriptae, insertis ad easdem responsionibus Keplerianis etc., den HANSCHIUS im Jahre 1718 herausgab [1]). In demselben Briefe wird auch bei dem Gegenstande der ***Radiationes*** jener BIANCHINI erwähnt, von dem ich oben gesprochen; man äussert sich über die Bewegung der Erde mit gewichtigen und zugleich beissenden Gründen; auch über DE DOMINIS, der beständig in England lebte, wird eine höchst eigenthümliche und für seine moralische Geschichte höchst interessante Meinung vorgebracht,

---

vaterländische Geschichtsschreiber wie Coronelli, Foscarini, Zeno, Cornero u. A. ihn seiner Zeit mit gebührender Ehre und Unparteilichkeit erwähnt; und selbst Mazzuchelli, auf dessen Fusstapfen Tiraboschi bei so vielen Gelegenheiten allein einherschreitet, hat in seiner breiten Manier sein Andenken erwähnt. Wir müssen bekennen, dass die Biographen und die mehr oder weniger allgemeinen biographischen Lexica damit einen grossen Fehler begehen; einen um so grössern Fehler, da sie dazu das vortreffliche Material des ausgezeichneten Werkes plündern konnten, das schon seit 28 Jahren herausgegeben ist: Delle Iscrizioni veneziane raccolte ed illustrate da Emmanuele Antonio Cicogna, cittadino Veneto, Venezia 1842, Vol. V°. p. 137 und 215—221. Man sehe, wie viel dieser treffliche Cicogna zum Lobe, aber auch zum Tadel dieses *bizarren* aber starken und umfassenden Geistes des Vincenzo Bianchi zu sagen weiss: Er war Cleriker, Doctor der Theologie und beider Rechte u. s. w. — berühmter Orientalist, Ritter des Ordens vom heiligen Michael, der ihm von Heinrich IV. von Frankreich verliehen wurde, als er in Paris als Königlicher Professor mit Beifall *über die heilige alte Theologie der Hebräer* las (1605—1606) in einem Alter von noch nicht mehr als 22—23 Jahren. — Ein Freund der kirchlichen Studien, aber unveränderlich verloren in die astronomischen und astrologischen, daher geziert mit den verschiedenartigsten und umfassendsten Kenntnissen, die ihm erleichtert und vermehrt wurden auf seinen Reisen in die Hauptstädte und die hauptsächlichsten Universitäten Europas, und man darf sich daher nicht wundern, dass er mit den berühmtesten Männern seiner Zeit, dem Cardinal Bellarmino, jenem Cardinal Medici, der nachmals Papst Leo XI., u. s. w. mit einem Kepler im Briefwechsel war. Wenn man des Letzteren Correspondenz mit Bianchi liest und die langen Discussionen und die feinsten Finessen sieht, die hie und da daran gegeben, ja verschwendet werden an die *Directionen*, an die *Genituren* und andere derartige astrologische Alfanzereien, auf die jener sich vollständig stützt, so würde man niemals glauben, dass Kepler das grosse positive beobachtende und mathematische Genie war, das er doch wirklich ist!: (ein Widerspruch, ein Gegensatz, unglaublich und doch wahr, auf den schon vielfach und auf andere und gewichtigere Argumente gestützt hingewiesen ist).

1) S. 612 u. ff.

eine Meinung, die man nach der ähnlichen KEPLERS am Ende seines vorhergehenden Briefes [1]) völlig versteht. In der Antwort KEPLERS, die darauf folgt, datiert vom 14. April 1619 [2]), findet man folgende Periode: „*Dominici Mariae modum dirigendi Lu-„nam libenter videbo. Haesito enim etiam ipse circa Lunam, „potiusque ducem sequor, quam rationem propriam.*"

Diese Stellen sind meinerseits keines Commentars bedürftig. Ich füge nur hinzu, dass diejenigen, die zwei oder drei Jahrhunderte später zur Welt gekommen, indem sie NOVARA in seiner Eigenschaft als Astronom rühmen, dennoch anführen zu müssen glauben, „*dass er in seinen astrologischen Beobachtungen nicht den „Muth hatte, sich von dem gemeinem Volke zu entfernen*" [3]), damit offen zeigen, dass sie weder den Mann noch die Zeit, soweit es diesen Gegenstand betrifft, irgendwie erkannt haben. Was diesen Gegenstand betrifft, so war damals, wenn irgend jemals, Jedermann Pöbel, und die Ungereimtheit gegen einen Ausgezeichneten über eine grosse Masse hin geschleudert, hat etwas Unsinniges oder im höchsten Grade Parteiisches. So dass ich, wenn, wie ich stark vermuthe, diese Ungezogenheit dadurch entstand, dass man die weltbekannte Inschrift des Leichensteins des DOMENICO MARIA in der hiesigen Kirche der S. Annunziata — gesetzt von einem gewissen ZUCCATI — buchstäblich auffasste, aus der man entnahm, dass er im Alter von 50 Jahren im Jahre 1514 starb [4]), und in der seine astronomischen Verdienste unter einer rein astrologischen Form zusammengefasst wurden, antworte,

---

1) a. a. O., p. 612.

2) Ebendaselbst, p. 615 u. ff.

3) Tiraboschi, Storia della Letteratura Italiana.

4) „*Obijt An. Sal. M.D.XIV. Cal. sept.*" so liest man genau in der Inschrift bei Alidosi (Li Dottori forest. ecc., p. 19—20). Aber wenige Reihen vorher liest man ebendaselbst: „*dass Domenico Maria... Docent der Astronomie war... „bis zum Jahre 1504, in dem er starb*" (*Domenico Maria... fu Lettore d'Astronomia... fin' al 1504 che morì*). Dass er diese Professur nur bis 1504 ausübte, ist ganz sicher, weil es sich aus den *Rotoli* ergibt (das letzte *Rotolo*, in dem Novara erscheint, ist das des Studien- oder Schuljahres 1503—1504); dass er darauf in demselben Jahre starb, steht mit der Inschrift nicht in Uebereinstimmung. Die Untersuchung derselben auf dem Epitaphium hätte die Sache aufklären können: aber den Stein, sei es, dass er zerstört wurde oder mit Tünche bedeckt, habe ich in der hiesigen Kirche S. Annunziata fuori di S. Mammolo nicht wieder auffinden können. Der P. Riccioli schreibt in dem erwähnten Werke unter der Jahreszahl 1484 der ersten Chronik: „*Dom. Maria Ferrariensis „floret et 1514 moritur*", und dies ist mit dem Epitaphium in Uebereinstimmung:

dass gerade diese Form den allgemeinen Geist erkennen lässt, der in dergleichen Gegenständen damals herrschte, wie man die Astronomen haben wollte, und was sie thun mussten, wenn sie

---

aber in der zweiten Chronik (p. 33), wo er schreibt: „*docuitque illam (Astro-„nomiam Bononiae) ab anno 1484 ad 1514*“, widerspricht er den *Rotoli*, die nicht irren können. • Alles in Allem mag wahr sein, dass Novara 1514 starb, aber es ist unzweifelhaft, dass die beiden letzten Jahrfünft seines kurzen Lebens für diese öffentliche Universität verloren waren, sei es nun, dass dem frühreifen Geiste, der ihn mit 19 Jahren auf einen so wichtigen Lehrstuhl erhob, frühzeitig, wie es zu sein pflegt, die Kraft des Körpers fehlte; sei es, dass er nach 21 Jahren eines so hochberühmten Aufenthaltes in Bologna sich von dort entfernte, um später dahin zurückzukehren, dort seine Tage zu beschliessen. Diese zweite Annahme würde die richtige sein, wenn sich die Behauptung Borsettis bewahrheitete, dass Novara die Mathematik auch in Ferrara, Perugia und Rom lehrte (Borsetti, Historia Almi Ferrariae Gymnasii, P. 2a., p. 80), da es nicht wahrscheinlich ist, dass drei Universitäten ihn noch vor jenem unreifen Alter von 19 Jahren als Docent besessen haben. Vielmehr entsteht, wenn man die Thatsachen in dieser Weise auseinanderlegt, sogleich der Argwohn eines Irrthums in der Annahme, dass Novara mit 19 Jahren habe auf den Lehrstuhl der Astronomie an der berühmtesten damaligen Universität steigen können; ein Argwohn, der eine Begründung bei Alidosi fände, wenn man annähme, dass zwischen den beiden Zahlen 1504 und MDXIV, die wir mitgetheilt haben, und von denen doch eine versehen sein muss, der Irrthum auf Seiten der zweiten falle, d. h., dass auf dem Leichenstein gemeisselt war MDIV. Wenn dieselbe wiedergefunden würde, oder wenn irgend ein anderes Document dies sicher stellte, was ich sehr stark erwarte, so begönnen die 50 Jahre des Domenico Maria zwei Jahrfünft eher, als man es bis jetzt festgehalten, und sein Einfluss auf den jugendlichen Copernicus bei dessen Ankunft in Bologna wäre grösser gewesen; es würde auch so das, was man von ihm erzählt und was uns aus jenen Zeiten übermittelt wird, noch viel glaubhafter erscheinen. = Man hat später gefunden, dass der Irrthum genau in obiger Weise stattgefunden. Ghirardacci meldet in seiner Storia progressiva di Bologna (Parte 1a. Bologna 1596 bei Lebzeiten des Verfassers, der 1598 starb, und Ebendaselbst 1605; Parte 2a. Bologna 1657. Der dritte Theil ist noch nicht gedruckt und befindet sich im Manuscripte im Archivio Arcivescovile in Bologna. In diesem dritten Theile fand ich die nachfolgende Notiz) von dem berühmten Astronomen, er sei *am 15. August* 1504 an der Pest gestorben. Folgende Betrachtung dürfte auch ohne dieses positive Zeugniss Ghirardaccis genügen, die Jahreszahl MDIV an Stelle von MDXIV als die einzig mögliche anzuerkennen. In der erwähnten Inschrift heisst es:

„*Pierij iuvenes populus: gens curia lugent*
„*Externi Reges Bentivolea Domus.*“ etc.

Nach dem, was wir oben (S. 96—98) in Bezug auf Luca Gaurico mitgetheilt, bestand aber das Haus der Bentivogli im Jahre 1514 in Bologna nicht

dazu auch nicht gerade Neigung hatten, um dem Publicum zu dienen (jenen: „*Pierij juvenes*, *Populus*, *Gens*, *Curia*, *Externi* „*Reges*, *Bentivolea Domus*“, welche nach der Inschrift bitterlich den Tod NOVARAS beklagten), und um Mittel zu erhalten, den echten Theil der Wissenschaft zu treiben; ich würde auch ebenso antworten, auf einige mitgetheilte Stellen mich stützend — und jeder, der weiss in welcher Hauptabsicht man die ungeheuren Anstrengungen in Bezug auf die *Directiones* und *Radiationes* Dienste leisten liess, wird mich verstehen —, dass jener sich in astrologischen Gegenständen auf dieselbe Höhe wie ein KEPLER erhob: es ist also die Behauptung, dass er sich in dieser Beziehung mit dem gemeinen Volke vermischt habe, sehr wohlfeil und unwahr [1]).

Wir kommen zu DAL FERRO und zu PACIOLI. Nicht sobald hatte ich in dem *Rotolo* von 1501 gelesen: „*D. M. Lucas* „*de Burgo Sāti Sepulchri Ordinis Minorum*“ als ich verwundert stehen blieb — durch eine Ueberlegung, die jedem sehr bald in den Sinn kommen wird —, wie Niemand von den Mathematikern, die über die Erfindung des FRA LUCA und des FERRO gesprochen

mehr, sondern war schon im Jahre 1506—1507 durch die Volkswuth vertrieben. Es wäre also wohl kaum anzunehmen, dass man in diesem Jahre 1514 eine solche Bemerkung einer Grabschrift einfügen konnte, während 1504, wo die Bentivogli noch auf dem Gipfel ihrer Macht standen, dieselbe am richtigen Platze war. = Endlich berichtet auch Vossius (a. a. O. Cap. 35, § 45) von Domenico Maria Folgendes: „*Anno 1450 in Italia claruit Dominicus Maria* „*Bononiensis*, *Copernici Praeceptor.*“ Ohne das *Bononiensis* zu berühren, das mit Recht den Ferraresen missfällt, begnügen wir uns mit der Bemerkung, dass, wenn der Tod Novaras eher in das Jahr 1504 als zehn Jahre später fällt, der Fehler in der Jahreszahl 1450, die Vossius beibringt, kleiner sein würde; er würde ferner gar nicht da sein, wenn nur jenes *claruit* eher auf das Geborenwerden, als auf das Blühen des Novara bezogen werden könnte.

1) Der berühmte Tiraboschi hätte, statt hier wie in andern ähnlichen Fällen seine Meinung ohne hinreichende Kenntniss der Sache zu geben und in dem merkwürdigen Vorurtheil befangen, die Menschen der vergangenen Welt mit den Ideen der Welt von jetzt zu beurtheilen, vielmehr belieben sollen, Nachforschungen über die nachgelassenen Schriften Novaras anzustellen, eine ganz für ihn und sein Werk passende Sache. Diesen Fehler an dem Fürsten der Geschichtschreiber unserer Litteratur bemerken wir freimüthig, aber ohne den Zweck, im Allgemeinen jene grosse Achtung und Verehrung verringern zu wollen, die man ihm schuldet, und die auch wir ihm aussprechen wie irgend jemand, auch als Zeichen der Dankbarkeit für diese unsere Arbeit.

haben, die Anstellung jenes in Bologna wenn auch nur während eines Jahres, doch während eines Jahres der langen Anstellung des Andern angemerkt hatten, ***und zwar als etwas höchst Merkwürdiges.*** Es ging daher der Gedanke, sofort in dieser Beziehung das Zeugniss des ***Rotolo***, wenn auch an und für sich schon von höchster Autorität, zu bestätigen, jedem andern vor. In der ***Tavola dei cognomi delli Dottori et Rettori***, die man am Ende des citierten Buches von Alidosi, Li Dottori Forestieri che in Bologna hanno letto, findet, traf ich weder auf Pacioli, noch Da Borgo San Sepolcro, noch Fra Luca und hielt deshalb zunächst dafür, dass Alidosi dieser merkwürdige Professor von fremdher entgangen wäre. Als ich aber hernach im Buche selbst nachsuchte fand ich ihn auf Seite 50 erwähnt [1]). Nachher erfuhr ich durch einen Liebhaber ähnlicher Untersuchungen [2]), dass in der Bibliothek der Universität eine

---

1) „*Luca da Borgo S. Sepolcro dell' Ordine Minore del 1501 leggeva* „*Matematica. Ha in stampa una Somma d'Aritmetica et di Geomet.*“ Das Versehen Alidosis, dass er nämlich die Erwähnung dieses Docenten in der vorgenannten *Tavola* nicht aufführt, sondern sie dagegen allein in der folgenden *Tavola delle Provincie, Città e Luoghi de' Dottori, et Rettori* citiert, wo man dieselbe unter dem Schlagwort *Borgo San Sepolcro* findet (man bemerke, dass ein gewisser Milani, ebenfalls aus Borgo San Sepolcro, in jeder der beiden *Tavole* genannt ist), dürfte der Grund sein, dass weder Tiraboschi noch Andere Fra Luca in der Reihe der Professoren dieser alten Studienanstalt aufgezählt haben.

2) Herr Serafino Mazzetti, erzbischöflicher Archivar, der in seinen Memorie Storiche della Università di Bologna, die er schon veröffentlicht hat, und in ähnlichen Werken, an denen er noch arbeitet, an der Hand der nöthigen Documente viele Irrthümer, die Alidosi, Fantuzzi und Anderen unserer Schriftsteller entgangen sind, berichtigt hat und noch berichtigt. = Die vorgenannten Memorie storiche sopra l'Università e L'Istituto delle Scienze di Bologna erschienen im Jahre 1840. — Das andere *ähnliche Werk*, das ich oben erwähnte, erschien später in zwei Bänden 1847 und 1848. Der erste umfangreichere mit dem Titel: Repertorio di tutti i professori antichi e moderni della famosa Università e del celebre Istituto delle scienze di Bologna, der zweite betitelt: Alcune aggiunte e correzioni alle Opere dell' Alidosi, del Cavazza, del Sarti, del Fantuzzi, e del Tiraboschi, per quella parte soltanto che tratta de' professori dell' Università di Bologna. Diese drei Arbeiten Mazzettis, von gutem Rufe, vorzugsweise aber das Repertorio sind für die, welche dergleichen Notizen bedürfen, von grossem Nutzen. Da er fühlte, er sei einfach Compilator, zwar genau, aber nicht mit hinreichenden Kenntnissen versehen, um sich in den Stoff vertiefen

handschriftliche Notiz über die Ordensbrüder des heiligen FRANCISCUS, welche Lehrstühle an der alten Studienanstalt von Bologna inne hatten, aufbewahrt werde, und bei Vergleichung dieser Notiz fand ich Folgendes: dass nach den Monumenten jenes Klosters des S. FRANCISCUS der Padre Maestro LUCA PACIOLI DA BORGO S. SEPOLCRO zum Docent der Mathematik im Jahre 1501 erwählt sei, dass er jene Wissenschaft auch in Rom von 1489 an las, und dass von ihm POSSEVINUS (Appar. Sacr.) und WADING (De Scriptoribus Ordinis Minorum) sprechen. Es ist somit unzweifelhaft, dass PACIOLI nach Bologna kam und an der Universität im Jahre 1501—1502 Vorlesungen hielt. Nach den Vergleichungen, die ich über sein Leben anstellen konnte, schien es mir, dass er auf der Flucht von dem Hofe des LODOVICO IL MORO bei Ankunft der Franzosen in der Lombardei zugleich mit dem grossen LEONARDO DA VINCI, seinem Vertrauten und Theilnehmer der Mühen und Ehren an jenem Hofe, hierher gekommen. Damals hatte er schon alle seine Werke mit Ausnahme der Divina Proporzione ans Licht gegeben, die er 1509 dem PIETRO SODERINI widmete, lebenslänglichem Gonfaloniere der Republik Florenz; dieses systematische Werk, welches durch die von LEONARDO gestochenen Figuren und vielleicht auch durch seine andere Mitarbeiterschaft einen seltenen Werth besitzt, und nach dessen Veröffentlichung FRA LUCA sehr bald gestorben zu sein scheint [1]).

Die hervorragenden und vielfältigen Verdienste dieses grossen Sammlers der mathematischen Wissenschaften würden eine Darstellung in einem engen Rahmen schlecht ertragen; aber eine geziemende können wir ihnen hier nicht bestimmen und dürften es vielleicht nicht einmal in Rücksicht auf das ganz kurze Zusammensein PACIOLIS mit der Versammlung ausgezeichneter Mathematiker, mit denen unsere zweite Epoche ausgestattet ist.

---

und immer für die Richtigkeit aufkommen zu können, gab er seine handschriftlichen Werke, bevor er sie dem Drucke anvertraute, oder auch die Correcturabzüge verschiedenen Professoren der Universität und andern Gelehrten zur Durchsicht und zur Revision. Er hatte auch die Güte, sie mir mitzutheilen, und ich entsprach, soviel ich verstand und konnte, seinem Vertrauen, indem ich ihm Berichtigungen, Zusätze, Modificationen einiger Urtheile vorschlug, die, muss ich sagen, der arme Serafino Mazzetti (der in noch jugendlichem Alter 1855 starb) zum grössten Theile acceptierte.

1) Libri, Histoire etc., T. 3., p. 133 ff.

Indem wir also über ihn auf die Geschichtsschreiber der Mathematik verweisen, vorzugsweise auf COSSALI und LIBRI, gehen wir zu einer bemerkenswerthen Parallele in Betreff PACIOLIS und DAL FERROS über; es wird dies ein gleichsam augenblickliches sich Vertiefen in den historischen Vorwurf sein, dessen wir beim Beschluss der Betrachtungen über die erste Epoche erwähnten.

Den also, welcher in seiner Summa de Arithmetica Geometria, die zuerst 1494 gedruckt ist, diejenigen Gleichungen von höherem als dem 2. Grade neben einander stellt, welche durch eine allgemeine Regel zu lösen möglich ist, und neben zwei, die sich auf folgende reducieren:

$$fx^3 + gx = n, \quad fx^3 + n = gx,$$

geschrieben hatte: „*impossibile*“ [1]), findet man hier sieben Jahre später in derselben Facultät als Lehrer mit dem Geiste, der damals schon oder sehr bald nachher im Besitze des Schlüssels zur Lösung genau ähnlicher Gleichungen war, als die Gleichungen waren, von deren Lösung der Ausspruch der *Unmöglichkeit* fiel, gethan von dem grossen Arithmetiker, Algebristen und Geometer FRA LUCA. Jeder versteht, dass der bezeichnete Geist SCIPIONE FERRO war, dem damals das sechste Jahr der bescheidenen Professur der Arithmetik und Geometrie währte, bescheiden im Vergleich zu der — *Ad Mathematicam* —, die man dem verehrten Veteranen anvertraut hatte. Die Worte, welche dieser seiner Meinung der *Unmöglichkeit* in Betreff der allgemeinen Auflösung genannter Gleichungen hinzufügt, durch welche Worte, die vage, schlecht bestimmte, man mögte fast sagen metaphysische Ideen aussprechen, er verworren merken lässt, dass er unter der ausgesprochenen *Unmöglichkeit* keine absolute Unmöglichkeit versteht, sondern vielmehr eine auf den damaligen Zustand der Wissenschaft bezügliche, können in Wirklichkeit kaum irgend welche Hilfe bei dem Versuche zu dieser allgemeinen Lösung zu gelangen gewähren. Er sagt dort nämlich, dass für die Auflösung solcher „*aguagliamenti . . . non si po dare regola generale*, *se non ale volte a tastoni*“ in gewissen Specialfällen, und dass die Aufsuchung dieser allgemeinen Regel auf eine Linie mit der Quadratur des

1) Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita ecc., Prima parte principale, distinctio octava, Tractatus sextus, Art. 2., Blatt 149a, der Ausgabe von Tusculanum 1523.

Kreises zu stellen sei: — *„E pero quando in li toi aguaglia-„menti te ritrovi termini de diversi intervalli fra loro dispro-„porzionati“* (Fra Luca geht hier auf die beiden mitgetheilten Gleichungen 3. Grades ein), *„dirai che larte ancora a tal caso „non a datto modo, si commo ancora non e dato modo al „quadrare del cerchio. Siche ista stant simul chel caso „sia possibile, e per anco el modo absolverlo non sia dato per „la improportionalita che e cativa“* [1]). Mit gutem Grunde könnte folglich [2]) der grosse Cardan entschuldigt werden — was auch Cossali [3]) darüber sagt — sich nicht zuerst auf die Auflösung des *Aguagliamento di cubo e cose al numero* gelegt zu haben (so drückte man damals die Gleichungen von der Form

---

1) Summa etc., Articulus quartus, — *De modo formandi plura capitula secundum exigentiam casuum* —, am Ende. Blatt 150ᵃ. der genannten Ausgabe.

2) Libri, Histoire etc., T. 3., p. 151.

3) Cossali fügt bei Wiedergabe der Stelle des Fra Luca, die auch wir oben angegeben haben, nach den Worten *„al quadrare del cerchio“* zwischen Parenthesen hinzu: *„per tutti i philosophi maxime Aristotile scibile“* mit der Bemerkung, er habe diese andern Worte aus derselben Summa etc. des Fra Luca Bltt. 106 aufgenommen. Damit wollte Cossali ohne Zweifel beweisen, dass Fra Luca in derselben Weise, wie er die Quadratur des Kreises für *wissbar* oder auffindbar hielt, sich auch dazu bringen liess, die allgemeine Auflösung der vorgenannten Capitula für wissbar oder auffindbar zu halten (Origine, Trasporto in Italia, Primi Progressi in essa dell' Algebra. Storia critica ecc. Vol. 2., Parma 1799, p. 97). Aber es ist gleichwohl völlig klar, dass Fra Luca durch eine derartige Vergleichung nicht die Absicht haben konnte, von dem Gedanken der ausgesprochenen *Unmöglichkeit* etwas Anderes oder wenig mehr auszuschliessen als die Idee einer metaphysischen Unmöglichkeit. Die sehr entfernte Möglichkeit, die durch eine solche Ausschliessung blieb, verschwand gleichsam im Geiste jedes strengen Geometers, der nicht Sophist war; ein solcher musste vielmehr die Worte des Fra Luca in folgender Weise umkehren: Es ist vergeblich eine allgemeine Regel zur Behandlung dieser Capitel zu suchen, wie es vergeblich wäre die genaue Quadratur des Kreises zu suchen. Der ganze Passus übrigens, dem Cossali die mitgetheilten Worte entnahm, ist folgender: *„Ars imitatur naturam „in quantum potest. Non pero a tutte cose operabili si po dare modo si per „carentia de termini a noi ignoti, si anche perche lo perscrutare humano (finora) „non a tinto el fine del suo desiderio: commo per tutti phylosophi, maxime Ari-„stotile, de la quadratura del cerchio se dici esser scibile, avenga che fin mo per „nullo sia precisamente trovata. Quantunche per Archimede Siracusano el modo „pratico operativo a sua dimensione con certa aproximatione a noi sia dato ecc.“* (Summa etc., Distinctio septima, Tractatus secundus, Articulus quintus, Blatt 106ᵃ·ᵇ· der erwähnten Ausgabe).

$x^3 + px = q$ aus, indem man die Unbekannte x *cosa* nannte), unter Anführung des sehr beachtenswerthen Ausspruchs: „*Dece-„ptus enim ego verbis Lucae Pacioli, qui ultra sua capitula, „generale ullum aliud esse posse negat (quanquam tot jam „antea, rebus a me inventis* [1]) *sub manibus esset) desperabam „tamen invenire, quod quaerere non audebam*“ [2]); ein Ausspruch, der nur die höchste Achtung vor der Autorität des Fra Luca ausdrückt; der aufdeckt, wie sehr unerwartet damals die erwähnte allgemeine Auflösung war; wie schon allein der Versuch ein grosses Zeichen eines kühnen Geistes, das Gelingen der Entdeckung endlich ein sicheres Beweismittel eines tiefen Erfindungsgeistes und Beförderers der Wissenschaft war. Nichts aber kann dem emphatischen Ausspruche gleichen, den man über alle dieses in der nämlichen Ars Magna liest: „*Scipio Ferreus Bononiensis „capitulum cubi et rerum numero aequalium invenit, rem sane „pulchram et admirabilem; cum omnem humanam subtilitatem, „omnis ingenij mortalis claritatem ars haec superet, donum „profecto coeleste, experimentum autem virtutis animorum, „atque adeo illustre, ut, qui haec attigerit, nihil non intelligere „posse se credat. Huius aemulatione Nicolaus Tartalea Brixel-„lensis, amicus noster, cum in certamen cum illius discipulo „Antonio Maria Florido venisset, capitulum idem, ne vince-„retur, invenit, qui mihi ipsum multis precibus exoratus tra-„didit.*“ (Cap. I., am Anfang). — Diese Empfindungen des Menschen, der aus der Erfindung den grössten Vortheil zog, indem er sie zur Vermehrung der Wissenschaft fruchtbringend machte und für seine Schule ausdehnte, vor allen aber durch die Anregung, die er dadurch seinem Schüler Ferrari gab, einem andern vortrefflichen bologneser Genie, der daraus die höchsten und schwierigsten Lorbeern pflückte, reichen ohne Weiteres zu der Ueberzeugung hin, wie sehr Scipione Ferro durch diese Entdeckung den grössten Geistern seiner Zeit überlegen war und sich wohlverdient um die Mathematik gemacht hat [3]). Vor ihm geriethen

---

1) Zwischen diesen Parenthesen findet sich übrigens eine sehr übertriebene Prahlerei, eine Unwahrheit des Verfassers, die jeder aus dem Folgenden entdecken wird, und die auch den Vorwürfen und Spöttereien des Tartaglia nicht entging (M. s. Opere del Tartaglia, Venetia 1606. — Quesiti et Inventioni diverse, Libro nono, Quesito 38, p. 273—274).

2) Ars Magna, Cap. I am Anfang.

3) Libri, Histoire etc., T. 3., p. 151.

die Algebristen von der grössten Erfindungskraft, die sich mit den Gleichungen 3. Grades versuchten, ohne es zu merken, in falsche Lösungen [1]); und die Algebristen der reinsten und höchsten Lehre, die man nicht besser ins Gesammt repräsentieren kann als durch FRA LUCA, erklärten, wie wir gesehen, solche Lösungen für *unmöglich* ausser in einzelnen speciellen Fällen *durch Umhertappen.* FERRO zuerst warf die Barriere nieder, die man schon für unübersteiglich hielt, eine Barriere, die ausserdem nur durch einen einzigen Schritt von der getrennt ist, welche die Gesammtkräfte eines LAGRANGE und der noch Neueren nicht hingereicht haben niederzureissen, und auf welche unauslöschlich geschrieben zu sein scheint — *unpassierbar* — [2]).

Aber welchen Weg schlug DAL FERRO ein, welche ganz neue Methode erfand er, die ihn zu der fremdartigen Erfindung führte? Welches war die von ihm gefundene Regel für die allgemeine Auflösung dieser Gleichungen, wie der Beweis dieser Regel? Trug er sie in seinen Vorlesungen vor, setzte er sie in einer Schrift auseinander, publicierte er sie, theilte er sie mit oder vertraute er sie irgend jemand an? Und wir können auch noch hinzufügen: Entdeckte FRA LUCA, wen er an der Studienanstalt Bologna zur Seite hatte, oder entdeckte dieser sich ihm, indem er ihn theilnehmen liess an seinem Juwel oder den nothwendigen Schätzen zu seinem Besitze? So hören Sie zunächst als alle Antwort auf diese und ähnliche Fragen eine traurige Verneinung! [3]); die ernste und beredte Verneinung eines LAGRANGE in den Mémoires de l'Académie de Berlin [4]). Ehe er uns mit seinen ausgezeichneten Arbeiten über die algebraische Auflösung der Gleichungen beschenkt, erwähnt er mit gebührendem Lobe seine vaterländischen Analytiker des XVI. Jahrhunderts, die sie mit grösstem Erfolge beförderten, lässt dabei aber seinen Verdruss wahrnehmen, *dass man die primitive Auflösung der Gleichungen 3. Grades nicht kenne*, d. h. den Weg, die Methode mit der man zu ihr gelangte [5]). Durchlaufen Sie nachher die

---

1) Libri, Histoire etc., T. 2., p. 213.

2) Libri, Histoire etc., T. 3., p. 148 u. 151.

3) Libri, Histoire etc., T. 3., p. 150. Anm. 1.

4) Année 1770, p. 135—136.

5) Nachdem der unvergleichliche Analytiker darauf hingewiesen, dass die Lösung der Gleichungen 3. und 4. Grades zuerst von Cardan veröffentlicht wurde, und dass man, was die Lösung von Buchstabengleichungen betrifft,

ausführliche Geschichte dieses Riesenschrittes der Algebra bei COSSALI [1]; sammeln Sie Auszüge aus den Werken LIBRIS [2]) und anderer Schriftsteller, die mit solchen Gegenständen vertraut sind, und als ganze Genugthuung für alle vorgelegten Fragen müssen Sie sich mit dem Wenigen begnügen, was in der folgenden Erzählung ersichtlich gemacht ist, die ich selbst zusammengestellt, nachdem ich Alles gelesen und auf Alles Acht gehabt. Ein gewisser ANTONIO MARIA DEL FIORE (jener sogenannte FLORIDUS des CARDAN), ein praktischer Rechner, der in Italien herumreiste, um den Mathematikern, mit denen er zusammentraf, Aufgaben zur Lösung aufzugeben, traf im Jahre 1530 in Brescia mit einem gewissen ZUANE DE' TONINI DA COI (von CARDAN JOANNES COLLA genannt) und später am Ende des Jahres 1534 zu Venedig mit NICOLÒ TARTAGLIA zusammen, welche in jenen Städten mathematische Schulen hielten, und forderte sie zum Wettkampf über Probleme heraus, welche in Zeichen umgesetzt auf Gleichungen dritten Grades führten. DE' TONINI wendete sich an TARTAGLIA zuerst in Verona, nachher in Venedig, ehe und nachdem dieser direct von DAL FIORE gefordert war, und suchte, indem er selbst die Miene eines Angreifers annahm, von diesem grossen Geiste Waffen zur Vertheidigung und zum Angriff zu erhalten. Was darauf zwischen DE' TONINI und TARTAGLIA vorging, macht für uns jetzt wenig aus. Dagegen ist es von grösster Wichtigkeit, zu wissen, dass TARTAGLIA zunächst meinte, der einzige Zweck der Herausforderer sei, zu täuschen und glauben zu machen, sie seien im Stande diese Probleme nach allgemeinen Regeln zu lösen, obgleich sie nach dem Urtheil des FRA LUCA und Anderer die Unmöglichkeit der Sache kannten und von derselben überzeugt wären [3]). Er verachtete

---

heute noch keinen Schritt weiter sei, als man zu den Zeiten jenes gewesen, fügt er hinzu: „*Les premiers succès des Analistes Italiens dans cette matière „paroissent avoir été le terme des decouvertes qu'on y pouvoit faire.*“ Dann im Begriff die Gleichungen dritten Grades unter der Form $x^3 + nx + p = 0$ zu behandeln, sagt er: „*C'est dans cet état que les équations du troisième degré ont été d'abord „traitées par Scipio Ferreo, et par Tartalea à qui on doit leur résolution; mais „on ignore le chemin qui les y a conduits.*“

1) Origine, Trasporto in Italia, Primi Progressi in essa dell' Algebra, Storia critica ecc, Vol. 2., Cap. 2., p. 96—145.

2) Histoire etc., T. 3., p. 148—154 und an andern Orten.

3) Tartaglia, Opere ecc., Quesiti ecc., Lib. 9, p. 223—224, 228—229, 235, 237.

daher zunächst die Herausforderung COLLAS und noch mehr die DAL FIORES, in dem er nichts Weiter erblickte als einen gewöhnlichen Rechner, wenn auch von ***grosser Praxis.*** Als er aber versichern hörte, dass ***ein grosser Mathematiker*** schon vor dreissig Jahren DAL FIORE das ***Geheimniss*** gezeigt habe, jene allgemeine Regel zur Auflösung der verwickelten Probleme, deren Besitz, mit welchem sich jener FIORE brüstete, er für eine seiner falschesten Aufschneidereien gehalten, machte er sich augenblicklich daran, sie zu suchen, sie aus seinem eigenen Geiste hervorspriessen zu lassen und er erfand sie wieder, hielt sie dann verborgen und benutzte sie nur, um den vorgenannten Abenteurer in Bestürzung zu versetzen. TONINI, ärgerlich, dass er weder von dem einen noch von dem andern die allgemeine Regel oder Formel zur Auflösung des ***Cubo e cose eguali a numero*** [1]) hatte erhalten können,

1) Zu den Zeiten des Tartaglia und auch noch ein gut Stück nachher wurden die Gleichungen $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$ getrennt behandelt, und man gab für jede die betreffende Regel oder auflösende Formel; denn damals war es nichts Einfaches, den Wechsel der Zeichen in den Coefficienten p, q zu machen, den Uebergang von einem Falle zum andern und das Zusammenfassen aller in eine einzige Formel. Nachdem Tartaglia die cubische Gleichung unter der Form $x^3 + px = q$ behandelt und allgemein gelöst hatte, auf welche Form alle algebraischen Fragen führten, die Dal Fiore vorgelegt hatte, behandelte er sie sofort und löste sie ebenso unter den andern beiden Formen. Nichtsdestoweniger spreche ich hier und im weitern Verfolg nur von der Gleichung $x^3 + px = q$ und von der einzigen auf sie bezüglichen Regel aus folgenden Gründen: der Kürze halber, und weil der Kern des Ganzen oder die eigentliche zu überwindende Schwierigkeit sich auch damals darauf reducierte, die Gleichung unter einer der drei Formen aufzulösen, und auch aus den Gründen, die im Laufe dieser Schrift sich zeigen werden, speciell aber in der *Anmerkung (b)* am Ende derselben. Aehnliche Beweggründe haben mich veranlasst, im Texte die Gleichung $x^3 + mx^2 = n$ gar nicht zu erwähnen, die Tartaglia wirklich 4 bis 5 Jahre vor der andern $x^3 + px = q$ behandelte, da sie die Fragen umfasste, die Fiore am Ende des Jahres 1534 vorlegte, wie wir gesagt haben, und einige der Fragen, die im Jahre 1530 gegen Colla gerichtet waren. Tartaglia selbst war es, der uns erzählt, er habe die Gleichung $x^3 + mx^2 = n$ *Jahre lang vor* der andern $x^3 + px = q$ nicht bloss behandelt, sondern *allgemein gelöst*; diese Behauptung, die man *nicht für einen Augenblick*, wie jemand gemeint hat, sondern eine lange Zeit hindurch geglaubt hat, und zwar immer nur zu viel, da er darin einen grossen Irrthum beging, den Cossali, aber vielleicht nicht vollständig, aufdeckte — (Origine etc., im gen. Bande p. 98—99, 105—106, 113). — In unserer erwähnten Anmerkung (b) kommen wir zu gelegener Zeit auf diesen Gegenstand zurück. — Wir berühren dies mit dem Hauptzwecke, sogleich eine andere Prahlerei Tartaglias

geht darauf nach Mailand, meldet CARDAN, diese Formel sei gefunden, der Erfinder sei SCIPIONE FERRO aus Bologna, jetzt sei sie im Besitze DAL FIORES und TARTAGLIAS, und setzte ihn auf solche Weise in die grösste Leidenschaft, sie kennen zu lernen. CARDAN lässt TARTAGLIA bitten und ersucht ihn direct selbst in einem Briefe vom 2. Januar 1539 um die sehr gewünschte Regel. Das, was weiter folgt: Zuerst die Verweigerung der Bitte; dann die theilweise Erhörung durch die Ueberlieferung

---

Lügen zu strafen, dass es nämlich für ihn das Geschäft einer kurzen Zeit, *von Tagen*, gewesen, mit *aller seiner Mühe, Kunst und Studium* die allgemeine Regel für die Gleichung $x^3 + px = q$ wiederzufinden; eine Prahlerei, die er am Anfange der Geschichte des *Quesito XXV.* glaubhaft zu machen sucht, und die er ferner in dem Verse:

„*Questi trovai et non con passi tardi*"

seines berühmten, Cardan mitgetheilten, Capitels und auch anderswo ausspricht (Tartaglia, Opere ecc., Quesiti etc., p. 234—235, 266 u. s. w.). Aber müssen nicht die Jahre, in denen er die allgemeine Regel für cubische Gleichungen von der Form $x^3 + mx^2 = n$ zu finden bemüht war, obgleich er darin nicht reüssierte, ihm vielleicht als zum wirklichen Auffinden derselben für diese Gleichungen, aber von der Form $x^3 + px = q$, aufgewendete Zeit angerechnet werden? Also nicht mit solcher *Geschwindigkeit*, nicht in wenigen Tagen, sondern in nicht weniger als vier bis fünf Jahren gelangte er dazu, sie nach Ferro von Neuem aufzufinden, wenn man ihm auch zugeben will, dass es unmittelbar nach der Herausforderung durch Dal Fiore gewesen ist, die für ihn selbst der grösste Antrieb zu diesem Nachfund war. Und erst nachdem er dies gethan, wird er, indem er die Behandlung der Gleichung $x^3 + mx^2 = n$ auf directem Wege wieder aufnahm, nicht auf Umwegen wie zuerst, — *wenn man alle seine wahrhaften Berichte zusammenfasst* —, in Wirklichkeit dazu gekommen sein, auch die Regel für diese zu entdecken: und der directe Weg scheint, wie er es auch noch jetzt sein würde, der gewesen zu sein, die Gleichung $x^3 + mx^2 = n$ zu transformieren und sie auf die Fundamentalgleichung $x^3 + px = q$ zu reducieren (Cossali, Origine ecc. dell' Algebra, Vol. 2, p. 157 etc.). Ich habe vorausgeschickt: *indem man alle seine wahrhaften Berichte zusammenfasst*, weil es mir scheint, dass aus verschiedenen Ueberlegungen der Verdacht, sie seien wenig der Wahrheit gemäss und künstlich *zu seinem Nutzen* gemacht (also ohne jeden Zweifel prahlerisch) auf sie hätte fallen müssen; die, welche am offensten daliegt und doch dem wohlverdienten Cossali entgangen ist, ist die folgende: dass Tartaglia seine Berichte Jahre und Jahre nach den Disputationen und Mittheilungen mit Colla, mit Fiore und mit Cardan ans Licht gab, mit gemachten und übertriebenen Thatsachen und vor Allem nach der vorangegangenen Veröffentlichung der Ars Magna des Cardan, aus der er sehr viel entnehmen konnte, sehr sehr viel mehr, als er gegeben und auch als das, was er zur Zeit der Disputationen und jener Mittheilungen entdeckt hatte (die Ars Magna erschien zu Anfang des Jahres 1545

des berühmten Capitels in Versen (den vollständigen Text dieses Capitolo in Rima sehe man im Anhange):

> „*Quando che 'l cubo con le cose appresso*
> „*Se agguaglia a qualche numero discreto*"
> *ecc.,* *ecc.;*

der vorhergegangene Schwur Cardans, niemals die unter diesen

---

und die Quesiti et Inventioni diverse des Tartaglia kamen erst im folgenden Jahre 1546 an das Licht *).

Zuletzt will ich Alle noch auf eine Sache aufmerksam machen. Hält man sich streng an das, was uns Tartaglia im neunten Buche seiner Quesiti ecc. über die erste Auflösung der cubischen Gleichungen erzählt, so müsste man sagen, und es ist gesagt worden und als *res judicata* angenommen, dass Colla aus eigenem Antrieb Tartaglia zum Streit über Probleme aufgefordert habe, die auf diese Gleichungen führten, ohne Anreizung von anderer Seite, oder ohne irgend Gelegenheit gehabt zu haben zu bezwecken, dass die Herausforderung sich gerade auf Probleme genannter Art richtete. Ich habe dagegen behauptet, dass, ehe er den Mathematiker aus Brescia herausforderte, er selbst schon von Fiore wegen ähnlicher Probleme herausgefordert war. Fragte man, weshalb ich hierin von der allgemeinen Meinung abweiche, so würde meine Antwort in Folgendem bestehen. Zuerst kann man nicht leugnen, dass sich mit der zu jener Zeit auch bei Mathematikern von grossem Geiste und bedeutenden Kenntnissen tief eingewurzelten Meinung von der Unmöglichkeit eine allgemeinen Regel zur Auflösung der cubischen Gleichungen zu finden **) nur

---

*) Lagrange, ein leuchtendes Beispiel wegen des Eifers, den er immer der historischen Seite der von ihm behandelten Gegenstände zuwendet, sagt, diese beiden Werke seien zur selben Zeit veröffentlicht (Lezioni elementari sulle matematiche date alla Scuola Normale di Francia l'anno 1795. Traduzione. Milano 1839, Lezione terza, p. 46). Und ist denn in der That der Unterschied ungefähr eines Jahres in der Veröffentlichung derselben so gross, um sie nicht gleichzeitig nennen zu können? Unter dem Gesichtspunct aber, unter dem wir sie betrachten, würde ein noch kleinerer Unterschied immer beträchtlich sein. Vermöge dieses konnte Cardan es mit dem Rivalen aufnehmen: Von Euch habe ich das Capitel in Versen, oder, wenn Ihr wollt, die Auflösungsformel des Cubo e cose eguali a numero, nichts mehr, ich erkenne es an; aber ich bin Euch in allem Uebrigen zuvorgekommen. Von mir, aus meiner Ars Magna könnt ihr vielen Inhalt entnommen haben, um Eure alten Quesiti zu mästen, vorzüglich die, welche Ihr mit Euren Freunden gehabt habt: z. B. das Quesito, das ihr unter Nr. 42 mit der Jahreszahl von 1541 beschreibt und das Euch von Eurem Gevatter Ventworthe vorgelegt ist (Tartaglia, a. a. O. p. 279—284). Diese ***Frage*** würde nach Cossali (M. s. unsere Anmerk. (b) am Ende) die directe Auflösung der Gleichungen von der Form $x^3 + mx^2 = n$ enthalten.

) Wenn es noch eines Beweises für die obenerwähnte eingewurzelte Meinung bedürfte, könnte man den Titel anführen, den Tartaglia seinem Libro nono delli Quesiti ecc. hinzufügt; da ist er: „*Sopra la scientia Arithmetica, Geometrica, et in la pratica*** „***speculativa de Algebra, et Almucabala, volgarmente detta Regola de la cosa, over*** „***Arte maggiore, et massime della inventione de Capitoli de Cosa, e Cubo egual a*** „***numero, et altri suoi ederenti et dependenti, Et simelmente de censi*** (d. h. Quadrate der Unbekannten), ***e cubi egual a numero, et suoi dependenti, quali dalli sapienti*** „***sono stati giudicati impossibili.***"

Versen versteckte Regel zu verrathen; die darauf durch diesen von dem Andern geforderten Aufklärungen, die zuerst gewährt wurden; dann der vergebliche Versuch dieses Letzteren durch seine letzte Antwort den richtigen Weg zu verlegen; der Abbruch jedes Briefwechsels zwischen ihnen, der am Anfang des Jahres 1540 eintrat, und die von CARDAN 1545 gemachte Veröffentlichung der Ars Magna, durch die das Geheimniss der Regel gebrochen

---

auf ganz wunderliche und unglaubliche Weise vereinigen liesse, dass Colla ein Mathematiker von Werth, wenn auch nicht von grossem, mit einem Tartaglia Disputationen hätte anfangen können, die gerade auf der Existenz einer solchen Regel beruhen, ohne ungefähr zu wissen, dass sie schon entdeckt sei; wenn es also leicht sein kann, dass er es gewusst hat, ehe er Tartaglia zur Disputation herausforderte, so ist es ebenso leicht möglich, dass er es von Fiore gehört hat. In Rücksicht auf diesen lief das Gespräch schlecht ab. Und war er auch *ohne jede Kenntniss*, *ohne jede Theorie*, wie ihn uns Tartaglia darstellt; er besass die Regel und konnte auch mit ein wenig Praxis, die dieser ihm nicht abspricht, munter herausfordern und hierhin und dahin mit der Peitsche schlagen. Dem steht nicht entgegen, dass die Fragen, mit denen Tartaglia von Colla angegriffen wurde, sich in die schwierigeren oder *seltsameren* Gleichungen, wie der brescianer Mathematiker an einer Stelle sagt, $x^3 + mx^2 = n$, $x^3 + rx^2 + sx = t$ übertragen liessen, als die Gleichung $x^3 + px = q$ ist, welche die Probleme darstellt, die ihm selbst von Fiore gestellt waren. Denn es könnte sogar ein leichter Kunstgriff Collas sein, den Brescianer mit fremdartigeren Capiteln anzugreifen, um damit die Regel für einen weniger fremdartigen Gegenstand zu erhalten; es läge auch nicht ausserhalb der Wahrscheinlichkeit, dass Fiore selbst den einen von ihnen zur Disputation über Probleme der einen Art, den andern über solche von anderer Art herausgefordert, die aber beide vom dritten Grade. Zweitens möge man gefälligst überlegen, dass unserer Meinung ihrem Wesen nach von keiner Stelle der bezüglichen von Tartaglia überlieferten Geschichte widersprochen, sie dagegen von einigen Passus derselben eingegeben oder unterstützt wird. Und um die Wahrheit zu sagen, im Quesito XVIII seh'en wir Fiore vor seiner offenen und feierlichen Herausforderung des Tartaglia auf der Bühne erscheinen, indem er diesem *unter der Hand* das Problem von den Weinfässern, die man wässern will, u. s. w. übermittelt (Tartaglia, Opere ecc., p. 226, 262); könnte er also nicht in derselben Weise, das heisst versteckt, einige Zeit vorher in Scene getreten sein, ohne dass Tartaglia es gewusst? In der Geschichte des Quesito XL haben wir ein gutes Indicium (was auch Andere vielleicht darüber gemeint haben), dass Colla direct mit Fiore sich einliess und ihn immer über Fragen der genannten Natur reizte, und stets mit dem Zwecke, ihm sein Geheimniss zu entreissen (a. a. O. p. 275). Obgleich dies 1539 geschah, also viel später als in dem Jahre, das wir jetzt brauchten, berechtigt nicht dennoch dies Beispiel anzunehmen, eine ähnliche Geschichte sei auch eher, vielleicht sogar schon 1530 passiert? Und ferner: Von wem, wenn nicht von Fiore, hätte Colla den Namen und das Vaterland desjenigen kennen gelernt, der

wurde; die grobe Auslassung TARTAGLIAS über diesen Bruch in seinem Libro nono delli Quesiti et Inventioni diverse, und der mathematische Wettkampf durch gedruckte Herausforderungen *(Cartelli)*, die den berühmteren Mathematikern und ausgezeichneten Personen in Italien mitgetheilt wurden, der sich sogleich zwischen dem schon genannten FERRARI und TARTAGLIA selbst entspann; — derselbe nahm am 10. Februar 1547 seinen Anfang und endete kläglich am 10. August des folgenden Jahres mit einer feierlichen Disputation zwischen beiden Brust gegen Brust in der Kirche S. Maria del Giardino in Mailand vor einem zahlreichen Volke, in Gegenwart eines Haufens von Freunden oder Parteigängern des ersten und von anderer Seite im Beisein eines einzigen unwissenden Bruders — : alle diese Thatsachen und Erzählungen, die es für mich genügt, kurz zu erwähnen, bilden den umfangreichen und merkwürdigen Gegenstand der vielerwähnten Geschichte; eine Geschichte, die einzig dasteht in der gesammten Geschichte der Mathematik durch alle ihre Eigenthümlichkeiten; eine Geschichte, die den feurigen und fruchtbaren Geist der Italiäner offenbart, der bei Gelegenheit auch von wenig phantasiereichen Materien angeregt wird, von Materien, die weniger als geeignet scheinen mögten, um in den Gemüthern die Art von Ferment zu erzeugen, aus der jede Art des Studiums

---

zuerst die cubischen Gleichungen löste? Aus der oben in unserem Texte folgenden Erzählung ist klar, dass es Colla war, welcher den Namen und das Vaterland dem Cardan mittheilte, während bei Tartaglia, in seiner erwähnten Erzählung, der erste Erfinder selbst nur unter der Benennung eines „*grossen Mathematikers*“, die Fiore in den Mund gelegt wird, sich zu erkennen gibt, und, man bemerke wohl, mit affectierter Ungläubigkeit von Seiten des Tartaglia, dass nicht nur nicht Fiore, sondern nicht einmal der angerufene *grosse Mathematiker* wirklich die höchst dunkle Regel entdeckt hätten (Tartaglia, Opere ecc. ecc., p. 235 u. 237). Im Uebrigen lasse ich die Wahrheit in Betreff meiner Meinung dahingestellt, aber mit der Ueberzeugung, dass, wenn andere Beweismittel nothwendig wären, um ihr unzweifelhafte Zustimmung zu verschaffen, auch andere Beweismittel verlangt werden müssten, um ihr zu widersprechen. Ich bin auf dieselbe durch eine aufmerksame und unparteiische Lectüre der ganzen Angelegenheit geführt worden. Der Leser wird sehen, ob nicht aus dem Folgenden diese Meinung Bestätigung erhalten wird, und ob ich sie nicht wie ein Vorspiel zu dem gemacht habe, was ich eben zu beweisen im Begriffe bin, zu dem Einfluss, will ich sagen, dem directesten Antheil, der viel grösser ist, als man bis jetzt angenommen hat, welchen die Originalentdeckung Ferros auf die algebraischen Entdeckungen hatte, die in der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts beendigt wurden.

wundersame Hilfe erhält; eine Geschichte ferner, höchst interessant durch die wichtigen Entdeckungen, welche die Reihe der Disputationen und der hauptsächlichen einschlagenden Thatsachen, die sie bilden, der Wissenschaft eintrug. Das muss ich übrigens noch über diese Thatsachen erklären, dass der Ueberbringer des obenerwähnten Capitels in Versen an CARDAN TARTAGLIA selbst in Person war, als Gast des ersteren in Mailand, dass ausserdem kein Anderer gegenwärtig war, als der obengenannte FERRARI (wie aus einem neuen Documente erhellen wird, das wir seinerzeit mittheilen werden), und dass die Uebergabe statt hatte am 25. März 1539; FERRARI war damals im siebenzehnten Jahre seines Lebens. Ich muss ferner noch die wichtige Thatsache bemerken: dass nämlich, wenn nicht CARDAN in der schon oft erwähnten Ars Magna und nachher in andern seiner Werke (z. B. in dem Buche De libris propriis [1])) SCIPIONE FERRO erwähnt hätte und zwar aus einem nebensächlichen Grunde, den man schon bemerkt haben wird (und den man noch besser aus CARDAN selbst in der vorhergehenden Anmerkung 1. ersehen wird), ***nach dem Urtheile der vorgenannten Historiker*** der Name desselben, der Name des ersten Entdeckers in dieser höchst dunklen Materie,

1) Die erste Ausgabe dieses Buches von Cardan ist, glaube ich, von 1557 (Lugduni apud Gul. Rouillium). In ihm liest man auf Seite 37 folgenden Passus, den man vollständig ebenso auf Seite 16 der Baseler Ausgabe desselben Buches und anderer Werke desselben Verfassers liest (per Sebast. Henricipetri An. Sal. hum. 1585) und auf Seite 66 und 103 des T. I der Sammlung aller seiner Werke: „*Tunc vero contigit ut Brixiensis* „*nomine Joannes Colla, vir . . . ingeniosus, ac in Mathematicis exercitatus, Me-* „*diolanum veniret: retulitque inventas esse duas regulas Algebrae, ut vocant, cubi* „*et numeri invicem comparatorum*“ (hier erscheint ein grober Druckfehler, der in alle obengenannten Ausgaben von der ersten zur letzten übergegangen ist, ein Fehler, von Niemanden, die den gegenwärtigen Passus zu Ehren Ferros citieren oder mittheilen, bemerkt; es scheint nämlich, dass man lesen muss: *cubi Rer*[illegible] (oder *Laterum*) *et numeri invicem comparatorum.* — M. s. die letzte aus d[illegible] Ars Magna mitgetheilte Stelle). „*Sciscitatus sum, a quo? A Scipione Ferr*[illegible] „*Bononiensi, inquit. Quis habet? Nicolaus Tartalea, dixit, et Antonius Ma*[illegible] „*Floridus. Sed Tartalea, cum Mediolanum venisset, illas me docuit, quam*[illegible] „*satis invitus. Has cum diligenter perscrutatus essem, cum Ludovico Ferrar*[illegible] „*inventa demonstratione alias innumeras etiam adinvenimus, ut ex his libr*[illegible] „*Artis Magnae conficerem.*“ Man beachte den grossen und ehrenvollen Th[illegible] der hier in dieser dunklen Untersuchung und Erfindung von dem Meister d[illegible] Schüler zugesprochen wird.

verloren gegangen sein würde[1]). TARTAGLIA hätte ihn *nach der Behauptung der nämlichen Geschichtsschreiber* niemals ausgesprochen, weder in den Quesiti et Inventioni ecc., noch im General Trattato di Numeri e Misure (Arithmetik, Geometrie und Algebra), noch in irgend einem andern seiner Werke. Jener ZUANNE DE' TONINI DA COI oder GIOVANNI COLLA hinterliess keine Frucht seines anerkannten[2]) Geistes, aus der sich jener Name hätte entnehmen lassen mit irgend einer der vielen parteiischen Einzelnheiten, die in Betreff dieses Gegenstandes höchst erwünscht sein würden. Von jenem abentheuernden Abacisten DEL FIORE (Herausforderer der NEWTONS von damals) weiss man fast Nichts weiter, als das, was ich mitgetheilt habe. Doch wird es nicht entgangen sein, dass man seinem Bekenntniss oder dem Vertrauen auf sein Wort verdankt, dass wir wissen, dass FERRO der gewesen ist und noch immer als der verehrt wird, welcher zuerst die cubischen Gleichungen löste, und dass die Epoche dieses höchst glücklichen Fortschrittes der Algebra um das Jahr 1500 fixiert werden konnte (jenen ungefähr dreissig Jahre vor dem Jahre 1530, von welchem die obenerwähnten Herausforderungen FIORES datieren).

Seitdem ich aber ein wenig Uebersicht über diese Sachen gewonnen, konnte ich mich niemals überreden, dass diese Angelegenheiten genau so vor sich gegangen, wie sie die Erzählung in Bezug auf DAL FERRO vorträgt. Für mich hatte diese Erzählung immer etwas Histörchenhaftes. Für mich, muss ich bekennen, hatte die Ueberlegung immer zu viel Kraft, dass die grossen Männer selbst sehr wohl den Werth ihrer Erfindungen kennen, wenn auch entweder, weil sie inmitten einer boshaften Mittelmässigkeit leben, oder durch die sogenannte Unwissenheit

---

1) „*Le nom de celui qui résolut le premier ces équations ne nous est arrivé* „*que par hasard: aucun historien du temps ne le cite, et sa méthode a péri avec* „*lui*" (Libri, Histoire etc., T. 3. p. 148—149). — „*Questo Italiano*" (Scipione Ferro) . . . *gode il vanto di essersi il primo innoltrato con regola al-* „*l'analisi di equazioni di 3°. grado, sciogliendo il caso* $x^3 + px = q$*: regola della* „*quale communicò la pratica ad un suo scolare Antonio Maria Fiore, o del Fiore.* „*Qui finisce tosto la storia dell' invenzione di Scipione del Ferro, ignota af-* „*fatto rimanendo la via da lui tenuta*" (Cossali, Origine ecc. dell' Algebra, Vol. 2. p. 97).

2) Cossali, Origine ecc. dell' Algebra, Vol. 2. p. 102 u. ff.; M. s. auch den Anfang der Stelle aus Cardan in der vorletzten Anmerkung.

der Zeit, oder durch andere Widerwärtigkeiten die Erfindungen von den Zeitgenossen nicht gerecht gewürdigt, aufgenommen und applaudiert wurden. Sie selbst sahen sich dann vor, indem sie dafür sorgten, sie weit um sich zu verbreiten und sie der Nachwelt zu übermitteln, die früher oder später, aber sicher, sich dankbar und als Rächerin des vernachlässigten Verdienstes erhebt; sie sahen sich vor, indem sie dieselben zu irgend welchem Gebrauche, der sie lebendig oder im Gedächtniss hält, anvertrauten. Indem wir jetzt darüber weggehen, dass keiner der angezogenen unglücklicheren Fälle, nach Allem, was bekannt ist, Dal Ferro bei seiner ausgezeichneten Erfindung begegnen konnte, frage ich aber, hätte er, auch bei allen möglichen Hindernissen und Widerwärtigkeiten, von derselben einen schlechteren Gebrauch machen können, einen derselben, sich selbst und der hochberühmten Studienanstalt weniger würdigen, als dass er sie jenem unsinnigen Anhängsel Fiore anvertraute und nichts Anderes that, als was man nach der Erzählung glauben sollte? Man hatte es nur mit einem seiner Schüler zu thun, als solcher gab er sich in Brescia und Venedig aus; der Schüler reichte nicht heran an den *grossen Mathematiker;* sein Geheimniss einem solchen anvertrauen, das hiess Erfindung und Erfinder einem schlechten Eindruck preisgeben; ist es möglich, dass Ferro, einmal entschlossen, einen so zurückhaltenden Gebrauch derselben zu machen, nicht hätte einen einzigen Würdigen, würdiger als Fiore, unter den Zuhörern von sechs Jahrfünften an öffentlicher Schule finden können?

Aber es ist nicht nöthig, dass ich mich dabei noch weiter mit anderen Betrachtungen aufhalte. Sie werden schon jedem beifallen, wenn ich kund zu thun habe, dass die vorgebrachten Zweifel für mich ein Sporn und ein Mittel waren, um dazu zu gelangen, manche Thatsache von Wichtigkeit wieder aufzufinden, die sie bestätigt und zum grossen Theile löst, und die einen auf den Weg zu weiteren ähnlichen Funden bringen kann. Meine Untersuchungen und irgend welche Ausarbeitungen hierüber dürfen nicht vollständig in diese meine gegenwärtige Arbeit eintreten. Vielmehr müssen sie, ausser einer gedrängten Mittheilung dessen, was Scipione Ferro näher angeht und die zweite Epoche der mathematischen Facultät des bologneser Studiums, für eine der folgenden Schriften aufbewahrt werden, auch in der Hoffnung, sie vermehren zu können. Aber ich rede zu einer Versammlung, von der jedes Mitglied beitragen kann, dieses interessante und dank-

bare Thema zu fördern, und nicht wenige derselben würden sich weit höher erheben als ich. Aber ich arbeite Materialien zur Geschichte, eine Art von Arbeit, bei der man nicht genau die fortschreitende Ordnung der Dinge und Zeiten zu beachten nöthig hat. Damit ist also der Faden meiner Untersuchungen fast vollständig am Ende.

Keiner der obenerwähnten Schriftsteller suchte zu sehen oder sah die obengenannten gedruckten Cartelli des mathematischen Wettkampfes wirklich, der zwischen FERRARI und TARTAGLIA geführt ist. Nur unser sehr wohl verdienter FANTUZZI thut zunächst in dem Artikel: FERRARI LODOVICO seiner Notizie degli Scrittori Bolognesi dieser Cartelli, wenn auch in zweideutiger Weise, Erwähnung: „*Der genannte P. Abate Cassati*[1]) „ . . . *sagt, er habe in der Biblioteca Belgiojosa in Mailand* „*die Abhandlungen über die Streitfragen gesehen, die Ferrari* „*mit Tartaglia gehabt, und zwar mit folgenden Worten:* „‚*Quaestionum monumenta, quas cum Tartalea ha-* „‚*buit (nämlich Ferrari) impressa inspexi in libro* „‚*Bibliothecae Belgiojosianae; Italicus liber est,* „‚*unam si excipias latinam Epistolam Ferrarii ad* „‚*Tartaleam Mediolani datam Kal. Aprilis 1547,* „‚*ac partim Venetiis excusus per Octavianum* „‚*Scottum, et partim, ut videtur, Mediolani. Ini-* „‚*tio libri, italicum est carmen MSS. Joannis An-* „‚*tonii Cazzuli qui in literatis mediolanensibus est* „‚*apud Picinellum, et Argelatum*[2])‘.“ — Schade! dass LIBRI, statt bei der ersten und einfachsten Interpretation dieses Textes des CASSATI, die auch durch den Text FANTUZZIS eingegeben wird, stehen zu bleiben, diese *Quaestionum monumenta* für eine *Darstellung* der Herausforderungen, die zwischen FERRARI und TARTAGLIA vorgekommen, genommen hat und nicht gesehen, dass es sich um die Originalcartelli der Herausforderung selbst (Vorlage und Antwort, *Proposte* und *Risposte*)

---

1) Francisci Cicerei Epistolarum Lib. XII etc. Milano 1782, T. I. p. 59 u. 62. Epistola X, Anmerk. 2. Diese Anmerkung des Cassati, des Herausgebers der Briefe des Cicereo, der ein Schüler Ferraris in Mailand war, enthält den folgenden lateinischen Passus, der sich auf genannte Cartelli bezieht.

2) Fantuzzi, Notizie degli Scrittori Bolognesi, T. 3. p. 322.

handelte, die von beiden Seiten zwischen dem 10. Februar 1547 und dem 24. Juli 1548 hintereinander ans Licht gegeben und nachher von einem Gelehrten gesammelt wurden, um jenes Buch der Biblioteca Belgiojosiana zu bilden, das CASSATI gesehen und beschrieben. Und ebenso schade! dass LIBRI den lateinischen Brief FERRARIS an TARTAGLIA, der speciell im Texte des CASSATI erwähnt ist, gleichfalls für einen der ***Briefe*** des FERRARI genommen hat, ***die*** in die genannte ***Darstellung aufgenommen seien***, und nicht vielmehr, wie es wirklich ist, für eins der Cartelli der Herausforderung selbst, die alle die Form von Briefen besitzen (wie auch der Sinn verlangt, den man in ähnlichen Fällen mit dem Worte ***Cartello*** verknüpft), und für sich allein, ohne andere ***Darstellung***, eben jenes Buch bilden [1]). Wenn ihm die erwähnte Vermuthung in den Sinn gekommen wäre, so darf man annehmen, dass er Alles gethan haben würde, sich die Möglichkeit der Untersuchung eines so kostbaren Documentes, vielmehr einer Anhäufung von Documenten zu verschaffen. Aber FANTUZZI handelt ein zweites Mal, und diesmal auf die deutlichste und ausführlichste Weise, von den vorgenannten Cartelli. Im letzten Theile seines schon erwähnten Werkes, der ***Zusätze und Verbesserungen*** zu dem Hauptwerke enthält, fügt er vier volle Blätter dem vorgedachten Artikel über LODOVICO FERRARI hinzu, den er früher mit einem einzigen Blatte abgefertigt [2]). Ich bemerke diese Eigenthümlichkeit vor Allem deshalb, weil sie es um so unbegreifbarer macht, wie der Zusatz den genannten Historikern entgangen sein konnte, die wirklich bestimmte Anzeichen davon geben, dass sie ihn nicht gesehen haben. Derselbe

---

1) „*On n'a imprimé de lui* (von Lodovico Ferrari) *que des lettres* „*insérées dans la relation de la grande querelle qu'il eut avec Tartaglia*“ (Libri, Histoire etc., T. 3. p. 181, er citiert auch in der Anmerkung die oben mitgetheilte Stelle Fantuzzis und auch eine Stelle aus dem Leben Ferraris von Cardan, die wir nachher wörtlich mittheilen werden). Uebrigens fasst auch Tiraboschi diese *monumenta quaestionum* etc. in dem Passus des Cassati als *Darstellung* oder *Acten* der Disputationen etc., und nicht für die *Schriften* dieser Disputationen selbst auf, wie das Wort *monumenta* auch bedentet, das zu allgemein ist, und deshalb von Cassati schlecht gewählt. Hier die bezügliche Stelle Tiraboschis: „*Nella sceltissima biblioteca del Sig. Principe Belgiojoso* „*in Milano si conservano stampati gli Atti delle Dispute del Ferrari sostenute* „*contro il Tartaglia, come ha avvertito l'eruditissimo P. ab. Cassati ecc.*“ (Storia della Letteratura Italiana, T. 7, P. 2, L. 2, C. 2, § 44, Anm. (a)).

2) Notizie degli Scrittori Bolognesi, T. 9, p. 99—106.

ist unglaublich interessant. Er enthält einen Auszug mit Originalstellen aller sechs Cartelli oder Antworten des TARTAGLIA auf die sechs Cartelli oder Aufgaben des FERRARI und auch einen Auszug des fünften Cartello des letzteren. FANTUZZI sagt, dass diese *verschiedenen Druckbogen des Wettkampfes* zwischen FERRARI und TARTAGLIA ihm *in die Hände gerathen*, *nachdem er sein Werk vollendet*, und dass er glaube, *dem Leser etwas Angenehmes zu thun*, wenn er in seinem *Zusatze den Hauptinhalt dieses Streites* gäbe, wenn ihm auch die *Fragen des Ferrari* fehlten (eine hat er hernach noch gesehen und gibt davon, wie wir schon angemerkt, später einen Auszug); aber, setzt er mit gutem Grunde hinzu, *aus den Antworten Tartaglias kann man dessenungeachtet ableiten, was Ferrari geschrieben.* FANTUZZI kannte die grosse Seltenheit und die hohe Wichtigkeit solcher Drucke sowohl im bibliographischen als im wissenschaftlichen Sinne nicht, und man kann ihm daraus keinen Vorwurf machen; anderenfalls würde er sie vollständig reproduciert haben, ohne ein Wort wegzulassen oder zu verändern, vorzugsweise was den Brief FERRARIS betrifft, den er einsehen konnte, und der für sich allein ein Werk von 28 Blättern in gewöhnlichem 4° (dem Formate aller Cartelli) bildet; oder er hätte dafür gesorgt, dass sie nicht verloren gehen konnten, indem er sie z. B. in irgend einer öffentlichen Bibliothek niederlegte (in den öffentlichen und Privatbibliotheken, sowie in den Buchhandlungen dieser Stadt habe ich sie vergeblich gesucht und wieder gesucht). Es scheint, dass auch er nicht gewahr wurde, dass er in diesen Drucken selbst ein gut Theil jener *Monumenta Quaestionum* besass, über welche der mitgetheilte Passus des CASSATI handelte, und auf welche sicher zum Theil auch CARDAN in der von ihm verfassten Lebensbeschreibung FERRARIS anzuspielen scheint, wenn er schreibt: „*Inde statim . . . certavit* „*cum Joanne Colla et post cum Nicolao Tartalea . . . mathe-* „*maticis sui temporis clarissimis*, *publiceque eos superavit:* „*cuius rei adhuc extant Monimenta Publica*“ [1]). Ferner hat weder FANTUZZI noch irgend ein Mathematiker, so viel ich weiss, zwei höchst werthvolle Stellen der vorgenannten Cartelli richtig gewürdigt, die in Bezug auf SCIPIONE FERRO alle Aufmerksamkeit verdient hätten; Stellen, die in den erwähnten Aus-

---

1) T. 9, p. 568—569 der Sammlung der Werke des Cardan.

zügen von FANTUZZI selbst originaliter wiedergegeben sind: dieser nicht, weil er sie sonst dazu benutzt hätte, seinen magern Artikel über SCIPIONE FERRO umzuschmelzen und zu vermehren, den er statt dessen so liess, wie er ihm zuerst aus der Feder gekommen; die Mathematiker nicht, weil sonst, wenn nichts Anderes, die Geschichte der ersten Auflösung der cubischen Gleichungen anders erzählt werden würde, als sie erzählt wird, und der bologneser Algebrist der zweiten Epoche der mathematischen Facultät der bologneser Studienanstalt mehr und mit mehr Grund in den Schulen und in den Handbüchern der Algebra und Geometrie geehrt werden würde. Wir geben hier die zwei Stellen wieder, auf die wir uns bezogen haben, als die von den durch FANTUZZI aus allen Cartelli ausgewählten, welche in directer Weise der vorgenannten Epoche angehören. Die erste ist aus der „*Seconda Risposta data da Nicolò Tartalea a Messer* „*Lodovico Ferraro delle Matematice Lettor Publico in Melano* „*ecc.*;“ sie steht Seite 6 des Originaldruckes, auf Seite 102 des T. 9 von FANTUZZI und ist folgendermassen gefasst: „*Dapoi* „*consequentemente diceti, che me aprovareti tal cosa non esser* „*mia inventione*“ (es handelt sich um die allgemeine Auflösung der Gleichung $x^3 + px = q$), „*attento che za cinque anni essendo* „*voi insieme con el Cardano a Bologna un Anibale della nave* „*huomo ingenioso, et humano, elquale vi mostro un libro de* „*man dun Scipione ferreo suo Socero, inelqual questa mede-* „*sima inventione elegantemente, et dottamente haveva anotata.*

„*Questa particolarita non mi par cosa licita a doverla* „*desputare ne manco negare, perche saria presuntione gran-* „*dissima la mia a darme ad intendere quelle cose che da me* „*sono state ritrovate che per altri tempi le non potesseno* „*esser state ritrovate da altri, et simelmente che per lavenire* „*altri non le potesse ritrovare, Anchor che dal detto Signor* „*Hieronimo* (sc. Cardano), *over da me non fusseno state in* „*luce poste ecc.*“ [1]). Zur Aufklärung der Stelle und zur Stütze der Betrachtungen, die daraus im Ueberfluss entspringen, bemerke ich, dass das Cartello des FERRARI, auf welches sich die vorgedachte zweite Antwort TARTAGLIAS bezieht, vom 1. April 1547 datiert ist, dass also die hochmerkwürdige Mittheilung des von der Hand des SCIPIONE FERRO geschriebenen Buches an

1) M. s. die Anmerkung (a) am Ende der Rede.

Cardan und Ferrari in das Jahr 1542 fällt, ***das heisst drei Jahre vor der ersten Ausgabe der Ars Magna Cardans.*** Will etwa jemand wissen, wer der Vorzeigende, jener Annibale Dalla Nave war? Unter den Notizen, die ich mir aus den ***Rotoli*** der alten bologneser Studienanstalt abgeschrieben, finde ich Folgendes: „In dem ***Rotolo*** des Jahres 1526, welches das „erste ist, in welchem Scipione Del Ferro fehlt, ist zum „ersten Male und für dieselbe Professur als Ferro aufgeführt „Annibale Dalla Nave: ***Ad Arithmeticam et Geometriam*** „— ***Hannibal Navius*** [1]) —. Er erscheint dann fortdauernd und „immer für die nämliche Professur in den ***Rotoli*** bis zu der des „Jahres 1558 inclusive."

Das ist also die fremdartige Erfindung Ferros, die nicht blos hier geboren wurde, sondern auch hier in der mathematischen Facultät der Studienanstalt über ein halbes Jahrhundert hindurch blühte; durch fünf Lustren ungefähr, indem der Erfinder selbst lebte und las; durch andere sechs und noch mehr in dem Buche von seiner Hand, in welchem diese Erfindung gelehrt und elegant erklärt war: „***in quo istud inventum eleganter et docte explicatum tradebatur***" (Aehnliches werden wir auch in einem an-

---

1) Wenn der Annibale di Scipione (nur so bezeichnet), der in dem unmittelbar vorhergehenden *Rotolo*, d. h. also für 1525, *in Verbindung mit Del Ferro* für dieselbe Vorlesung verzeichnet steht, demselben Hannibal Navius, Annibale dalla Nave, entspricht, wie man fast beschwören könnte und wie, sehe ich, der obengenannte Mazzetti in seinem erwähnten und empfohlenen Repertorio di tutti i professori ecc. ohne Schatten eines Zweifels annimmt (p. 107, no. 990), so würde dadurch die schon so lange Laufbahn des Dalla oder Della Nave an dieser Studienanstalt noch länger werden. In dem genannten Jahre hätte er als Assistent seines Schwiegervaters Del Ferro gedient, der schon durch 28—29 Lehrjahre und wahrscheinlich auch durch Alter und Trübsal niedergedrückt war. — Ich erlaube mir hier das wiederzugeben, was Mazzetti an der erwähnten Stelle sicherlich zu weiter Ehre des Dalla Nave mittheilt, dass nämlich Dalla Nave den hochberühmten Ulisse Aldrovandi unter seinen Schülern gezählt habe. Von diesem ist bekannt, dass er schon als Jüngling mit grossen Versprechungen dem Studium der Arithmetik sich widmete, um sich dieselbe so bald als möglich im Handel zu Nutze zu machen, den er bekanntlich ausübte, bis er sich dem Studium der Naturgeschichte vollständig hingab, in der er soviel leistete und hoch über seinen Zeitgenossen stand. Er hinterliess darin der Nachwelt ungeheure Materialien, die man noch heute mit Vortheil einsehen und benutzen kann, und die man wohl als das grösste Monument ansehen darf, welches vielleicht jemals von einem einzigen Manne der Wissenschaft errichtet ist.

deren Documente finden, das wir später vorführen werden); jenes Buch, das unzweifelhaft aus Gemeinsamkeit der Studien und des Vaterlandes, noch mehr aber wohl aus väterlicher hochehrenvoller Liebe vom Verfasser und Meister auf den Schüler und Nachfolger auf dem Lehrstuhle überging, vom Schwiegervater auf den Schwiegersohn. Indem dieser es in verbindlicher Weise demjenigen Abschrift zu machen lieh, dem er es, wenn irgend jemand, mit grösster Eifersucht hätte verheimlichen sollen, bewies er so, welchen Gebrauch er sich davon zum Nutzen der Wissenschaft und der Studierenden zu machen berufen hielt (und vielleicht hatte der Erfinder selbst ihm dies empfohlen). Aus alle dem und aus der Ueberlegung, dass in jenen Zeiten an der Universität Bologna die Tausend und aber Tausend Schüler und Gelehrten aus der ganzen Welt zusammenkamen und zum Theil sich jährlich erneuerten, weshalb auch eine mündliche Mittheilung, eine Vorlesung in einem Hörsaale des Archigymnasiums wiederhallen und verbreitet werden konnte wie die feierlichsten unserer Publicationen durch den Druck (eine Thatsache, die man immer bei der Geschichte aller alten Studienanstalten gegenwärtig haben muss, vorzüglich bei den Docenten, deren Schriften nicht bis auf uns gekommen sind oder erst spät veröffentlicht wurden), wird man in Etwas schliessen, ob es möglich sein konnte, ob es möglich war, dass die Originalerfindung Ferros nur mit jenem schwerfälligen und zufälligen Erfolg aus Bologna ausging, wie er aus der obenerwähnten Erzählung erhellt; ob es möglich sein konnte, ob es möglich war, dass hier gleichsam eine vernachlässigte Pflanze in unfruchtbarem und undankbarem Boden entstehen konnte, wie man aus jener Erzählung leicht folgern könnte. Ich komme jetzt nicht zur Beantwortung aller Zweifel, die über den Gegenstand in Rede vorgebracht werden könnten und von denen einige vielleicht bei diesen meinen letzten Worten entstehen werden. Zum Beispiel: Wie lässt sich, gerade nach jenen Worten verstehen, dass die Erfindung des Ferro in jenen 30 Jahren, die der Bericht angibt, vollständig unbekannt blieb, an deren Anfang dieselbe uns zufällig sich gezeigt haben sollte, um der Herausforderung Fiores Glauben zu verschaffen, und die wir später fast dem ganzen Zeitraum entsprechen sahen, die jener auf seinem Lehrstuhle sass, nachdem er seine Erfindung gemacht hatte? Ohne die Vermuthung, die hieraus entsteht, zurückzudrängen, dass Ferro mit einer gewissen Eifersucht seine Entdeckung gehütet habe — eine Art

der Zurückhaltung, die in mehrfacher Hinsicht viel entschuldbarer bei ihm ist als bei TARTAGLIA, von dem wir unzweifelhaft wissen, dass er sie benutzen wollte —, wollen wir bemerken, dass anzunehmen erlaubt ist, es sei die Erinnerung an andere Mittheilungen der von FERRO gemachten Erfindung in dem genannten Zeitintervall verloren gegangen, während dessen sie nicht vollständig unbekannt blieb, sondern im Gegentheil bekannt war und in soweit fruchtbar gemacht, als eine Erfindung von dieser Höhe und der entsprechenden Art der Studien es unter den nicht sehr günstigen Bedingungen am Anfange des XVI. Jahrhunderts sein konnte. Es ist erlaubt anzunehmen, wir wiederholen es, dass sie bekannt und fruchtbar gemacht war, wenn nicht viel, so doch sicherlich bedeutend mehr, als es scheinen mögte, wenn man auf die bezüglichen Schriften TARTAGLIAS und CARDANS völliges Vertrauen setzt; Schriften, die, so wie es nöthig ist, vorzugsweise unter Vergleichung der Cartelli untersucht, Widersprüche aufdecken, Verschweigungen und andere Anzeichen geringer Wahrheitsliebe und ungeheuer parteiischer Gesinnung. Dass es uns aufbewahrt war, nach drei Jahrhunderten! sowohl die Cartelli als den ersten vollständigen Beweis für eine der vorgedachten Mittheilungen, vielleicht die hauptsächlichste, gleichsam aus dem Grabe zu reissen, berechtigt das nicht, auch die Existenz ähnlicher vergessener, oder deren Andenken verloren gegangen ist, zu vermuthen, und zu hoffen, dass auch diese, wenn mit der nöthigen Anstrengung danach gesucht wird, wieder aufgefunden werden könnten? Aber wir überlassen Andern, den Gegenstand besser zu behandeln (auf den wir aber nicht ermangeln werden, in unserer folgenden Schrift bei jeder Gelegenheit ein Auge zu haben), indem sie Beispiele von nicht weniger wichtigen Erfindungen anführen, die nicht weniger unerwartet entstanden als jene, die mit ihrem Erfinder dasselbe oder noch schlimmeres Schicksal erduldeten; und genau in der nämlichen Weise nicht durch ihre Schuld, nicht durch die Schuld der Länder, die sie entstehen sahen, vielmehr durch eine Anhäufung von zufälligem Missgeschick, das nicht immer vollständig angebbar ist, meistens aus Grund der Magerkeit der Studien, auf denen man grosse Theile der weiten Geschichte der Wissenschaft hat errichten müssen. An ähnlichen Beispielen ist kein grosser Mangel!

Wir kommen endlich zu der zweiten der beiden Stellen der Cartelli FERRARIS und TARTAGLIAS, die wir aus FANTUZZI

zu reproducieren versprochen haben: diese Stelle sowie die schon mitgetheilte erste, sind zu lesen im 9. Theile des citierten Werkes, das 1794 erschien, also fünf Jahre bevor COSSALI seine tiefsinnige und werthvolle Geschichte publicirte; die Stelle lautet buchstäblich, wie folgt: „*Jo m'allegro, Messer Nicolò* (es ist FERRARI, der in seinem fünften Cartello an seinen Gegner schreibt) „*che in questi vostri quesiti, m'habbiate dato materia di gio-* „*vare a quei che si dilettano di Geometria, et di Arithmetica,* „*non essendo tuttavia pervenuti anchora al colmo delle pre-* „*dette scienze. E questo, percioche ne' vostri primi diecesette* „*quesiti si contiene quella bella inventione di operare senza* „*mutare l'apertura del compasso, la qual io non so da chi si* „*havesse principio, ma io so bene, che da circa a cinquant'* „*anni in quà molti bei ingegni si sono affaticati per accrescerla,* „*fra quali, in gran parte e stato la felice memoria di messer* „*Scipione dal Ferro cittadino Bolognese*"[1]) (bis hierher nach FANTUZZI, T. 9, p. 106, und hier weiter nach dem Original-Cartello). „*Jo dunque voglio esser quello, che a tal inventione* „*dia tutta la perfettione, che può havere, dimostrando per* „*questa via, non solamente alcune propositioni, trovate da* „*nostri maggiori, ma etiandio tutto Euclide*"[2]). Das Cartello, dem obige Stelle angehört, wurde in **Mailand** mit dem Datum *des Monat October* **1547** gedruckt. Am Anfange des XVI. Jahr-

1) Woher kannte aber Ferrari die Existenz dieser speciellen geometrischen Untersuchungen des berühmten Mitbürgers? Vielmehr wie konnte er sie so untersuchen, dass er ein so bestimmtes lobendes Urtheil abgeben konnte? Waren sie etwa in demselben Werke von der Hand Ferros, das Dalla Nave besass, enthalten oder in einem zweiten Werke desselben Verfassers separat behandelt, das ebenso wie das erste Ferrari und Cardan mitgetheilt war? Die eine oder die andere Voraussetzung oder eine ähnliche Thatsache muss man festhalten, da bei der Bekanntheit des Lebens von Ferrari die Vermuthung unzulässig ist, dass er aus der lebendigen Rede des Ferro Kenntniss der Studien desselben hätte erlangen können.

2) Man sehe p. 25 des Originalcartello, welches folgenden Titel führt: „*Quinto Cartel o di Lodovico Ferraro contr' a Messer Nicolò Tartaglia, nel quale* „*si dichiara come detto Messer Nicolò s' è disdetto ecc.: con la Reprovatione del* „*medesimo Lodovico*" (nämlich der Lösungen, die in der vierten Antwort des Messer Nicolò enthalten): „*oltre di ciò con la Risolutione fatta integramente dal* „*medesimo Lodovico alle trentuna dimande* (des andern)." Die angezogene Stelle findet sich genau am Anfange dieser *Risolutione*, die so überschrieben ist: „*Risolutione fatta per Lodovico Ferraro a i trentaun quesiti mandatigli da risol-* „*vere per Messer Nicolò Tartaglia.*"

hunderts erweiterte also, nach dem, was uns FERRARI erzählt, SCIPIONE DAL FERRO um ein Beträchtliches jene Art geometrischer Studien, in denen später sowohl CARDAN als TARTAGLIA und FERRARI selbst, sowie BENEDETTI einer nach dem andern sich übten, und an denen in den uns nächsten Zeiten man sich den trefflichen Geist des tugendsamen MASCHERONI erfreuen sah [1]). Aus keinem Geschichtswerke, aus keinem Erinnerungszeichen kennen wir das Jahr der Geburt und des Todes des seltenen Geistes des FERRO; die für jene Jahrhunderte so höchst spärlichen Documente dieser alten Studienanstalt, dienen nur dazu, die Zeit seiner Laufbahn in derselben zu fixiren, das heisst die 30 Jahre von 1496/97 bis zum Jahre 1525/26, in denen er seinen Lehrstuhl inne hatte. Endlich lernen wir aus diesen andern Documenten, den Cartelli des FERRARI und TARTAGLIA und den Notizen über die Herausforderung FIORES, die uns von CARDAN und TARTAGLIA überliefert worden sind, dass FERRO gerade während dieser genannten Laufbahn, aber davongehend, ehe er sie zur Vollendung gebracht, in den dunkelsten algebraischen Disciplinen nicht nur, sondern auch in den geistreichsten und originellsten geometrischen blühete.

Die beiden Stellen, die ich aus den Cartelli des FERRARI und TARTAGLIA wiedergegeben, sind die, um die es uns hauptsächlich zu thun war. Ich werde aber noch eine dritte, immer nach FANTUZZI mittheilen, die eine meiner früheren Behauptungen beweist, die für unseren Gegenstand nicht ohne Gewicht ist: „*Da poi diceti*“ (wohlverstanden, es ist TARTAGLIA, der hier und zwar in seiner obenerwähnten Seconda Risposta ecc. schreibt), „***acioche non me maraviglia, donde che voi siati ad-„vertito de tutte le mie bosie, che a me retornati in memoria, „come che voi ve trovasti in la medesima casa con el Car-„dano, quando che mi fui a Mellano alloggiato in la mede-„sima, con lui, et che ve trovasti presente a tutte le nostre***

1) Libri, Histoire etc., T. 3, p. 122. Bei der dritten Epoche der mathematischen Facultät der alten Studienanstalt Bologna müssen wir im Speciellen von Ferrari sprechen, der Hauptzierde dieser Epoche wenn auch nur für eine ganz kurze Zeit, und werden uns dann zu seinem fünften Cartello wenden, zu diesen speciell *italiänischen* geometrischen Untersuchungen, in Betreff deren wir einige erläuternde und ihre Geschichte berichtigende Notizen bereit haben. Wer jedoch die oben citierte Stelle Libris unter Vergleich des zuletzt mitgetheilten Passus des Ferrari durchläuft, wird sogleich eine Berichtigung dieser Art machen können.

„parole ecc. . . . Ve rispondo che ho molto accaro che voi siati „quello che si trovava a quel tempo in casa sua quando che „gli insignai tal mia inventione ecc.“ [1]).

Es sind nun schon drei oder vier Jahre, dass ich nicht mehr das Werk unseres FANTUZZI nöthig habe, um diese und andere Stellen der berühmten, aber in Vergessenheit gerathenen Cartelli zu lesen und wieder zu lesen [2]). Ich besitze sie sämmtlich ausser

---

1) Fantuzzi, Notizie ecc., T. 9, p. 102.

2) Sie hatten wirklich einstmals grosse Berühmtheit und kamen später durch Zusammenwirkung verschiedener Umstände in Vergessenheit — den hauptsächlichsten von ihnen werden wir sehr bald andeuten —, oder blieben vorzugsweise den Gelehrten von Profession unbekannt, wie wir schon gesehen haben. Aber es wird, hoffen wir, die Bestätigung der beiden Thatsachen, die wir eben auseinandergesetzt haben, nicht unangenehm sein. In der Vorrede *an den Leser* des unsterblichen Werkes von Rafael Bombelli: „L'Algebra“ geschieht der Cartelli in der Art Erwähnung, dass es scheint, dies hätte sie vor jener Art von Tod sichern sollen, dem ihre Vergessenheit bis heute gleichzustellen ist. Man mag sie in Erwägung ziehen in folgendem Passus, den ich aus der erwähnten Vorrede *verbotenus* abschreibe: „ . . . *ma in „vero alcuno non è stato, che nel secreto della cosa sia penetrato, oltre che il „Cardano Melanese nella sua arte magna, ove di questa scientia assai disse, ma „nel dire fu oscuro; ne trattò parimente in certi suoi cartelli, i quali con Lodo„vico Ferrarij nostro Bolognese scrisse contro a Nicolò Tartaglia Bresciano, ne i „quali bellissimi, et ingeniosi Problemi si veggiono di questa scientia, ma con tanta „poca modestia del Tartaglia (come quello il quale di sua natura era così assue„fatto a dir male, che all' hora egli pensava di haver dato honorato saggio di se, „quando che di alcuno havesse sparlato) che offese quasi tutti i nobili intelletti, „veggiendo com' egli, e del Cardano, e del Ferrario straparli ingegni a questi „nostri tempi più tosto divini, che humani ecc.“* Der berühmte Libri spielt sicherlich auf diese Stelle an, wenn er bei seiner schönen und begründeten Vertheidigung Tartaglias, der von vielen zur Erbitterung und Zorn gereizt genannt wird, Bombelli in folgender Weise citiert: *„Voyez la préface de „l'Algèbre de Bombelli, où l'auteur montre un peu de partialité pour son concitoyen „Ferrari“* (Histoire etc., T. 3, p. 155, Anmerkung). Wenn wir auch in hohem Grade zugeben, dass sich in der mitgetheilten Stelle des grossen bologneser Schriftstellers Parteilichkeit zum Schaden Tartaglias zeigt, wenn nicht in anderer Art, darin, dass er von ihm Schlechtes und nicht Gutes sagt, so ist dies doch mehr zu Gunsten Cardans als zu der des Mitbürgers des Verfassers. Sogar, genauer besehen, übergeht er in seiner parteiischen Schätzung des Cardan auch etwas zum Schaden seines Mitbürgers. Den mag nun der Meister seine Hand darin gehabt haben und seinen Schüler in dem schriftlichen Streite mit Tartaglia dirigiert und unterstützt haben, wie es in noch höherem Grade Tartaglia selbst fortwährend annimmt und in ironischer Weise in seinen *Antworten* zu insinuieren sucht, obgleich diese Insinuation, weit entfernt Unter-

dem sechsten unter denen des TARTAGLIA, der seine letzte Risposta enthält. Ich besitze sie geordnet und in einem aufs Beste erhaltenen Bande vereinigt, der der Bibliothek der hiesigen Padri

---

stützung zu finden, in den *Aufgaben* oder den Cartelli des Ferrari offen geleugnet wird (m. s. die Anmerkungen (a) und (b) am Ende dieser Schrift): so ist doch die Meinung in jeder Art wohlfeil und unwahrscheinlich, den Theil, den Cardan an diesen Cartelli gehabt, als so bedeutend und so gross zu betrachten, dass man sie *die seinigen* nennen könnte, wie sie Bombelli ausdrücklich nennt. — Seiner Zeit, und zwar in einer andern Schrift, kommen wir auf diesen Punct zurück in der Hoffnung, mit guten Gründen jene Entscheidung zu empfehlen, welche ein jeder, wenn er uns folgt, in dem vorgedachten Streite Tartaglias mit Ferrari in Betreff Ferraris fällen wird, die Entscheidung nämlich, dass er ein tapferer Kämpe des Cardan war. — Es darf aber nicht Wunder nehmen, dass Libri die Parteilichkeit des Bombellischen Passus unter dem zuletzt erwähnten Gesichtspuncte entgangen ist, da er die Cartelli nicht gesehen hat. Man könnte sich vielmehr wundern, dass ihm die Stelle nur in dem secundären Gesichtspunct der Voreingenommenheit des Verfassers in die Augen gefallen ist, nicht aber unter dem Hauptgesichtspunct, dass darin die Cartelli selbst lobend erwähnt werden wegen der *sehr schönen und sinnreichen Probleme, die man darin findet!* Wie mogte er, für den

„*Poca favilla gran fiamma seconda*"

auf Grund jener Ausdrücke, die auch unser Fantuzzi enthielt (Notizie ecc., T. 3, p. 322, Anmerk. (6)), nicht zu sich und Anderen sagen: man suche und suche immer wieder jene Cartelli? Dagegen ist die einzige oder hauptsächliche Erwähnung bezüglich der Herausforderungen und öffentlichen Disputationen Tartaglias mit seinen Gegnern, die man in dem Werke Libris findet, wörtlich folgende (Histoire etc., T. 3, p. 154, Anm. (1)): „*Tartaglia* „*nous a conservé la plupart des questions qui furent proposées à cette époque* „*(Tartaglia, General Trattato, part. V, f. 71—90, lib. III)*"; als ob diese Fragen in der Zeit, wo sie zur Disputation gestellt wurden, das heisst 9—11 Jahre, bevor der General Trattato erschien, nicht schon *gedruckten* Cartelli anvertraut gewesen wären und daher schon an und für sich fähig, sämmtlich *originaliter* aufbewahrt zu werden. Untersucht man übrigens unter Vergleichung der Cartelli *sämmtliche* Stellen des General Trattato, die sich auf die Herausforderungen und Disputationen in Rede beziehen, so springen einem, wie leicht zu glauben, die nicht geringen und leichten Parteilichkeiten Tartaglias in die Augen, sei es in Rücksicht auf den Inhalt der genannten Fragen, sei es speciell in Bezug auf die Thatsachen, welche den Herausforderungen vorausgingen, ihnen den Ursprung gaben und den Gegenstand der ersten Cartelli bilden: diese *ersten* werden von Tartaglia fast gänzlich mit Stillschweigen übergangen. So vermeidet er in seinem grösseren Werke auch den Namen des Ersten aufzubewahren, der die Gleichungen 3. Grades auflöste! Ich registriere hier *sämmtliche* vorerwähnte Stellen, die ich habe finden können (um diejenigen von einer wirklichen Mühe zu befreien, denen es gefallen mögte, sie zu untersuchen und eine Vergleichung mit den Cartelli zu machen, sobald

dell' Oratorio angehörte, und der nach vielen fruchtlosen Recherchen mir endlich von einem unserer Buchhändler und Bibliographen angeboten wurde [1]). Es gibt wenig Drucke von Wichtigkeit, für

---

ich, wenn ich einige Aufmunterung finde und die Nothwendigkeit einsehe, mich bestimmte, sie vollständig durch den Druck zu reproducieren, wie ich geneigt bin): Prima Parte del General Trattato ecc., in Vinegia 1556, in der Dedication; — Seconda Parte ecc., Ibid., eod., Bltt. 30 (diese Stelle ist höchst interessant, weil man aus ihr einen schwachen Schimmer des Weges erhält, auf welchem der Verfasser selbst sagt, dazu gekommen zu sein, *eine allgemeine Regel für das Capitel cubi et rerum aequalium numero etc. zu finden.* Cossali, Origine ecc. dell' Algebra, T. 2, p. 142—143, 147 u. s. w.; Libri, Histoire etc., T. 3, p. 150, note (1)); — Seconda Parte ecc. ecc., Bltt. 41—44 (auf dem ersten Blatte findet man *eine kurze Nachricht über die Disputationen mit gedruckten Cartelli etc.*, an welche sich Cossali, ohne nach Weiterem zu suchen, in seiner Geschichte hält, um einen Bericht über die Thatsachen zu geben, die bei diesen Disputationen mit gedruckten *Cartelli* vorgekommen. — M. s. Cossali, Origine dell' Algebra, T. 2, p. 131 ff.); — Seconda Parte ecc. ecc., Bltt. 46—48, 51, 52, 67—69, 80, 82, 153, 154; — Quarta Parte ecc. in Vinegia 1560, Bltt. 16—17; — Quinta Parte ecc., Ibid., eod., Bltt. 15—16, 18, 21—23, 31, 42, 63, 64 und endlich 66—90.

1) Herr Angelo Gaetano Masetti, durch vieles Studium und lange Praxis in der Bibliographie sehr erfahren. Ihm, der den hohen Werth des Buches erkannte (das viel seltener ist als die seltensten Bücher der Bibliographen, da Niemand von ihnen, soweit ich selbst verglichen habe oder durch Andere habe vergleichen lassen, ein ähnliches gesehen zu haben scheint), werde ich stets grosse Dankbarkeit bewahren, dass er durch seine Nachforschungen zu einer Ehrenrettung Ferros beigetragen, und auch, dass er mir jenes Buch, die Frucht derselben, zu jenem höchst bescheidenen Preise überlassen hat, den meine Mittel mir nur erlaubten. — Hier ist der geeignete Platz, zu bemerken, dass ein ähnliches Buch sowohl in der Bibliothek der Universität als der Stadt fehlt. Es findet sich ebensowenig in den öffentlichen Bibliotheken Mailands, wo ich es selbst im Juli 1844 suchte (nachdem ich vorher ohne Erfolg in der Bibliöteca Belgiojosa nachgesehen), indem ich den Bibliothekaren mein Exemplar vorlegte: dasselbe wurde angestaunt und *für eine grosse Seltenheit* erklärt, besonders von dem höchst unterrichteten Vorsteher der Ambrosiana. Ich habe es mit demselben Misserfolg in der Biblioteca Quiriniana von Brescia (Bibliothek des berühmten Cardinals Quirini) und den öffentlichen Bibliotheken von Padua gesucht, sowie bei den vorzüglichsten Buchhändlern dieser letzteren Stadt (die sehr reich an den besten alten Waare sind, die man, wegen der Seltenheit der Käufer, zu sehr guten Bedingungen erwerben kann). In der Marciana zu Venedig aber fand ich einen Miscellaneenband mit der Signatur — 51514 und 1514 BF. 4 —, welcher das zweite Cartello Ferraris an Tartaglia enthält, das heisst das einzige unter allen, das in lateinischer Sprache abgefasst ist. Ich fand es vollständig mit dem zweiten Cartello Ferraris identisch, das in meinem Exemplare enthalten ist. Das

die man einen so triftigen Grund, sie zu Rarissimis zu machen, angeben könnte, als der Hauptgrund ist, den man für die Cartelli des FERRARI und TARTAGLIA angiebt, am meisten aber für die vollständige Sammlung derselben, und den man endlich nothwendigerweise aus ihrer Erscheinungsweise entnimmt. Der Grund, auf den ich anspiele, entspringt aus dem Zusammenfluss von völlig

---

Cartello, von dem ich spreche, ist im Kataloge genannter Bibliothek, der mir von dem Präfecten derselben, Herrn Cav. Monsignor Pietro Bettio, Ehrencanonicus von S. Marco, gütigst vorgelegt wurde, unter Lodovico Ferrari aufgeführt, und es ist die einzige Schrift dieses Autors, die in jenem Kataloge erscheint. — Mit diesem Cartello der Marciana*) in Venedig und den vorgenannten Auszügen der anderen Cartelli bei Fantuzzi hätte man zu den hauptsächlichsten Thatsachen gelangen können, welche die vorliegende Schrift zur Ehrenrettung des Scipione Del Ferro enthält.

---

*) Ich bin jetzt im Stande, über dieses werthvolle Schriftchen der Marciana genauere Angaben zu machen, und solche die ein schnelles Auffinden desselben ermöglichen, die zu erlangen mir bei meinem gar zu kurzen Besuche der Marciana im Juli 1844 unmöglich war: Grund die Plackereien der Ortspolizei, die mir nicht länger als 24 Stunden den Aufenthalt in Venedig gestattete (während ich in Mailand und Padua jede nöthige Erlaubniss zum Aufenthalte erhalten und dieselbe einen Monat und mehr benutzt hatte!). Dahin in glücklicheren Zeiten, am Anfange des Jahres 1867, zurückgekehrt wollte ich mit grösserer Bequemlichkeit das Werkchen, das schon beschriebene zweite Cartello Ferraris, wiedersehen (eine vollständigere Beschreibung sehe man auf p. 141, Z. 1 ff.). Es wurde mir durch den gegenwärtigen Königl. Bibliothekar, Herrn Abb. Dott. Cav. Giuseppe Valentinelli vorgelegt. Es ist das dritte von sieben in Pergament zusammengebundenen Werkchen, die einen Band von ungefähr 17 mm. Dicke, 150 mm. Breite und 200 mm. Höhe bilden. Auf dem Rücken des Bandes steht geschrieben: „*Belus Lucianus;*“ man sieht da eine No. 5 aber durchstrichen; der n° ***51514*** der Signatur von 1844, die noch immer sichtbar ist, aber durchstrichen, ist mit neuerer Tinte die Nummer ***2554*** substituiert; auf der Vorderseite des Deckels befindet sich auch noch die zweite Bezeichnung von 1844, nämlich „***1514 BF. 4***“ aber durch einen Strich mit Bleistift durchzogen. — Auf dem Titel des *ersten* der genannten sieben Werke, aus denen das Bändchen besteht, und der beginnt „***Lucianus Belus de Roccha Contrata Physicus ac Medicus***“ ist mit Tinte die Signatur ***CXCVIII. 3*** geschrieben, die, wie mir versichert wurde, den ***augenblicklichen Standort*** des Bandes in der Bibliothek anzeigt. — Das zweite Werk trägt auf dem Titelblatt die Worte: „***Jacobi Sadoleti Curtius.***“ — Das dritte ist das unsrige. — Das vierte von 1532 und das fünfte sind von einem gewissen Hercules Bonacossus und enthalten, glaube ich, Medicinische Kleinigkeiten. — Das sechste ist eine „***Oratio Cinthii Joan. Baptistae Giraldi,***“ Secretärs des Herzogs von Ferrara, mit dem Datum des Jahres 1553. — Das siebente endlich, das kein Titelblatt besitzt, ist ein Brief von Giovanbattista Giraldi an Messer Giovanbattista Pigna und die Antwort dieses an jenen, in denen sie über Ariosto schreien! — Welches Kriterium entschied wohl über die Zusammensetzung dieses Missellaneenbandes!! Und dennoch ohne die Gesellschaft der sechs, unserm Werke so viel man will fremdartigen Werkchen würde dasselbe, ein Heftchen von 6 Blatt!, unweigerlich in der ungeheuern Büchersammlung verloren gegangen sein, welche die Marciana bildet. — Das ist, die mehr oder weniger ausgedehnten Bibliotheken, so gut sie auch bei der Aufstellung und in den Katalogen geordnet sein mögen, sind für die kleinen Bücher stets ein Chaos, in dem sie sich verlieren oder vergeblich gesucht werden, wenigstens wenn man nicht durch das bequeme Mittel, viele zu vereinigen, ein jedes theilnehmen lässt an dem Vortheil des ***grossen Umfangs*** und der ***Masse,*** der die dicken Bücher kenntlich macht und sie zugleich vor dem Unrecht der Zeit und der Menschen schützt (?).

eigenthümlichen Bedingungen, die bei dem Druck und der Veröffentlichung der Cartelli eingetreten. Sie erschienen vereinzelt in dem kurzen Zeitraum von etwas mehr als anderthalb Jahren, sechs in Mailand, sechs in Venedig, aber ohne dass aus ihnen erhellt, dass die einen wirklich in Mailand, die andern in Venedig gedruckt sind, da in *allen* der Name des Druckers fehlt (als ob sie gleichsam wie Schandflecke veröffentlicht wären, was auch CASSATI in dem Passus, den wir oben (S. 123) angezogen haben, in Bezug auf die des TARTAGLIA sagen mag); und jeder kaum gedruckt unter die Leute gebracht um an eine bedeutende Zahl von Professoren und berühmte Liebhaber der Mathematik und Litteraten Italiens vertheilt zu werden (in dem ersten Cartello des FERRARI sind die Gelehrten der Hauptstädte Italiens gedruckt aufgeführt, denen dieses Cartello übermacht werden sollte; für Bologna findet man: ***Achille Bochio***, ***Ludovico Vital***, ***Hannibal dalla Nave***, ***Nicolò Simo***); sämmtlich ohne Seitenzahlen, eines sogar ohne das Buchstabenregister am Fusse derselben, die übrigen mit einem von einem zum andern variablen Register; endlich wie es scheint zum grossen Theile ohne Titelblatt oder mit einem fliegenden Blatte statt eines solchen, sicherlich ferner mit einigen fliegenden Blättern *(Cartino)*. Aus alle dem ihre leichte Zerstreuung, Verlust und Vernichtung, vorzugsweise nach Beendigung des Wettstreits. Die ganze Sammlung verlangte ferner zu ihrer Bildung Sorgfalt und ein Specialinteresse, das sich bei Wenigen vorfand. Man füge hinzu, dass diese Sammlung eines eigenen gedruckten Titelblattes ermangelte, und folglich die Ergänzung durch ein dergleichen handschriftliches nöthig machte. Daher die Nothwendigkeit specieller Kenntnisse für den, der dieses richtig besorgen sollte, für die richtige Angabe des Bandes dieser Sammlung in den Katalogen der Bibliotheken u. s. w.; daher ferner der Ursprung der Irrthümer, denen man den Verlust oder das nicht Erkennen einiger Exemplare desselben zuzuschreiben haben dürfte. Mein Exemplar zum Beispiel enthält mit nicht alter Schrift und Tinte den Titel „Tartalea Prof. di Matematiche“ und nichts weiter! Weshalb TARTALEA und nicht FERRARI, obwohl der erste Druck, welcher in meinem Bande auf fünf weisse Blätter folgt, dem zweiten sowohl nach der Unterschrift als nach seinem ganzen Tenor angehört? Ja dieser Druck, der also das erste Cartello des FERRARI darstellt, das erste von allen Cartelli in Rede, fängt buchstäblich mit den Worten an:

„*Messer Nicolò Tartalea*," und vielleicht las der Messer Titelfabrikant des gedachten Bandes nicht mehr als eben diese Worte. Ich bin auf alle diese Kleinigkeiten gekommen und bleibe auch noch weiter dabei in der angenehmen Ueberzeugung, dass sie dazu dienen könnten, irgend ein Exemplar der verlorenen Cartelli wiederfinden zu lassen. Dass man von den verlorenen und nicht vernichteten eine ganze Zahl, nicht blos einzelne wiederzufinden hoffen darf, lassen gerade die vorliegenden Kleinigkeiten erkennen, noch besser aber folgende Worte, die ich der „*Nachschrift (Da poi scritta)*" entnehme, welche die erste *Antwort* des Tartaglia schliesst: „*Accioche questa mia risposta non vi* „*paia molto privata ne ho fatto imprimere* **1000.** *per man-* „*darne anchora io generalmente per tutta Italia ecc. . . . .* „*me apparso de drizzarvene a voi* **54.** *. . . . delle quale ne* „*tenereti una per voi, et delle altre* **53.** *ne mandareti una a* „*cadauno de detti Signori ecc.*" (nämlich diejenigen Herren, denen Ferrari sein erstes Cartello gesendet). Mein Band aller sechs Cartelli des Ferrari und fünf des Tartaglia trägt ein sicheres Kennzeichen an sich, dass er aus der Sammlung derjenigen zusammengestellt ist, die dem Nicolò Simo zur Zeit, als sie erschienen, übermittelt waren (Nicolò Simo erscheint seit 1544 in den Rotoli dieser Studienanstalt *Ad Arithmeticam;* 5 Jahre nachher sieht man ihn unter die Professoren der Astronomie übergehen und unter diesen bleibt er bis zum Rotolo von 1563). Denn unter der ersten oder letzten Seite jedes Cartello steht mit alterthümlicher Tinte und Schrift geschrieben: „*Al Signor Nicolo Simo*"; dagegen steht am Fusse der ersten Seite der ersten *Antwort* des Tartaglia folgende handschriftliche Adresse: „*Al Mag. et eccell. Signor Nicolo Simo.*" Auch am untern Rande der letzten Seite des ersten Cartello Ferraris steht Folgendes geschrieben: „*V. S. si degnj conservarla*" (gleich als ob der Absender dieses Druckes vorausgesehen hätte, dass man schon erwarten dürfte, es würden andere folgen).

Da ich jetzt im Begriffe bin meinem ganzen Vortrage ein Ende zu setzen, weil ich den Theil vollendet habe, den ich in Bezug auf die bedeutenderen Männer der zweiten Epoche der Mathematischen Facultät im Bologneser Archigymnasium unter den Händen hatte [1]), darf ich nicht mehr aufschieben, einem leb-

1) Ich will hoffen, dass die vielleicht überflüssige Länge dieses Theiles meiner Rede wegen der Neuheit und Wichtigkeit des Inhaltes der Cartelli ver-

haften Wunsche zu entsprechen, von dem ich glaube, dass er in Ihnen allen, Hochgeehrteste Collegen, entstanden sei, nämlich eine andere Textstelle aus den genannten Cartelli zu hören, eine

---

ziehen wird, die ich ausführlich und in allen Specialitäten zu behandeln für nöthig hielt. Wenn ich auch hier, vor den Cartelli an sich, Scipione Ferro, die Ehrenrettung seines Ruhmes, die aus ihnen entspringt, hätte erwähnen können, die ich vorzugsweise bei allen diesen Ausarbeitungen zum Zielpuncte hatte, und für welche ich keine Untersuchungen, keine Vergleiche und deshalb keine Ausdehnung dieser Schrift scheuete. Dass ferner die Ehrenrettung des nicht weniger unglücklichen als grossen Analysten, die uns so sehr am Herzen liegt, in diesen unseren Zeiten zu gelegener Zeit kommen dürfte (einer Zeit so reich und zufrieden über die fortdauernden eigenen Erfindungen, und die jederzeit immer verachtender und vergesslicher zu werden scheint nicht blos in Bezug auf die alten, sondern selbst der von vorgestern), mögte folgende Thatsache vielleicht besser als jede andere zu bezeugen genügen, die wir bis jetzt angeführt haben. In den ersten Ausgaben (von 1808 u. s. w.) der Elementi di Algebra e Geometria, die mit dem berühmten Namen Brunaccis geschmückt sind (unseres Lehrers, der, wo es auch sei, bei uns stets in höchster Verehrung stehen wird), wird Scipione Ferreo erwähnt und der studierenden Jugend gebührendermassen gezeigt da, wo es sich um die Auflösung der cubischen Gleichungen handelt. In den folgenden Auflagen derselben Elementi aber, nach dem Tode dieses Trefflichen wieder durchgesehen und herausgegeben, erscheint Scipione Ferreo nicht mehr; dieser Name wurde darin, so zu sagen, cassiert!! Eine Thatsache, die in Wahrheit um so tadelnswerther und ärgerlicher ist, in so fern sie unter dem Namen einer Verbesserung gemacht zu sein scheinen könnte, nämlich als eine der *Correctionen*, durch welche nach dem Sinne des Titelblattes diese Ausgaben bereichert wurden. Und wohlverstanden, zu unserem grossen Kummer!, einige dieser Ausgaben sind auf Grund einer Mailänder *revidiert*, *erläutert*, *verbessert* und herausgegeben worden in dieser Vaterstadt des Scipione Ferro (1826, 1830 u. s. w.)!! Und wenn nun das Andenken an und die Verehrung für die ersten Erfinder sich der Jugend nicht durch die Elementarbücher einprägen, so ist stark zu fürchten, dass sie, wenn sie erst in die höheren Studien gelangt und selbst fähig sind, das Erbtheil der Wissenschaft zu vermehren, keinen Gedanken mehr auf jene wendet. Denn von wievielen werden die historischen Werke, die dazu bestimmt sind, sie in geeigneter Weise zusammen mit ihren entsprechenden Beiträgen für dieses Erbtheil in Erinnerung zu halten, nur überhaupt noch dem Titel nach gekannt, von wievielen heutigen Tages noch gelesen? Hier ist der geeignete Platz zu erwähnen dass eines von dieser Art Werken, der Saggio sulla Storia delle matematiche von Franchini (Lucca 1821. — Ein Werk, wenn auch wenig geordnet, doch höchst werthvoll, weil es mit Kürze *möglichste* Genauigkeit, ferner sicherlich grosses Wissen, kritischen Blick und Gelehrsamkeit verbindet), den Scipione Ferro gar nicht erwähnte, während Tartaglia sowohl, als Cardan und Ferrari jeder seine Stelle hatte (p. 162—163). Aber im letzten Supplemente zu diesem Saggio (d. h. in der früher erwähnten Storia dell'

Stelle entnommen aus meinem Exemplare derselben, jene Stelle des zweiten Cartello FERRARIS, auf die sich die hauptsächlichen Passus, die Sie schon von TARTAGLIA gehört haben, beziehen, eines der Cartelli, welche FANTUZZI nicht kannte. Folgendes liest man in gedachtem Cartello in der ganzen Ausdehnung der dritten Seite: „*Sed prius, ne obstupescas, miratus unde ego „omnia tua mendacia quasi ab Apolline monitus resciverim, „tibi in memoriam revoco, me in eadem domo cum Cardanus „te hospitio excepisset, omnibus vestris sermonibus, quibus „mirum in modum tum delectabar, interfuisse. Cardanus ergo „ex te accepit inventiunculam illam*[1] *cubi et laterum aequalium „numero, quam ut ab interitu, cui vicina erat, revocaret, in „subtilissimo, atque eruditissimo suo volumine, velut languen- „tem et semimortuam arbusculam in amplissimo, feracissimo „et amoenissimo horto inseruit, te inventorem celebravit, te „exoratum sibi tradidisse commemoravit. — Quid vis amplius? „Nolebam divulgari: — cur? Ne quisquam alius meis inventis „frueretur. Hic quamvis in re tenui, nulliusque propemodum „usus ostendis tamen te impium, et nefarium, ab hominumque „consuetudine exturbandum. Cum enim non solum nobis, sed „patriae et universo humano generi nati simus, cur, si quid „in te est boni, caeteris non vis impertiri? Volebam, inquis, „in publicum edere, sed in meis libris. — Quis vetat? non ne*

Algebra ecc. Lucca 1827) verbessert der hochgelehrte Verfasser seine Auslassung, und liefert da, in die Fusstapfen Cossalis tretend, folgenden Artikel (p. 40—41): „*Scipione Ferri professò le matematiche in Bologna dal 1496 al „1526. Il poco che la storia c'insegna intorno al suo merito, si riduce al sapersi „che sciolse l'equazione* $x^3 + px = q$ *con un metodo generale, da lui partecipato „al suo scolare Antonio del Fiore; ma ciò basta per autorizzarci ad annoverarlo „fra i primi calcolatori del tempo suo . . . . Antonio del Fiore, divenuto altero per „la regola confidatagli dal suo maestro Scipione Ferro . . . ardì sfidare ad una „publica prova di algebrico talento il valoroso Tartaglia ecc.*“ Wir haben diesen Artikel Franchinis zur Ehrenrettung Ferros in seiner ganzen Vollständigkeit auch deshalb mittheilen wollen, weil er das Bedürfniss der grössern Ehrenrettung für Ferro bestätigt, um welche wir uns bemühen.

1) Es ist überflüssig, dass ich irgend Jemand auf die Leugnung der Wichtigkeit, auf die affectierte Verachtung der Erfindung an sich aufmerksam mache, welche die ganze obige Periode athmet; Erdichtungen die nicht die schlechteste Frucht des übermächtigen Parteigeistes dieser Cartelli sind, und die von Tartaglia in seiner dritten Antwort natürlich durch die Verse zurückgewiesen werden, wie man in der Anmerkung (b) am Ende dieser Schrift sehen wird.

„tibi adhuc integrum est, licetque quotvis volumina componere, „eamque tuam inventionem vel sexcenties (si ita libuerit) „ascribere? Ad haec, videtur ne tibi haec satis iusta caussa, „qua in virum praestanti ingenio, atque eximia doctrina, qui „te apud doctissimum illum Caesaris legatum, et apud excel„lentissimum Alfonsum Avalum mirifice laudaverat, tu tan„topere tamque impudenter invehereris? Quid? si probavero, „quod tibi luce clarius est, nos quoque non ignorare illud non „esse tuum inventum. Si Cardano non concedes, ut tua, num „saltem permittes, ut aliorum inventa nos doceat? Anno ab „hinc quinto, cum Cardanus Florentiam proficisceretur, egoque „ei comes essem, Bononiae Annibalem de Nave virum inge„niosum, et humanum visimus qui nobis ostendit libellum manu „Scipionis Ferrei soceri sui jam diu conscriptum, in quo istud „inventum, eleganter et docte explicatum, tradebatur. Quod „non ascriberem, ne viderer more tuo ea, quae mecum face„rent, confingere, nisi Annibal ipse adhuc viveret, et posset in „hac controversia testis adhiberi. Sed quid externis testibus „opus est? Non ne tu fateris in ultima parte istius tui libri“ (nämlich im letzten Theile, d. h. im schon erwähnten libro nono de' Quesiti et Inventioni des TARTAGLIA), *„in ea „inquam parte, in qua tam impudenter Cardanum nominas, „Antonium Floreum adversarium tuum multis ante te annis „dictam inventionem possedisse? Ergo necesse est ad tuas „illas ineptas fictiones confugias . . . etc.“*. Da ist diese bemerkenswerthe Stelle des eleganten lateinischen Cartello FERRARIS, aus der ich vorzugsweise die ganze vorgehende Discussion entnahm, und von der ich deshalb glaubte, dass Sie grosses Verlangen haben würden, sie im Originale kennen zu lernen, nach der Spur, welche Sie davon in dem ersten mitgetheilten Passus des TARTAGLIA erhielten. Wie es auch um meine Annahme stehen möge, so war es doch für mich fest bestimmt, dass ich mit dieser Stelle den letzten Theil meiner Schrift zieren wollte, ohne welche es mir gewesen wäre, als ob dieser Theil seiner wahrsten und festesten Stütze ermangele. Jeder von Ihnen, Hochgeehrteste Collegen, kann sie zugleich mit den andern vorgelegten Stellen und mit den in Bezug auf die Cartelli und meine Sammlung derselben behaupteten Thatsachen in dem Volumen selbst finden, das ich hier zur Einsicht darreiche; an ihm kann man sicher die grössere und anständige Erhaltung für eine Seltenheit seiner Art

sehen [1]). Sie sehen, dass das lateinische Cartello aus eilf Seiten compressen Druckes besteht, mit Ausnahme der eilften Seite, die nur wenige Zeilen ausser dem Datum enthält: „*Medio-„lani Cal. Aprilis MDXLVII*“ (das Datum findet sich in ähnlicher Weise in allen Cartelli), und ausser der Unterschrift dreier Zeugen (ähnliche Unterschriften finden sich gleichfalls unter den übrigen Cartelli), endlich ausser den Buchstaben: „*N. P. M. M.*,“ deren Sinn ich nicht kenne. (Das erste und letzte der Cartelli Tartaglias zeigt auf dem Titelblatt die Anfangsbuchstaben: „*V. O. P.*,“ deren Sinn ich ebenfalls nicht verstehe.) Die Unterschrift des Verfassers fehlt auf dieser eilften und letzten Seite gegen den Gebrauch in allen andern Cartelli. Dieselbe wird aber ersetzt durch die concise Ueberschrift des Cartello: „*Ludovicus „Ferrarius Nicolao Tartaleae*,“ die der ganzen nervigen und eleganten Darstellung entspricht: eine werthvolle Eigenschaft, die man in allen Cartelli Ferraris wiedererkennt, und die selbst die

---

1) Ich werde dafür sorgen, dass er unter den seltensten Büchern der städtischen Bibliothek aufgestellt wird, die jetzt ihren festen Platz in der herrlichen Aula des alten Archigymnasiums hat, die in prächtigster Weise in unsern Tagen mit grosser Freigebigkeit der Stadt und lobenswerther Sorgfalt des Wohlweisen Magistrats restauriert ist. Da das Buch vorzugsweise zur Wiedererlangung eines Ruhmes der Vaterstadt und des Archigymnasiums dient, so steht es besser in der genannten Bibliothek als in der der modernen Universität. = Später war ich so glücklich auch das letzte Cartello, d. h. die letzte Antwort Tartaglias, wieder aufzufinden und zu erwerben; damit wurde mein so schon sehr werthvoller Band Cartelli complett und folglich von viel grösserm Werthe, als vorher. Die dafür verwendeten Kosten, noch mehr aber die Bedürfnisse der Familie im Exile riethen uns und zwangen mich, ihn dem berühmten Libri für die ansehnliche, freigebige Summe von 500 Fres. zu überlassen, die er mir, ohne meinem Verlangen ein Wort entgegenzusetzen, bewilligte: er kannte besser als jeder Andere den Werth des Bandes, und wusste auch, dass mir eine genaue handschriftliche Copie desselben blieb, die ich mir unter meinen Augen hatte anfertigen lassen, sobald ich mich entschlossen, mich desselben zu berauben. — Ich will nicht einen andern wichtigen Antrieb zu der fraglichen Cession an Libri verschweigen; es war die Hoffnung, dass die Leiden, die Geschäfte und der Gesundheitszustand desselben ihn nicht verhindern würden, seinen hohen Geist dem Studium des in seiner Art einzigen Bandes zu widmen und daraus für die Wissenschaft grössere, ja viel grössere Früchte zu entnehmen, als ich es gekonnt hätte; eine Hoffnung dennoch, ohne Schuld des grossen Geistes und unglücklichen Mannes, zu sehr getäuscht! (Der Band ist dann in der weltberühmten Auction der Librischen Bibliothek, die 1861 vom 25. April in London an gehalten wurde, mit verkauft worden. Wer denselben erstanden, ist mir unbekannt geblieben. Anm. d. Uebers.)

De libris propriis, die wir oben (S. 120) abgeschrieben, und die wir hier widerholen, wiedersprochen zu werden: „*Has (re-„gulas) cum diligenter perscrutatus essem, cum Ludovico „Ferrario, inventa demonstratione, alias innumeras etiam ad-„invenimus, ut ex his librum Artis Magnae conficerem.*" Aber wenn wir auch mit Stillschweigen übergehen, dass der Widerspruch dieser Stelle und anderer ähnlicher [1]) mit der vorgetragenen

---

1) „*Inde autem illo habito*" (das Capitel *de cubi et rerum aequalium numero*, das er von Tartaglia erhalten), „*DEMONSTRATIONEM VENATUS, „intellexi complura alia posse haberi. Ac eo studio, auctaque iam confidentia, „per me partim ac etiam aliqua per Ludovicum Ferrarium, olim alumnum nostrum, „inveni*" (Cardani Ars Magna Cap. I, am Eingang). — „*Cum autem „intellexissem capitulum, quod Nicolaus Tartalea mihi tradiderat, ab eo fuisse „demonstratione inventum Geometrica, cogitavi eam viam esse regiam, ad omnia „capitula venanda*" (Ebendaselbst, Cap. VI — *De modis inveniendi capitula nova* — n° 5). — Im Eingange des Cap. XI. derselben Ars Magna, welches *De cubo rebus aequalibus numero* handelt, liest man ferner Folgendes: „*Scipio „Ferreus Bononiensis . . . capitulum hoc invenit, tradidit vero Anthonio Mariae „Florido Veneto, qui cum in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellense aliquando „venisset, occasionem dedit, ut Nicolaus invenerit et ipse, qui cum nobis rogantibus „tradidisset, SUPRESSA DEMONSTRATIONE, freti hoc auxilio, demon-„strationem quaesivimus, eamque in modos, quod difficillimum fuit, redactam sic „subijciemus.*" In Betreff dieser Stelle wird jeder erkennen, dass darin die Thatsache der unbestimmten Mittheilung an Fiore ausgesprochen ist, eine Thatsache, die dem Mittheilenden nur als ein *dictum de dicto* bekannt ist, dagegen die andere Thatsache völlig verschwiegen ist, dass dieselbe Erfindung ganz bestimmt und in vollständiger Weise an Dalla Nave mitgetheilt war; welche Thatsache Cardan auf die directeste und bestimmteste Weise in Erfahrung gebracht hatte. Ich darf mich auch dem Glauben hingeben, dass nach den obigen Auseinandersetzungen es jeder für viel wahrscheinlicher halten wird, dass Fiore die Regel Ferros in der hiesigen öffentlichen Schule der Arithmetik und Geometrie lernte, als dass sie ihm *als ein Geheimniss* vertraut wurde, wozu die betreffende Erzählung, die wir oben mitgetheilt haben, führen würde. Wenn man aus der Regel ein *Geheimniss* hätte machen wollen, das nur für einige Lieblingsschüler aufbewahrt wurde, so würde unter ihnen niemals ein *Fremdling* gezählt worden sein, als der er sich uns nach dem Ausspruche Cardans zeigt: „*Antonio Maria Fior del q. maestro Pelegrino*" (Tartaglia, Opere, Quesiti et Inventioni ecc., Libro nono, p. 253). Dieser venetianische Schüler in Bologna hat also meiner Meinung nach die Ferrosche Regel an der öffentlichen Studienanstalt gelernt und viel wahrscheinlicher zur Zeit der Professur Dalla Naves als zur Zeit der Professur Ferros; er würde sie sonst nicht, nachdem er in sein Vaterland zurückgekehrt, in der Art gebraucht haben, die man erzählte, nämlich in der Art seines Gleichen, eines, der „*non aveva scientia, non theorica, ma solamente gran pratica*" (Tartaglia, a. a. O., p. 235).

Ansicht nicht so vollständig ausgesprochen und handgreiflich ist, wer wird jemals die Behauptung CARDANS in Bezug auf diesen Gegenstand buchstäblich nehmen, der an den verschiedenen Stellen nicht übereinstimmend und immer prahlerisch berichtet; die Behauptungen eines Menschen seines Charakters, selbst wenn man denselben aus dem Gemälde entnimmt, das er selbst davon in dem Buche De vita propria entwirft? In zweiter Stelle erkennen wir aus der Nachricht, die uns TARTAGLIA [1]) über die ersten Schritte CARDANS in dieser Materie hinterlassen hat (auch wenn wir der Uebertreibung und dem Unwillen des Gegners gebührend Rechnung tragen), wie dieser unschlüssig und für damals beinahe der Kenntnisse und der Praxis baar war, die ausser der geistigen Kraft verlangt wurde, um in den schwierigen Gegenstand einzudringen und noch viel mehr um ihn zu durchdringen und sich zum Herren desselben zu machen, als welcher er sich, und zwar mehr als nöthig, nachher (sechs Jahre später) beim Erscheinen der Ars Magna zeigt. Ist es daher nicht höchst wahrscheinlich, dass er nach der dargelegten Ansicht, bevor er das Werk des berühmten bologneser Professors gesehen, sich noch nicht soweit in den Gegenstand in Rede vertieft hatte, dass es genügend gewesen, einen zu der Formel führenden Weg, einen allgemeinen und exacten Beweis derselben zu entdecken; dass er daher bei seiner Durchreise mit FERRARI durch Bologna seine Zuflucht zu dem Mitbürger, vielleicht sogar Freund dieses Letztern, ANNIBALE DALLA NAVE, genommen hat, damit dieser ihm alle Einzelheiten der Erfindung des eigenen Schwiegervaters und Vorgängers im Lehramte zeige; und dass, als sie in zuvorkommender Weise das genannte handschriftliche Werk zur genauen Durchsicht erhielten, dieses Werk ihnen sowohl jenen Weg, als jenen Beweis zeigte, von wo aus weiter jeder von ihnen ohne Hinderniss durch sein Genie die dunkle Materie fördern, die Auflösung der biquadratischen Gleichungen entdecken u. s. w., in Summa in

---

[1]) Man sehe vor Allem im Libro nono der Quesiti et Inventioni diverse die Antwort Tartaglias auf die *Frage 38*, die Cardan gestellt hatte, in der er gegen das Ende hin ihm tödtliche Vorwürfe macht, dass er einen enormen Fehler, den er bei der Ausziehung der Cubikwurzel begangen, nicht erkennen, noch weniger habe verbessern können, obgleich er durch ihn sogleich darauf aufmerksam gemacht sei, und dass er bei dem Versuche den ersten Irrthum aufrecht zu erhalten und zu vertheidigen, in noch grössern Irrthum gerathen sei. (A. a. O. p. 273—274).

einigen Jahren dahin gelangen konnte, auf die hervorragende Höhe hinaufzusteigen, auf der er in der Ars Magna bewundert wird, und durch welche sie sich, auch nach unserer Meinung, als ausgezeichnete Mathematiker offenbaren? Das absolute Stillschweigen des mailänder Algebraikers und Philosophen in allen seinen so zahlreichen Werken über das erwähnenswerthe Abenteuer, dass das Buch von Ferros Hand ihm in Bologna unter die Augen gelegt wurde (ein offenbar verdächtiges Stillschweigen); jene Lobpreisungen (S. o. S. 112), die er Ferro ertheilt (vielleicht als eine Art Compensation oder als eine nöthigenfalls für das erwähnte Stillschweigen anführbare Entschuldigung), und die in dem Munde dessen übermässig übertrieben sein würden, der ihn durch die Erfindung der Methode und des allgemeinen Beweises, die steilste Klippe des Gegenstandes, übertroffen hätte; liefern diese Thatsachen nicht etwa eine bedeutende Stütze für die oben vorgelegte Meinung?

4. Wenn aber auch der Eine oder Andere diese Meinung nicht ohne Zögern unterschreiben mögte, so glaube ich doch, dass Niemand zweifeln dürfte, dass Cardan und Ferrari aus der Untersuchung des Werkes von Ferro eine grosse Unterstützung erhalten haben, originelle Gedanken, fremde Kenntnisse und Lehren für die Ausarbeitung der Ars Magna. Mögen sie auch, ehe sie das Werk gesehen, im Besitze einer Methode gewesen sein, zu der Regel zu gelangen, und eines Beweises derselben, so ist es beinahe unmöglich, dass jene sowohl wie dieser, sowie die ganze Auseinandersetzung des Gegenstandes genau mit dem übereinstimmte, was sie in dem Werke in aller Bequemlichkeit lesen und wiederlesen konnten. Es ist ferner unbedingt richtig, dass sie mit diesem ihre eigenen Studien verschmelzen mussten, so dass der Inhalt desselben als in die Ars Magna übernommen angesehen werden muss, besonders in dem Theile, der von den Gleichungen dritten Grades handelt. Wenn auch nicht eigentlich der Weg, der zu der allgemeinen Auflösungsformel dieser Gleichungen führte, und den der erste Erfinder derselben befolgte, sowie der nothwendige Beweis, den er fand, so müssen doch Auszüge aus dem einen und dem Andern mittelst der Veröffentlichung durch den Druck seit dem Jahre 1545 als bekannt angesehen werden, dem Jahre der ersten Ausgabe der sovielgenannten Schrift Cardans. Es wird daher die Meinung, dass man die Methoden, durch welche Scipione Ferro und Tartaglia,

ehe sie die cubischen Gleichungen auflösten, sich wirklich zu Herren dieser Lösung machten, nicht kenne, eine Meinung, die bis jetzt, was FERRO betrifft für absolut richtig von Niemand in Zweifel gezogen ist, in Bezug auf TARTAGLIA nicht so absolut und nicht ohne Wiederspruch [1]), vielleicht in Bezug auf den zweiten bestehen oder aufrecht erhalten werden können, nicht mehr aber in Bezug auf den andern. Die Methode dieses findet sich in der Ars Magna vermischt mit Gutem und Schlechtem, mit den wichtigen, so grossen Erfindungen CARDANS und FERRARIS und der transcedentalen und affectierten Dunkelheit CARDANS selbst, sie findet sich aber unzweifelhaft darin.

5. Was TARTAGLIA betrifft, so gilt das nicht mehr, was bis jetzt von Allen geglaubt wurde, d. h., dass er den Namen des ersten Erfinders und Förderers dieser verborgenen Studien ***niemals ausgesprochen haben würde;*** jenes ***grossen Mathematikers*** oder grossen beobachtenden Meisters [2]), über den übrigens die allgemeine Meinung dass er sich wohlverdient gemacht hätte sich ***nur*** auf die Aussage, die von einem ***Abacisten*** über seinen glücklichen Erfolg in jenen Studien verbreitet wurde, stützt. TARTAGLIA wurde, wie man gesehen hat, gezwungen, diesen Namen in seinem zweiten Cartello an FERRARI zu nennen, in dem er gleichzeitig aussprach, dass er die obengenannte Hauptthatsache in Betreff des Werkes des SCIPIONE FERRO weder bestreite, noch in Zweifel

---

1) Wallis, Nugnez, Andres, Montucla u. s. w., Lagrange (m. s. oben S. 113—114) sind für die mitgetheilte Meinung auch in Bezug auf Tartaglia gewesen. (Cossali, Origine ecc. dell' Algebra, T. 2, pag. 139—147, 164—165); dagegen haben Cossali und nach ihm Franchini geglaubt, dass der Weg, den Tartaglia bei dieser Erfindung inne gehalten, sich zeichnen lasse, und sie haben ihn gezeichnet nach den Spuren, die er selbst im Libro nono de' Quesiti ecc. und im General Trattato hinterlassen (Cossali, a. a. O., p. 145—158, u. s. w.; Franchini, La Storia dell' Algebra ecc., p. 46—47). Nach solcher Reife der historisch-kritischen Studien über die Thatsachen durch die trefflichen Bemühungen der beiden Italiäner Lagrange und Cossali hat ein dritter Italiäner, Libri, vor 6 Jahren sie einem neuen Examen unterworfen und hat sich mit Lagrange übereinstimmend ausgesprochen (Histoire etc., T. 3, p. 150 Anm. 1 und p. 157—158). Mein unmassgebliches Urtheil über den vorliegenden Gegenstand, das gleichwohl eine gewisse Beachtung verdienen dürfte, wegen des neu darin eingeführten Elements, wird aus dem Reste dieser Schrift, vor Allem aber aus der Anmerkung (b) am Ende derselben sich zeigen.

2) Cossali, Origine ecc. dell' Algebra, T. 2, p. 99.

ziehe, die unter den Augen des Gegners sicherlich zu sehr geringer Freude des TARTAGLIA selbst und ebenso CARDANS gedruckt war. Und bei dieser Erklärung ging er offen aus der geraden Strasse, indem er sich bemühte dem FERRARI zu antworten, dass, wenn auch jemand anders ihm in Bezug auf die Erfindung dieser Sache zuvorgekommen, er sie doch von Niemandem gelernt habe, sondern sie aus sich selbst wiedergefunden [1]), und lässt die Hauptfrage ohne gehörige Antwort, die ihm wirklich gestellt war, nämlich wie er vernünftiger Weise darüber schelten könne, dass CARDAN die Erfindung eines Dritten veröffentlicht habe, jene nämlich, die er in trefflicher Weise in dem schon zur Zeit FERROS geschriebenen Werke gesehen hatte? Wir unterlassen die Untersuchungen gewisser anderer Züge des sehr, sehr seltsamen Betragens des TARTAGLIA in diesem ganzen Handel über die erste Auflösung der Gleichungen 3. Grades [2]), die einen Zweifel rege machen könnten;

---

1) „*Ma ben posso dir con verita tal cosa mai haverla vista appresso de alcun* „*Autore, et esser stata da me (et con celerita* — hier steht aber geradezu eine Lüge, wie wir schon S. 115—116 Anmerkung 1) angemerkt haben) „*ritrovata con* „*altre particolarita forsi di maggiore importanza:*" so lautet die Fortsetzung der ersten Stelle, die wir aus dem vorgenannten zweiten Cartello des Tartaglia mitgetheilt haben (S. 126).

2) Dass er z. B. sich hütete, in den so zahlreichen Stellen seines General Trattato ecc., in denen er die Cartelli zwischen sich und Ferrari berührt und wiederberührt, in irgend welcher Weise des Werkes Erwähnung zu thun, das Ferro über die Auflösung der so oft genannten Gleichungen verfasste. Die Stelle, welche ihm die beste Gelegenheit gegeben hätte, darüber zu reden (in welchem Sinne er dies auch zu thun geglaubt hätte), wäre die gewesen, wo *der Verfasser* von der Disputation vermittelst der Cartelli *erzählt*, im Parte 2ª, lib. 2º, Cap. 6º Nº. 7 des General Trattato ecc. (Blatt 41 der ersten venetianer Ausgabe von 1556); und auch noch nicht einmal ein Wort findet man in der Erzählung über das Werk und seinen Verfasser! Und allein auf solche *Erzählung* stützt sich der Bericht, den man über diesen Streit bei Cossali findet (Origine ecc. dell' Algebra, Vol. 2º, p. 131 und ff. m. s. auch Anmerkung 2) auf S. 132 ff.)! Man weiss ferner dass Tartaglia 1559, d. h. 14 Jahre nach dem Erscheinen der Ars Magna Cardans starb, ohne in dieser ganzen Zeit seine Auflösungsmethode zu veröffentlichen, die man nicht einmal nach seinem Tode unter den Materialien zu seiner Algebra gefunden zu haben scheint (m. s. Libri, Histoire etc., T. 3. p. 157—158; Cossali, a. a. O., p. 138—139). Wenn es sich nicht um einen Mann von einen so ganz ausserhalb des gewöhnlichen liegenden Charakter handelte, wäre es da nicht vielleicht erlaubt, ohne weitere Beweismittel nöthig zu haben, bestimmt zu behaupten, dass er seine Methode deshalb nicht veröffentlichte, weil er einsah, dass sie genau mit der Methode übereinstimmte, die

den Zweifel nämlich, ob nicht auch er in gewisser Weise zu fürchten hatte, man könnte entdecken, dass auch er Etwas von der Originalerfindung FERROS gekannt, dass er etwas Licht, irgend eine Spur davon, wenn nicht noch mehr, erreicht hätte, ehe er zu der Lösung gelangte, die er vollständig als sein Eigenthum ausgab. Einen solchen Zweifel dürfte man vielleicht für sehr fern halten, er wird aber durch verschiedene Gründe verstärkt: 1. Aus dem Geringen, was da für einen Mann von dem durchdringenden Verstande, der Kenntniss und der Praxis des TARTAGLIA, sobald er in die Rennbahn eintrat, nöthig war, um den Geist der neuen algebraischen Methoden zu begreifen; 2. Aus der Leichtigkeit, die man sogleich erkennt, dass ein Mann von der Art FIORES sich, wenn auch nicht sein ganzes Geheimniss (oder eigentlich das, was man sagt, das er als Geheimniss festhielt) habe entschlüpfen oder entreissen lassen, so doch das Wenige desselben, was für den Andern schon genügend war. Bedienten sich denn nicht selbst die grössern Gegner in dem obenerzählten Wettkampf der List, dass sie etwas Unvorhergesehenes in die Disputation, in die Fragen zu bringen suchten, um daraus Licht zu erhalten, um zu tasten? (und nicht ohne Frucht, soweit man davon erzählt!): Versuchten sie nicht auch sich mittelst dritter Personen auf das Vertrauen eines von ihnen hin auszuholen [1])? Und wenn TARTAGLIA nicht unmittelbar von FIORE in dieses Geheimniss eingeführt sein könnte, ist es da nicht sehr leicht

---

in dem Werke der Rivalen enthalten war? Man sage nicht, dass ihn Streitigkeiten, Verfolgungen, Unglück davon abgezogen, und dass er dann vom Tode überrascht seinen gereiften ehrenvollen Vorsatz, alle seine bezüglichen Erfindungen in dem grossen Werke — dem General Trattato ecc. — herauszugeben, nicht ausführen konnte (man sehe unsre Note (a) am Ende und die Dedicationen des ersten, dritten und vierten Theiles des General Trattato ecc., sowie Cossali, a. a. O., p. 137—138); denn er hätte diese Kenntniss für die Welt in einem Separatwerke vorausnehmen können, sogar müssen, wenn der allgemeine Nutzen der Wissenschaft in ihm nur in Etwas einen persönlichen halsstarrigen Verdruss überwogen hätte, wenn er wirklich über ihre Neuheit und Wichtigkeit im Vergleiche zu dem, was sein Rival in der Ars Magna geschenkt hatte, sicher gewesen. Man sehe die Anmerkung (b) am Ende der Abhandlung.

1) Tartaglia, Quesiti et Inventioni diverse Libro nono p. 275 seiner genannten Opere ecc.; Ebendaselbst, p. 228—229 und p. 249: Cossali, Origine ecc. dell' Algebra, V. 2., p. 123; Ebendaselbst p. 108 u. ff.

möglich, dass er es durch irgend einen Schüler oder Freund desselben, oder auch durch irgend einen andern Schüler FERROS wurde? Dieser Zweifel, der aus Mangel historischer Documente sich nur mit grösster Reserve vorbringen, sich aber auch wegen desselben Mangels ebensowenig gründlich wiederlegen lässt, wird übrigens vielleicht geraden Wegs sich entfernen, nach den strengern Betrachtungen und Beweisen, als die beigebrachten sind, die ich in der öfters erwähnten Anmerkung (b) am Ende entwickele.

Da ich nun diesen Zweifel vorgebracht habe, möchte ich nicht, ohne einen andern zu berühren, endigen, der für den nicht völlig neu sein dürfte, der etwas Nachdenken auf dergleichen Studien wendet. Mir liegt es schon lange im Sinn, dass wohl Niemand die Algebra des RAFAEL BOMBELLI durchlaufen haben dürfte, ohne zu seiner grossen Verwunderung darin des SCIPIONE DEL FERRO in irgend einer Weise Erwähnung gethan zu finden. Wie konnte nur dieser genaue und tiefsinnige Schriftsteller, der nur ein Paar Jahrfünfte nach dem grossen Erfinder lebte, der Mitbürger desselben, der in Bologna 1572 das besagte Werk drucken liess [1]) (d. h. nur 46 Jahre nachdem FERRO nicht

---

1) Tiraboschi nennt dieses Werk „Trattato d' Aritmetica;“ dann behauptet er, *dass es 1572 gedruckt sei und dann 1579 von Neuem* (Storia della Letteratura Italiana, T. 7, Prt. 2ª, Libr. 2, Cap. 2, § 44). Wirklich finden sich Exemplare des Werkes von Bombelli mit der Jahreszahl 1572 und Exemplare mit der Jahreszahl 1579. Der Titel des ersten ist der folgende: „L' Algebra Parte maggiore dell' Aritmetica, divisa „in tre Libri, di Rafael Bombelli da Bologna, Nuovamente posta „in luce — In Bologna nella Stamperia di Giovanni Rossi 1572, „con licentia delli RR. VV. del Vesc. et Inquisit;“ dagegen lautet das Titelblatt des andern folgendermassen: „L' Algebra Opera di Rafael „Bombelli da Bologna, divisa in tre Libri, con la quale ciascuno „da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell' „Aritmetica, con una tavola copiosa delle materie che in essa „si contengono, posta hora in luce a beneficio delli studiosi di „detta professione — In Bologna per Giovanni Rossi 1579, con „licenza de' superiori.“ Es schien uns schwer glaublich, dass ein Buch dieser Art sich zu jener Zeit solcher Gunst hätte erfreuen können, die man annehmen müsste, wenn zwei Ausgaben desselben an demselben Orte in dem kurzen Zeitraum von sieben Jahren veranstaltet wären; ich wollte daher die Exemplare mit dem einen und mit dem anderen Titel, welche die Bibliothek der hiesigen Universität besitzt, unter einander collationieren. Ich sah sofort dass sie identisch waren, Exemplare ein und derselben Ausgabe mit Ausnahme der Verschiedenheit des Titelblattes und ausgenommen, dass für die Exemplare mit

mehr als Docent an der hiesigen Studienanstalt erscheint, und man weiss nicht einmal ob in Folge seines Todes), eine Auslassung von solcher Wichtigkeit begehen? Das sind die Betrachtungen,

---

dem zweiten Titel ein Neudruck von dem Dedicationsschreiben an Monsignor Rufini gemacht ist, immer noch unter Festhaltung des Datums: „*In Bologna* „*il dì XXII di Giugno MDLXXII*,“ das sich in den Enxemplaren mit dem ersten Titel findet. Dieses Datum lässt im Verein mit der Jahreszahl 1572 des Titels und dem Inhalte des Briefes erkennen, dass die Ausgabe, welche die Jahreszahl 1572 trägt, nicht ein Neudruck ist, wie die Worte „*Novamente* „*posta in luce*,“ die man auf dem ältern Titelblatte liest, in der ersten Ueberraschung annehmen lassen könnten; dies *Novamente* ist hier also im Sinne von *Presentemente* gefasst. — Der treffliche Lagrange hat von der Algebra Bombellis nur Exemplare mit dem zweiten Titelblatte gesehen, da er angibt, sie sei zu Bologna im Jahre 1579 gedruckt (Lezioni elementari sulle Matematiche ecc., Milano 1839, Lez. terza, p. 49). — Fantuzzi, der das Werk Bombellis mit beiden Titeln citiert, und zwar in der Art, dass er fast glauben macht, beide Ausgaben seien zwei verschiedene Werke desselben Verfassers, erwähnt noch einen Neudruck derselben Bologna 1593 auf die Autorität einer Bibliotheca Exotica, sive Catalogus Officinalis etc., die im Jahre 1610 in Frankfurt a. M. gedruckt ist, p. 196 (Fantuzzi, Storia dell' Algebra, T. 2, p. 283). Wir haben aber hier in Bologna die Schrift Bombellis mit diesem letzten Datum nicht auffinden können, und ich zweifle sehr, ob eine solche Ausgabe jemals existiert hat. In Bezug auf die Exemplare mit den beiden mitgetheilten Titeln, die zwei aufeinanderfolgende Ausgaben vorstellen sollen, fügen wir nur für den, welcher keine Idee von diesen kleinen buchhändlerischen Fälschungen hat, hinzu, dass unzweifelhaft der Drucker Rossi sich im Jahre 1579 noch im Besitz eines ansehnlichen Vorraths von der Algebra Bombellis befand, die er sieben Jahre früher gedruckt hatte, und deshalb in den Exemplaren derselben nur den Titel und die Dedication erneuerte in der Hoffnung, dass das frische Datum ihm grössern Absatz für seinen Vorrath verschaffen würde. — Einen derartigen Kunstgriff findet man bisweilen selbst von dem Drucker eines Ortes an dem Vorrath eines Werkes, das anderwärts gedruckt war, ausgeübt. Ich besitze zwei Exemplare der Mathematisch-Physikalischen Speculationen — Diversarum Specul. Mathem. et Phys. Liber — von G. B. Benedetti (die ich gesucht, nachdem ich vorzugsweise aus der Histoire Libris gesehen hatte, wie höchst werthvoll dieselben seien): davon trägt das eine auf dem Titelblatte das Datum — „*Tavrini apud Haeredem Nicolai Bevilaquae MDLXXXV*“; das andere dagegen ist datiert: — „*Venetiis MDXCIX apud Baretium Baretium, et* „*Socios*“. — Das letztere würde man also für ein Exemplar eines in Venedig gemachten Neudruckes der ersten Turiner Ausgabe genannten Buches halten, von welcher das andere bestimmt ein Exemplar ist. Und doch ist es nicht so. Ausser dem Titelblatt, das etwas verändert ist, und dem Vorwort an den Leser, das in dem Exemplar mit dem Druckort Venedig neugedruckt ist, sind die beiden Exemplare vollständig identisch, es sind zwei Exemplare der einzigen

scheint mir, die jedem Leser BOMBELLIS aufgestossen sein müssen, der den, wenn auch kleinen Antheil im Gedächtniss hatte, der bei der Auflösung der cubischen Gleichungen FERRO zugetheilt wurde. Vielleicht haben sie Manchen glauben machen, es sei das Gerücht erdichtet, dass ein so nahe bei dem genannten Schriftsteller lebender Mitbürger desselben zuerst für Italien den Ruhm des unerwarteten Fortschrittes der Algebra erobert habe. Für mich hingegen, als ich in diese Untersuchungen eintrat, als ich merkte, dass BOMBELLI Kenntniss von den berühmten Cartelli gehabt, da er, wie man oben (S. 132) gelesen, einen so richtigen Schluss daraus zieht; als ich mir überlegte, dass er ein Zeitgenosse, vielleicht sogar ein Coëtan jenes ANNIBALE DALLA NAVE gewesen sei, der das Werk des FERRO hergegeben; da es mir wahrscheinlich schien, dass er sogar ein Schüler dieses ANNIBALE gewesen, dagegen schwer glaublich, dass er das genannte Werk nicht zu sehen gesucht und nicht gesehen habe, als er einmal auf die Abfassung eines Handbuches der Algebra sann, das alle neuesten Entdeckungen enthalten sollte, die ja alle aus derjenigen geflossen waren, die in jenem Werke auseinandergesetzt war; für mich, sage ich, mussten diese und ähnliche Ueberlegungen nothwendigerweise die Verwunderung über die merkwürdige Auslassung BOMBELLIS nur vergrössern. Aber bevor man seine Zuflucht zu Vermuthungen nimmt, und denselben Leben gibt, um jene Auslassungen zu erklären, die sehr wenig ehrenhaft für das Andenken des hochberühmten und höchstverdienten Schriftstellers gedreht werden könnten, und für ihn um so grösseres Unrecht wären, als man ihn als vollständig von jeder Parteileidenschaft entfernt betrachten muss, von denen TARTAGLIA, CARDAN und FERRARI mehr oder weniger inficiert waren, muss man zu erkennen suchen und genau Rechnung tragen den Zufällen und alle den Umständen, unter denen er sein berühmtes Werk vorbereitete und vollendete. Wir werden uns bei gelegener Zeit damit beschäftigen, nämlich bei der Behandlung der dritten Epoche der mathematischen Facultät im bologneser Archigymnasium, und vielleicht dürfte sie, wie wir hoffen wollen, dazu dienen, BOM-

---

Ausgabe von Turin 1585. Sämmtliche Seiten ganz genau gleich paginiert, dieselben Druckfehler und endlich dasselbe *Druckfehlerverzeichniss* in dem einen wie in dem andern: also genau wie in den beiden vorerwähnten Exemplaren der Algebra Bombellis.

BELLI, einen belebenden Schmuck jener Epoche, in Bezug auf genannte Thatsache von dieser ungünstigen Erklärung zu befreien. Indessen dürfen wir hier Nichts verschweigen, was für unsern Zweck sich aus dem Dedicationsschreiben genannten Werkes ergibt, und was gerechten Grund, ihn zu vertheidigen, liefert. Dass er nämlich dasselbe ausserhalb seines Vaterlandes schrieb, nachdem er einen grossen Theil seiner Jugend und auch einige Jahre seines Mannesalters ebenfalls ausserhalb desselben zugebracht; dass sein Lehrer jener CLEMENTI aus CORINALDO (eine Gegend des alten Herzogthums Urbino) war, von welchem gewisse hydraulische Berichte und Arbeiten ehrenvoll erwähnt werden, die er von 1540 bis 1580 ungefähr für die Sümpfe von Foligno und die noch wichtigern Geschäfte des Po bei Ferrara mit dem Reno bei Bologna und der Nera mit den Tiebersümpfen ausführte; dass er seine Mühe auf die Austrocknung des Chianasumpfes wandte, und dass er sich auch nicht weit davon aufhielt, als er in den Mussestunden, die ihm eine der vielen Stockungen, die man bei dieser heilbringenden Arbeit eintreten liess, lieferten (die deswegen von ihm mit Verdruss erwähnt werden), seine Algebra zusammenstellen konnte, die er später in seiner Vaterstadt drucken liess, wie aus dem Datum der vorerwähnten Zueignung hervorgeht; dass er endlich sich einige Zeit in Rom aufgehalten, um Materialien für jenes Werk zu sammeln, wo er unter Mitwirkung eines Studiengenossen ein griechisches Manuscript des DIOPHANTUS von Alexandria übersetzte. Es scheint mir hier auch die Bemerkung nicht zu übergehen, die von selbst ins Auge fällt: Wie konnten nur sowohl BOMBELLI als FERRARI, der verschiedene Jahre an der Vermessung des Stadtgebietes von Mailand arbeitete, dazu geführt werden, ihren Geist und ihre Arbeitskraft zu Unternehmungen von der erwähnten Art herzugeben, nämlich zu der Austrocknung eines Sumpfes und zu der Ausführung eines Katasters; Unternehmungen, die sicherlich nicht so schwierig als langweilig und ermüdend sind, voller kleiner, aber auch voll höchst ansehnlicher Einzelnheiten, durch Widerspruch, Spitzfindigkeiten und Dornen aller Art; offenbar sehr weit abliegend von jener Art der Untersuchung, durch welche jeder von ihnen sich die Unsterblichkeit verdiente, und von den Neigungen, welche gewöhnlich diese Studien begleiten? Man hätte für Beide den Beweggrund des Nutzens, des eigenen Interesses. Bei Geistern jener Zeiten aber lässt sich ein edlerer Beweggrund nicht ab-

leugnen: das grosse öffentliche Interesse, das stets mit dergleichen Unternehmen verknüpft ist [1]). Wenn dieses von den Genies nicht um so mehr gefühlt und beachtet wird, je mehr sie vermögen, so zeigen sie dadurch, dass ihnen in Bezug auf die Menschheit das hauptsächlichste Zeichen der wahren Grösse fehlt. Daher meine ich, dass beide vorgenannte Algebristen nicht weniger deshalb gepriesen werden müssen, dass sie an den vorerwähnten Bemühungen Theil genommen, als wegen der Erfindungen und der Fortschritte, die sie in der Algebra gemacht; dass folglich gerade wie es für diese geschehen, auch für jene Thätigkeit jede darauf bezügliche Thatsache aufgesucht werden müsste: darin würde man unbedingt ein gewisses Gepräge ihres Geistes finden. Demungeachtet ist es nicht weniger richtig, dass Untersuchungen dieser Art, und so auch die, welche dazu dienen könnten, das merkwürdige Stillschweigen BOMBELLIS über SCIPIONE FERRO zu erklären, sehr schwierig und fast unfruchtbar sein. Der Grund davon ist meiner Meinung nach der folgende, dass man für Gelehrte in den exacten Wissenschaften, vor Allem aber für die armen Mathematiker nicht so eifrig war genaue Notizen zu überliefern, wie für die Litteraten. In Bezug auf letztere, selbst auf die armseligsten oder wenig berühmten wurden überall, vorzugsweise aber in Italien, die allergewöhnlichsten Umstände ihres Lebens und ihrer Arbeiten mit Eifer gesammelt und dem öffentlichen Urtheil übergeben [2]), während man von vielen Gelehrten in den exacten Wissenschaften von grossem Werthe kaum den Namen kennen würde, wenn er nicht auf ihren Erfindungen eingegraben geblieben. Diese Nachlässigkeit und jene Sorgfalt, die Schuld und das Verdienst sind meiner Meinung nach mehr als durch irgend etwas Anderes durch den verschiedenen Geist der

---

1) Man sehe Lettera del Professore Gherardi a Monsignor Gaspare Grassellini gegen das Ende (Nuovi Annali delle Scienze Naturali, Bologna, Marzo — Aprile 1850). [Wir geben diesen Brief als Anhang zu dieser Abhandlung. Anm. d. Uebers.]

2) Ich bediene mich hier eines Ausspruchs Libris (Histoire etc., T. 4, p. 98), der von ihm nur auf die Biographen der bologneser Schriftsteller angewendet wird, die ebenso weitschweifig in Bezug auf Dichter und Litteraten als kurz und knauserig sind in Bezug auf die meisten Mathematiker; ich dehne ihn aber auf die Biographen der Schriftsteller aller Länder aus, was mir mehr der Wahrheit zu entsprechen scheint, und aus dem so erweiterten Ausspruch ziehe ich eine Schlussfolgerung, die mir völlig mit der Wahrheit in Uebereinstimmung zu sein scheint.

beiden Arten von gelehrten Biographen erklärbar, nämlich der wissenschaftlich und der litterarisch gebildeten, von denen die zweite Art mehr besorgt um die Ihrigen ist oder sicherlich war als die erste, und mehr als diese von dem Gefühle durchdrungen, den eigenen Körper zu stützen und zu erläutern.

Aber jetzt habe der erste Theil meiner Arbeit ein Ende. Ich weiss nicht, wie er mir gelungen; ich mögte aber, dass man ihn von einigem Nutzen für den Hauptzweck hielte, den ich im Eingange auseinandergesetzt. Weniger angenehm, wenn auch sicher nicht weniger Nutzen bringend, wird der folgende Theil werden, weil ich, um jenem Zwecke richtig dienen zu können, gemäss den Zielpuncten, die ich ebenfalls im Eingange dargethan, mich, ehe ich mit diesem Theile zu der dritten Epoche der Mathematischen Facultät der weitberühmten Studienanstalt gelange, in zahlreiche kleine Specialitäten, in Vergleiche und Kritiken vertiefen muss, die nicht sehr angenehm sind aber für die Zusammensetzung des entsprechenden Unterrichtsgegenstandes und in Bezug auf seine Verbindungen in diesen entlegenen Zeiten unumgänglich nöthig.

Anmerkungen

(a), (b).

Diese Anmerkungen sollen zur Aufklärung mehrerer Stellen des zweiten Theiles der vorliegenden Rede dienen.

In der ersten betrachte ich im Speciellen den gleichsam wiederaufgeweckten Gegenstand des Streites TARTAGLIAS mit CARDAN und mit FERRARI und die bezüglichen Cartelli, welche durch ganz Italien an die grössten Mathematiker und Gelehrten versendet wurden.

In der zweiten versuche ich die Behauptungen, die ich in der Rede in Bezug auf die wirklichen Anrechte, die für die Auflösung der cubischen Gleichungen bezüglich FERRO, CARDAN und TARTAGLIA zu haben scheinen, auseinandergesetzt, zu präcisieren und besser zu beweisen: im Speciellen werden darin die Anmassungen TARTAGLIAS in dieser Materie und die Anstrengungen COSSALIS, dieselben aufrecht zu halten, gebührend beschränkt werden.

In der ersten Anmerkung bin ich öfter von dem genannten Thema abgewichen, indem ich verschiedene Gegenstände behandelte, die sich mir beiläufig während des Schreibens ergaben, was man vielleicht dem nicht Mass halten können meiner geringen Kräfte beimessen könnte. Dennoch führe ich die Anmerkung so vor, wie sie abgefasst wurde, ohne mich zu bemühen, bei dem eigentlichen Zwecke zu bleiben oder nicht. Und ich glaube zuversichtlich hoffen zu dürfen, dass mir weder die Liebhaber gelehrter Sachen deshalb weniger Dank wissen werden, da dem die Geringfügigkeit dieser meiner Untersuchungen nicht entgegensteht, noch die Anderen, weil sie das Ueberflüssige der Form unsrer Schrift als ***Materialien zur Geschichte*** zu Gute halten werden.

Anmerkung (a) (Seite 126 und sonst):

Monsignor Bernardino Baldi sagt in seiner Cronica de' Matematici von Tartaglia Folgendes: „*Attese . . . . così poco alla bontà della* „*lingua che muove a riso talhora chi legge le cose sue.*" In der That, hätte der berühmte Abbate, der ein so feines Sprachgefühl besass die mitgetheilten Stellen gesehen, oder sogar einige der Antworten des Brescianer Mathematikers auf die vorgelegten Fragen des Mailänders, so würde er reichlich Grund seinen Ausspruch zu stützen gefunden haben. Demungeachtet hätte von einem berühmten und hochgelehrten Geometer, und nicht blos *in litteris* erfahrenen, wie er, niemals ein ähnlicher Spott gegen den souveränen Geist Tartaglias ausgehen sollen. Uebrigens ist dieser Spott viel weniger begründet, als man glauben sollte, wenn man sich nur an die Behauptung des hochberühmten Schülers und Nebenbuhlers des Commandin halten will. Man bedenkt nicht, dass es, auch nach dem, was der Verfasser in einer Stelle selbst sagt, scheint, er habe bei diesen Antworten in die unverfälschte *Brescianer Vulgärsprache* hinabgehen wollen, um damit bei dem Gegner Verdruss zu erregen. Dieser dagegen — *blando sermone* und *undequaque ad decorem formatus* — (wie von ihm richtig Cardan anführt), schrieb seine Cartelli auf das Eleganteste, fünf in seiner Muttersprache und eines in der lateinischen und er nannte jene Antworten *Stottereien (tartagliate)* (— „*in risposta della mia replica ricevetti la vostra tar-* „*tagliata; la quale come che molto lunga et confusa sia nondimeno altro non contiene, che nuove ingiurie, ecc.*" — so liest man am Anfange des dritten Cartello von Ferrari.) Ausserdem finden sich in diesen Antworten Tartaglias die Druckfehler haufenweise. Er ist etwas genauer in Bezug auf die Sprache in seinen Quesiti et Invenzioni diverse und in den übrigen trefflichen Arbeiten, die in dem Bande gesammelt sind, der den Titel trägt: Opere del famosissimo Tartaglia (Venezia 1606). Noch mehr ist er es im General Trattato di numeri e misure und am Meisten in seinem Euclide Megarense . . . . diligentemente rassettato et alla integrità ridotto ecc.; und in dem Buche, welches den Titel führt: Tutte le opere d' Arithmetica del famosissimo Nicolò Tartaglia. Besonders in diesen beiden letzten Werken sieht man nicht, wie der Tadel verdient sei, dass er zu wenig auf die Schönheit der Sprache gehalten, wenn er nur, um sie auf die absolut beste Form, in der sie, während er lebte, herauskamen, zu bringen sich der Unterstützung eines in der Vulgärsprache Erfahrenen bedient hätte, nach dem damals unter unsern grössten Gelehrten nicht seltenen Gebrauch. Sie hatten stets lateinische Werke zu lesen und zu schreiben und fanden sich stets, so oft sie eine Sache in Vulgärsprache verfassen wollten, in Verlegenheit versetzt, da sie nicht hinreichend die beste Form derselben kannten, das heisst die unsrer am Meisten auf Reinheit der Sprache haltenden Schriftsteller; sie benutzten deshalb solche, die daraus eine Profession machten. Dies geschah vorzugsweise durch Venetianer, bei denen auch jetzt noch der Anspruch in Kraft ist, damals aber allgemein herrschte, dass sie von allen Italiänern verstanden würden, da sie in jener wirklich sanften und schönen Sprache redeten und schrieben, in welcher die Gesetze und Verordnungen der stolzen Republik

gut geschrieben ist; woraus man schliessen darf, dass Cardan, sobald er sich bemühete, die erlauchte Muttersprache lobenswerth zu schreiben, dieses wohl vermochte. Der besagte Argwohn hebt aber nicht auf, dass diese Bemühungen an sich, vielleicht auch der Brief, von dem wir Kenntniss gegeben, nicht im höchsten Grade empfehlenswerth wären unter dem Gesichtspuncte, von dem aus sie der berühmte Toskaner Libri betrachtet hat.

Indem wir uns aber wieder zu Tartaglia und zu dem ersten Zwecke dieser Anmerkung wenden, dürfen wir nicht vergessen, dass man ihm die erste Uebersetzung des Archimedes nach dem griechischen Urtexte verdankt [1]). Ebenso scheint mir diese andere, wenn auch kleine Arbeit nicht verschwiegen werden zu dürfen (auch deshalb, weil ich sie von Niemandem erwähnt finde): Jordani Opusculum de Ponderositate Nicolai Tartaleae studio correctum novisque figuris auctum. Cum Privilegio. Venetiis, apud Curtium Troianum. MDLXV. In der von diesem Curtius geschriebenen Zueignung liest man: „— *tibi . . . . dicare volui hunc Jordani* „*ingeniosi, et acuti hominis librum de ponderibus, quem mihi suis in fragmentis* „*Nicolaus Tartalea familiaris meus, vir quidem praeclaris ornatus scientijs excu-* „*dendum reliquit* —“ [2]). Es ist ein Büchlein in klein 4° von 24 Blatt, von denen die vier letzten (in einer Vulgärsprache, die sich sicherlich mehr dem Brescianischen oder Venetianischen nähert, als dem des Baldi) die Darle-

---

1) Archimedis Opera, Venetiis 1545. — Libri, Histoire etc., T. 3, p. 156, Anmerkung.

2) Jordanus Nemorarius blühete um das Jahr 1200; er schrieb über Astrologie, Mechanik, Arithmetik, Geometrie, und Optik (M. s. Josephus Blancanus, Mathematicorum Chronologia, Sec. Duodec. a Christ.: Gerhardus Johannes Vossius, De Scientiis Mathematicis: Bernardino Baldi, Cronica de' Matematici, Artikel Giordano: Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en géométrie, S. 596 und 603 der deutschen Uebersetzung von Sohnke, Halle 1839.) [Chasles führt folgende Schriften von Jordanus an (p. 603): 1. *Arithmetik* in *zehn* (nicht, wie irrthümlich steht, in *zwei*) Büchern; 2. Practische Arithmetik nach arabischer Methode *Algorismus* genannt; 3. *Planisphaerium*, darin die Haupteigenschaft der stereographischen Projection, dass jeder Kreis sich als Kreis projiciert; 4. *De triangulis*; 5. *De geometria libri III.*; ausserdem habe er über Optik und Mechanik geschrieben.]. Bernardino Baldi bemerkt, dass *Jordanus sich nach einem Orte mit Namen Hemore Hemorarius nannte.* Sein Werk De Ponderositate oder De Ponderibus wurde zuerst in Nürnberg durch Joannes Petreius im Jahre 1533 [Chasles hat fälschlich 1531] veröffentlicht. Clavius hielt es für ein Fragment, aus dem sich nicht viel entnehmen lasse (Vossius, a. a. O., De Scriptoribus Mechanices, Cap. 48, § 29). Guido Ubaldo del Monte findet in seiner Mechanik (della Bilancia) darin falsche Annahmen (Baldi, Cronica etc.). Die erwähnten Bemühungen Tartaglias um dieses Werk des Jordanus Nemorarius oder Hemorarius kamen also zu gelegener Zeit. [Von dem Werke de Ponderositate enthält die Ausgabe: Liber Jordani Nemorarii Viri Clarissimi De Ponderibus Propositiones XIII. & earundem demonstrationes, multarumque rerum rationes sanè pulcherrimas complectens nunc in lucem editus. Cu Gratia & priuilegio Imperiali, Petro Apiano Mathematico Ingolstadiano ad XXX. annos cocesso. MDXXXIII. Am Ende: Excussum Norimbergae per Jo. Petreium, Anno domini M. D. XXXIII., nur ein Fragment, nämlich nur die ersten 13 Sätze des in den Handschriften aus 50 Sätzen, in der Ausgabe des Tartaglia aus 46 bestehenden Schriftchens des Jordanus. Von dieser Nürnberger Ausgabe trifft der Ausspruch des Clavius zu, nicht aber für die Ausgabe des Tartaglia, die vielmehr die Sache zum Abschluss bringt. Anm. d. Uebers.]

gang „*delle esperienze fatte da Nicolò Tartalea*" zu verschiedenen Zeiten von (1541—1551) enthalten, um das specifische Gewicht verschiedener fester Körper durch Wägen in der Luft und im Wasser zu bestimmen [1]). Der Resultate dieser Experimente bedient er sich im ersten Buche seiner Travagliata Inventione (Dechiaratione 9) und in dem Ragionamento secondo sopra la sua Travagliata Inventione, die in der genannten Sammlung seiner Werke enthalten sind. Ueber die darin mitgetheilten Zahlen macht der mehrfach erwähnte Libri die richtige Bemerkung, dass sie meistens zu klein erscheinen, und er schöpft daraus die Vermuthung, dass Tartaglia (da er seine Versuche in Venedig ausgeführt) sich vielleicht des Meerwassers als Masseinheit für das specifische Gewicht bedient habe [2]). Dieser Argwohn scheint aber wohl nicht mehr aufrecht erhalten werden zu können, denn auf den vier erwähnten Blättern, die ja die Originalexperimente enthalten, wird zweimal in folgender Weise erwähnt, das benutzte Wasser sei Regenwasser gewesen: — „*con* „*acqua di cisterna*" — „— *acqua di pozzo Venetiano, cioè cisterna*" —. Dies ist andererseits in vollständiger Uebereinstimmung mit dem Sinne einer Stelle, die man in dem schon vorher erwähnten Ragionamento secondo liest, und die folgendermassen lautet [3]): „*vero è che tutte queste proportioni delli detti* „*corpi materiali con l' acqua sono state da me ritrovate con l' acqua communa de* „*pozzo, cioè dolce e non salsa, e però essendo la salsa alquanto più grave della* „*dolce, varierà alquanto, ma poco ecc.*" Man muss also einen andern Grund dafür aufsuchen, dass diese Resultate ein wenig unter dem wahren Werthe sind, oder zu sein *scheinen*.

Die Travagliata Inventione des Tartaglia erinnert an eine unbarmherzige Beschuldigung, die von dem grossen Rivalen gegen ihn geschleudert wurde, und eben die gemeinschaftliche Ursache dieser Beschimpfung und der Herausforderung zwischen Ferrari und Tartaglia veranlasst uns, darüber Etwas weiter zu handeln (ungeachtet der Länge und der überflüssigen Ausdehnung, welche die vorliegende Note dadurch erlangt). In den letzten Worten derselben hat man auch den letzten Ausgang der Herausforderung ausgesprochen, beinahe wie er war, oder wenigstens, wie ihn sich Car-

---

1) Die obige Beschreibung der Tartaleaschen Ausgabe des Liber de Ponderositate von Jordanus ist, wenigstens nach dem mir vorliegenden Exemplare der Königl. Bibliothek zu Berlin, nicht genau richtig. Dies Exemplar besteht nicht aus 24 Blatt, sondern nur aus 23. Davon sind nur Blatt 2, 4—20 auf den Vorderseiten mit denselben Zahlen numeriert. Blatt 3a—16b, Zeile 16 enthalten das genannte Werk des Jordanus; Blatt 16b Zeile 17—Blatt 19a das Werk des Archimedes, de Insidentibus Aquae, 2tes Buch in lateinischer Uebersetzung; Blatt 20a—23a eine Schrift betitelt „Esperienze fatte da „Nicolo Tartalea. 1541." Blatt 23b enthält das Privileg des Buchhändlers zum Alleinverkauf des Buches. Der Theil des Archimedes ist im Buche selbst nicht betitelt, derselbe ergibt sich aber aus dem Privileg Blatt 23b; dass mit Blatt 16b das Werk des Jordanus zu Ende, folgt auch aus den Worten: „*finitus liber Joradam de ratione Ponderis.* „*Et sic finit,*" die sich auf Blatt 16b, Zeile 15—16 finden. Ein Fragment des Liber de Ponderositate findet sich in dem Manuscript *R. 4°. 2* der Gymnasialbibliothek zu Thorn, ein vollständiges Exemplar in der Handschrift *F. II. 33* der öffentlichen Bibliothek zu Basel, die fast sämmtliche Werke des Jordanus enthält. (Anm. des Uebers.)

2) Histoire etc., T. 3, p. 166.

3) Tartaglia, Opere, p. 31—32 der Ragionamenti.

dan vorstellte. Der Hauptzweck der Travagliata Inventione war, zu lehren eine „*regola generale da sulevare con ragione, e misura non solamente ogni* „*affondata nave: ma una Torre solida di mettallo.*“ Tartaglia veröffentlichte diese Regel, indem er sie als seine eigene Erfindung ausgab, zuerst im Jahre 1551 (Venedig in 4°); er erwähnte darin des Cardan gar nicht, der schon seit einigen Jahren, in der ersten Ausgabe des Buches „De Subtilitate“ und speciell unter dem Titel „*Modus quo naves demersae gurgitibus recuperantur*“ (Liber I. De principiis rerum), eine ähnliche Erfindung, eine ähnliche Regel angegeben hatte. Der Brescianer Mathematiker fehlte gegen den Mailänder Mathematiker (Arzt, Philosophen u. s. w.); er fehlte um so mehr, als es damals schon zum Bruche zwischen ihnen gekommen war und zwar wegen der wichtigeren Sache der Auflösung der cubischen Gleichungen. Gleichwohl war der Abstand der Mittheilung Cardans von dem Ganzen, was Tartaglia aus seiner erwähnten Erfindung zu machen und zu erarbeiten wusste, sehr bedeutend. Es ist daher höchst wahrscheinlich, dass ohne den starken Antrieb der vorangehenden aufgebrachten Voreingenommenheit der erste es wohl nicht für nöthig erachtet haben würde, den Fehler des andern zu beachten, einen Fehler, den man für unbeabsichtigt halten konnte oder so geringfügig, um darüber kein Wort zu verlieren. Ganz im Gegentheil stellt dieser, voll Zorn und Rachsucht, in seinem Buche De Libris propriis bei der Gelegenheit, wo er alle seine Gegner, diejenigen, die seine Schriften und seine Person geschmähet hatten, Revue passieren lässt, den Brescianer an die Spitze seiner Liste („*Nicolaus* „*Tartalea, in suis novis inventionibus*“), und bricht in folgende Worte aus: „*Tartalea coactus est recinere palinodiam* [1]): *sed tamen puduit eum stare pro-* „*missis, nec quod scripserat, delere voluit, sed in amentia perseveravit: corvo* „*prorsus similis, vivens alienis laboribus, et fur manifestus alienorum studiorum,* „*adeo impudens, ut quod edideram iam publice quadriennio ante de expiscandis* „*navibus submersis, ipse edito libello, nec rem satis intelligens, suppressa de nobis* „*mentione, inventionem illam, quia materna lingua Italica illam evulgavit, ut suam* „*publicavit*“ [2]).

Diese Beschimpfung musste um so ungerechter erscheinen, und um so verwerflicher, als nach der durch die ganze Ausdehnung von zwei und einem halben Jahrhundert allgemein angenommenen Meinung über das Unrecht des Cardan gegen Tartaglia, die sich auf die Geschichte der ersten Lösung der cubischen Gleichungen gründete, zu dieser Beschimpfung die verabscheuungswerthe Seite der unverschämtesten Heuchelei hinzugekommen wäre. Wie durfte er den Nebenbuhler anklagen, dass er sich mit den Erfindungen anderer ausgeschmückt, er, der ihn der Haupterfindung in Bezug auf die Gleichungen beraubte, ihn so zu seinem eigenen Nutzen um den Ruhm der ersten Veröffent-

---

1) Sicherlich hat hier Cardan, wenn auch zweifellos mit zu grosser Prahlerei, auf die Niederlage anspielen wollen, die durch seinen Kämpen Ferrari dem Tartaglia in der schon oben erwähnten letzten Disputation oder dem kriegerischen Schlusse in der Kirche S. Maria del Giardino de' Frati Zoccolanti in Mailand zugefügt wurde (Cossali, Origine ecc. dell' Algebra, V. II, p. 132—133, 135).

2) Cardanus, De Libris propriis, p. 57 der Ausgabe Basel, Henricpetri.

lichung derselben betrog?, indem er dabei sogar einen Schwur brach![1]) Nun Cardan wusste sehr wohl, als er in dieser Form gegen Tartaglia loszog, dass die *Monimenta Publica* der Cartelli zwischen diesem und seinem eigenen Schüler und Kämpen Ferrari zum Beweise dalagen, dass sein Schwur, die Erfindung nicht zu veröffentlichen — die er von anderswo mit Mühe, in Räthselform, ohne Beweis erhalten hatte —, und gleichsam jede Pflicht gegen den schwierigen Mittheiler derselben mit dem Augenblicke selbst gelöst war, wo ihm, von anderer Seite, sogar von der ersten Quelle der Erfindung selbst, diese dargereicht wurde und er sie erhalten hatte ohne den Schatten eines Geheimnisses, vollkommen klar und mit dem nöthigen Beweise. Das ergibt sich in der That auf die allerunzweideutigste Weise aus den genannten Cartelli, und selbst aus dem Wenigen, was wir daraus für unsre Schrift ausgezogen haben. Wir hoffen, es werde dies jedem einleuchten, der es für werth gehalten hat, unsere Abhandlung vollständig zu lesen. Endlich konnte auch Cardan nicht daran denken, dass das Geschick den Cartellis so ungünstig sein würde, dass es sie so bald und für eine so lange Zeit, wenn auch nicht vollständig aus der Erinnerung, so doch aus aller Beachtung bei den Mathematikern fallen liess (Grund dazu wahrscheinlich zum Theil die Schmähungen und plumpen Persönlichkeiten, von denen sie voll sind, vorzugsweise die des Tartaglia, muss man sagen, und das Gute und Neue, was darin ist, besudeln — eine bemerkenswerthe Warnung für diejenigen, welche bei litterarischen Kämpfen nicht in jeder Weise den Anstand wahren! —). Es ist wahr, dass wenn Cardan aus dem erwähnten Gesichtspuncte die Erhaltung der Cartelli wünschen, er aus einem andern Grunde noch vielmehr ihre Ausstreichung oder Vernichtung erhoffen und den unglücklichen Streit, durch den sie in Scene gingen, verabscheuen musste. Ich meine wegen des von ihm in der Ars magna und den spätern Werken bewahrten Stillschweigens über die Thatsache, dass ihm das Werk von Ferro in Bologna vor Augen gelegt wurde. Er durfte hoffen, dass die Nachwelt ihm leicht sein zweideutiges Unrecht gegen Tartaglia verzeihen würde des Verdienstes halber, dass sie durch ihn das Geheimniss desselben und alles Uebrige erfuhr, was er daraus abzuleiten wusste; er konnte also diesen Schein ruhig über sich ergehen lassen. Dagegen durfte er sich auch nicht im Geringsten schmeicheln, dass sie ebenso bereit sein würde, ihm sein Unrecht gegen Ferro zu vergeben, wenn diese hinterlistig von ihm verschwiegene Thatsache bekannt geblieben oder wieder zu ihrer Kenntniss gelangt wäre.

Indem wir aber zu unsrem vorhergehenden Gegenstande zurückkehren, bemerken wir, dass die Hauptanklage Cardans, die in dem mitgetheilten Passus des Buches De libris propriis enthalten ist, nicht blos auf einem Irrthum beruhen, sondern schimpflich auf ihn zurückfallen würde, wenn es wahr wäre, dass der erste Druck seines andern Werkes De subtilitate erst im Jahre 1552 erschienen sei, wie Libri conjiciert hat[2]). Das ist aber nicht der Fall. Denn eben aus der Widmung von 1552, die man in der Ausgabe

---

1) Cossali, Origine ecc. dell' Algebra, V. 2. p. 130 u. ff.

2) „*La dedicace du traité* de subtilitate *est daté de 1552; c'est probablement* „*l'année où parut la première édition*" (Histoire etc. T. 3, p. 176 Anmerk. (1)).

von 1554 (Lugduni apud Philibertum Rolletium, 8°) des zuletzt genannten Werkes liest (Seite 2 der Widmung), und aus dem Buche De libris propriis (p. 28 der Ausgabe von Henricpetri), sowie aus der Apologie Cardans in Calumniatorem librorum de Subtilitate (M. s. den Anfang der Apologie) entnehme ich klärlich, dass eine andere, *wenn auch weniger umfangreiche*, Ausgabe desselben Werkes, mehrere Jahre vor 1552 von dem Verfasser bei Johannes Petrejus zu Nürnberg veröffentlicht war. Ich habe diese *primitive* Ausgabe von Nürnberg nicht auffinden können, aber ich besitze einen Nachdruck derselben von 1551 in 8° (Parisiis ex Officina Michaelis Fezandat, et Roberti GranIon etc.), und ich habe in der Bibliothek dieser Universität einen andern Nachdruck von 1550 in 12° gesehen (Lugduni, Philibertus Rolletius). Erwägt man dies Alles, so ergibt sich als sicher: 1. dass die *zweite* Ausgabe des Werkes in Rede erst am Anfange des Jahres 1554 erschien, obgleich der Verfasser zwei Jahre vorher dem Drucker dazu alle Materialien übergeben hatte gleichzeitig mit der erwähnten Widmung mit dem Datum Paris in der Mitte des Jahres 1552 *(XI Calendas Maij, anno MDLII Lutetiae in itinere)*; 2. dass die erste Ausgabe desselben Werkes, weniger umfangreich als die zweite, verschiedene Male neu gedruckt wurde, und dass einer dieser Neudrucke vor 1551 fällt, in welchem Jahre die Travagliata Inventione des Tartaglia herauskam; 3. dass es endlich sehr gut bestehen kann, dass der erwähnte erste Nürnberger Druck schon seit vier Jahren herausgegeben war, als Tartaglia sein mehrfach genanntes Werk veröffentlichte, jene vier Jahre, um die Cardan in dem mitgetheilten Passus versichert, dem Rivalen in Betreff der Erfindung jedes versunkene Schiff zu heben u. s. w., zuvorgekommen zu sein. Zuletzt dürfte es nicht unnütz sein, darauf hinzuweisen, dass der mitgetheilte Titel „*Modus quo naves* „*demersae gurgitibus recuperantur*,“ sowie der ganze darunter fallende Gegenstand sich *identisch* sowohl in den Neudrucken der ersten Ausgabe des Tractats „De subtilitate,“ wie in der zweiten *erweiterten* Ausgabe von 1554, sowie ebenfalls in der dritten und letzten sehr vervollkommneten Ausgabe findet, nämlich in derjenigen, welche die vorgenannte Apologie gegen den Verläumder (G. C. Scaliger) enthält; diese dritte Ausgabe scheint zuerst im Jahre 1560 erschienen zu sein [1]). Schliesslich: wenn Cardan wegen des mitgetheilten Passus Nachsicht verdient, dass er sich durch Unwillen hat hinreissen lassen, und er hat ihn wirklich in bedeutendem Masse (der Andere hat ihn aber ebenfalls), so kann man ihm hier wenigstens auf keine Weise den Tadel jener Fälschungen, Verheimlichungen und anderer Züge offenen Treubruchs aufbürden, gegen die man niemals Gnade üben darf, und die nicht gerade so sehr selten waren in den litterarischen Fehden auch in den Zeiten nach dem XVI. Jahrhundert, die um vieles höflicher und gebildeter waren!

Um aber diese Anmerkung mit einem Gegenstande zu beschliessen, der demjenigen näher liegt, den wir vorzugsweise in diesem letzten Theile der Schrift betrachten, geziemt es sich, einige Stellen aus dem ersten und zweiten

---

1) Basel bei Henricpetri. M. s. Cardani De Libris propriis, eorumque usu Liber, p. 69 der vielgenannten Ausgabe.

Cartello Ferraris mitzutheilen, — in zweien von ihnen wird Tartaglia des Diebstahls, des Eigendünkels, u. s. w. angeklagt — und die Antworten und ähnlichen Anklagen, welche das zweite Cartello des Letztern enthält. Es drehen sich diese Anklagen um die Sätze des Jordanus über die Wissenschaft der Gewichte, die Tartaglia sich angeeignet und falsch bewiesen haben soll. Ich habe schon vorher bei Gelegenheit des Werkchens jenes alten Schriftstellers, das von Tartaglia commentiert und vermehrt wurde, erwähnt, dass in der Travagliata Inventione und in dem Ragionamento secondo sopra la Trav. Inven. Tartaglia selbst die Resultate einiger seiner Versuche über das specifische Gewicht mitgetheilt habe, die sich auf vier Blättern vollständig beschrieben finden, die von ihm, wohl wegen der Aehnlichkeit des Gegenstandes, jenem Werkchen angehängt sind; dass ausserdem dasselbe nach seiner eigenen Anordnung sechs Jahre nach seinem Tode an die Oeffentlichkeit gelangte. Wir bemerken jetzt noch, dass er einen Theil des Inhaltes dieses Werkes im Libro ottavo delli Quesiti et Inventioni diverse vorgebracht hatte. Dies vorausgeschickt, wird man viel leichter die vorerwähnten Anklagen und Antworten verstehen. Da sind die Stellen Ferraris: „*Messer* „*Nicolò Tartalea, mi è pervenuto alle mani un vostro libro, intitolato Quesiti et* „*inventioni nuove, nell' ultimo trattato del quale, facendo voi mentione dell Eccel-* „*lente Signor Hieronimo Cardano medico Melanese, il qual è hora publico Lettor* „*di medicina in Pavia, voi non vi vergognate di dir, che egli è ignorante nelle* „*mathematice ecc.*" (das speciell ist der Anfang des ersten Cartells der Herausforderung). „. . . . *Per dirvi il vero, penso che habbiate fatto questo, sapendo* „*che il Signor Hieronimo è di così felice ingegno, che non solamente in medicina,* „*la qual è sua professione, è di quella sufficienza che si sa, ma anchor nelle ma-* „*thematice, le quali altre volte egli usò a guisa di giuoco, per pigliarsi alcuna* „*ricreatione et solazzo, è così ben riuscito che universalmente, per parlar con* „*modestia, è tenuto fra primi mathematici . . . . Per tanto, io non solamente per* „*difender la verità, ma anchor perche questo tocca a me principalmente, che sono* „*creato suo, essendo sua Eccellentia impedita dal grado che tiene, ho deliberato* „*far publicamente conoscere, o il vostro inganno, over (come piu tosto penso) la* „*vostra malignità. Non col rendervi il contracambio in parole, il che potrei far,* „*non con fittioni (come voi) ma lealmente. Atteso che, oltre mille errori de pri-* „*mieri libri di quella vostra opera, havete anchor posto nel libro ottavo le propo-* „*sitioni di Giordano come vostre, senza far mentione alcuna di lui: il che grida* „*furto. Et facendovi le dimostrationi di vostra testa, le quali per lo più non* „*conchiudono, fate confessar con gran vostro vituperio all' Illustrissimo Signor* „*Don Diego di Mendozza cose, che so io certo (percioche conosco in parte la sua* „*gran dottrina) che egli non le direbbe per tutto l' oro del mondo: il che dichiara* „*presuntione con ignoranza ecc.*" — Im zweiten Cartello nimmt Ferrari aus dem von Tartaglia (in seiner ersten Antwort) bewahrten Stillschweigen in Bezug auf die Anschuldigungen des Diebstahls, Eigendünkels und der Unwissenheit, die in den letzten Sätzen der mitgetheilten Stelle gegen ihn geschleudert wurden, Gelegenheit, sie in folgender Weise in Erinnerung zu bringen: „*Praeterea, e memoria ne exciderunt furta et errata tua, quae ego iam lacessitus* „*iniuria in mea provocatione connumeravi? Te propositiones Jordani suffuratum,* „*eas sine ulla authoris mentione tibi vendicasse: quas cum tuis futilibus argu-*

wenn man sich daran hält, dass seine Erfindung in Betreff der Auflösung genannter Gleichungen und der von ihm innegehaltene Weg zu derselben aus den betreffenden sorgfältigen Untersuchungen Cossalis sich ergeben [1]). Dieselben müssen aber, glaube ich, meinerseits ernstliche Zurückweisungen erfahren, was das behauptete Verdienst der Originalität Tartaglias bei dieser Erfindung betrifft, und soweit sie behaupten mögten, dass von ihm Cardan viel mehr als die blosse Formel oder Formeln des Capitels in Versen lernte, aber nicht mehr darin, was die Identität der ursprünglichen Methoden des einen und andern betrifft, die sie bei der Behandlung dieser Gleichungen anwendeten, die mir im Gegentheil unwiderleglich von Cossali bewiesen zu sein scheint. In der Form, dass, meiner Meinung nach, im Zusammenhange mit den im Texte dargelegten Thatsachen, Tartaglia und Cardan sich derselben Methode, identisch mit der Ferros, bedient haben, die von Letzterem in seinem Werke auseinandergesetzt, und von Cardan in seiner Ars Magna umfasst ist; eine Methode, die als erstem Erfinder sicherlich Ferro selbst angehört, während man Zweifel hegen darf, ob sie als zweitem Erfinder auch Tartaglia zugesprochen werden darf, und in noch viel grösserm Masse, ob sie als drittem Erfinder auch Cardan zugetheilt werden kann. Mit der nämlichen Methode, die wir die Ferrosche nennen wollen (nicht ohne die Hoffnung, dass das Gefühl einer um so gerechtern Ehrenrettung, als sie später kommt, ihr von den nachkommenden Geschlechtern werde [2]), trifft ferner ihrem wesentlichen Inhalte nach die Methode zusammen, welche der Holländer Hudde 139 Jahre nach der Ars Magna bekannt machte; und wenn man auch auf die Unterschiede derselben Acht haben will, der sich in beiden findet, so sind diese zu Gunsten der originalen italiänischen Methode, welche die viel einfachere ist. Daher scheint es, dass man nach keiner Richtung hin in diesem Gegenstande Hudde den Titel eines Erfinders zuerkennen kann, welchen der berühmte Lagrange ihm grossmüthig zusprechen zu müssen glaubte [3]), bevor durch Cossali diese ganze dunkle alte Materie einer neuen, genauen und eingehenden Untersuchung unterworfen wurde, die wir häufig zu empfehlen Gelegenheit gehabt haben [4]). Wir hatten aber auch dann und wann Gelegenheit auf die Parteilichkeit der erwähnten Untersuchungen zu Gunsten Tartaglias hinzuweisen, und die Voreingenommenheit gegen Cardan und auch indirect das Vorurtheil gegen unsern Scipione Ferro. Wir halten es nun der Mühe werth, nach unserm Vorsatze bei diesem Puncte zu verweilen.

---

1) Origine ecc. dell' Algebra, Vol. 2, p. 145—158, u. s. w.

2) Selbst im Vaterlande Ferros ist diesem Wunsche des Verfassers nicht entsprochen worden. Erst Luvini hat in der 6. Auflage seines verdienstlichen Werkes: Compendio di Algebra elementare, Torino, 1868, p. 295 ff. unter Bezugnahme auf vorliegende Schrift eine richtige Darstellung des Ganges der Erfindung der sogenannten Cardanschen Regel gegeben. (Anm. d. Uebers.)

3) J. A. Serret ist in seinem Cours d'Algèbre supérieure anderer Ansicht; er stellt die Auflösungsmethode Huddes als die einfachste hin, welche es gibt, und in seiner geschichtlichen Einleitung sagt auch er, dass wir den Gang, welchen Ferro und Tartaglia zur Lösung eingeschlagen, nicht kennten. Auch er ignoriert also die Thatsachen, welche das vorliegende Werk entwickelt hat. (Anm. d. Uebers.)

4) Lagrange, Mémoires de l'Académie de Berlin a. a. O.; Derselbe, Lezioni elementari sulle Matematiche ecc., p. 63; Cossali, Origine ecc. dell' Algebra p. 146—147; Franchini, Storia dell' Algebra ecc., p. 46.

Zuerst müssen wir folgende Thatsache anerkennen: Einige Stellen der mühevollen und hochgelehrten Geschichte Cossalis zeigen ohne Weiteres die logische Unparteilichkeit desselben in Bezug auf Ferro und dessen Erfindung; ausserdem ist alle Wahrscheinlichkeit, dass, wenn die Thatsache des Werkes des unglücklichen bologneser Algebristen zu seiner Kenntniss gekommen wäre, er beinahe so wie wir in Bezug auf den Gegenstand in Rede geschlossen, und demgemäss den bezüglichen Theil seiner Geschichte modificiert haben würde (wenn uns nicht hierin die Liebe zu unsrer Anschauungsweise täuscht). Man durchlaufe jenen Theil, und einige der erwähnten Stellen werden jedem auffallen. Wir begnügen uns die beiden festzuhalten, die man auf S. 141—142 und S. 145 liest [1]). Die erste ist gegen Andres gerichtet, wo dieser behauptet, die Regel des Tartaglia *habe den Vorzug, dass sie allgemeiner sei, und viele Fälle umfasse, auf welche die des Scipione Ferro nicht anwendbar wäre:* nun Cossali erwiedert: „*da von der Regel dieses ersten Erfinders keine „Nachricht geblieben ist, so sehe ich nicht ein, mit welchem Grunde man behaupten „könnte, dass sie auf keinen andern Fall als den der Gleichung* $x^3 + px = q$ „*anwendbar sei; andererseits führt die Aehnlichkeit dieses Falles vorzugsweise mit „dem Falle* $x^3 = px + q$ *dazu, das Umgekehrte zu glauben.*“ Aehnliche Vorbehalte ergeben sich aus der zweiten der vorerwähnten Stellen. Diese Meinungen Cossalis, schliessen offenbar den Grundsatz ein (der auch sonst unzweifelhaft ist), dass Alles, oder wenigstens das Hauptgeschäft, wirklich in der allgemeinen Lösung der Gleichung $x^3 + px = q$ bestand, oder, wenn man will, irgend einer der drei Gleichungen, die man damals zwischen *cubus*, *res* und *numerus* aufstellte, wie in der Anmerkung auf Seite 115 bemerkt worden ist. Und in Uebereinstimmung mit diesem Grundsatz gibt Cossali ohne einen Schatten des Zweifels zu, dass Tartaglia nach Entdeckung der allgemeinen Regel für die Gleichung $x^3 + px = q$ von Abend bis Morgen, wie er sich nicht wenig brüstet, sie auch für die andere $x^3 = px + q$ und bald auch für die dritte $x^3 + q = px$ finden konnte [2]).

Man versteht nun ganz und gar nicht, in welchem Zusammenhange mit den vorgedachten Anschauungen derselbe ausgezeichnete Historiker dazu gekommen, folgendes Andere zu schreiben. Indem er in schärfster Weise das ganze Betragen Cardans in der Ars Magna gegen Tartaglia tadelt [3]), will er ihn verdammen, weil er darin Nichts weiter als von diesem erhalten anerkenne, als die Regel für die Gleichung $x^3 + px = q$, und ruft aus: „*Weshalb „das verschweigen, was Tartaglia noch weiter gefunden hatte* (nämlich die Regeln für die beiden Gleichungen $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$), „*was ihm eigenthüm„lich war, und was er ihm gleichfalls gegeben hatte?*“ — Als ob nicht das Ganze sich auf die Regel für eine der drei Gleichungen reducierte und speciell [4]) auf die für die Gleichung $x^3 + px = q$; und als ob es wahrscheinlich wäre, dass dem ersten Erfinder dieser Regel, nachdem er die Hauptsache überwunden

1) Origine ecc. dell' Algebra, Vol. 2., a. a. O.

2) Cossali, Origine ecc. dell' Algebra, Vol. 2., p. 99—100, 114, 155 u. s. w.

3) Cossali, a. a. O., p. 129—130.

4) Tartaglia, Opere ecc., p. 261.

hatte, die einfache Fähigkeit zu einer ganz leichten Ausdehnung oder Anwendung der oft angeführten Regel gefehlt hätte.

Bald darauf gelangt derselbe Geschichtsschreiber, indem er noch bei demselben Unrecht Cardans verweilt, bis dahin, dasselbe als eine Heuchelei und freiwillige Verheimlichung *von zwei Drittheilen des geschenkten Geheimnisses* zu charakterisieren, und erschwert es noch, als Zulage, durch die Ueberlegung, dass das eingestandene *Drittheil der Gabe* gerade dem Theile der ganzen Erfindung entspreche, in welchem Andere schon Tartaglia zuvorgekommen seien. Wer sieht hier aber nicht eine unglaubliche Voreingenommenheit? Wer sieht nicht, dass um in dieser Weise die ganze Sache stückweise zu schätzen, es nöthig wäre, dass die drei Theile von gleichem Werthe wären, und dass nicht, wie es wirklich ist, gegenüber einem beliebigen derselben, die übrigen verschwinden?

In Uebereinstimmung mit diesen neuen Gesichtspuncten sieht man nachher Cossali unmuthig dem Wallis wegen seiner Angabe Vorwürfe machen: dass Cardan als ersten Erfinder *zweier Regeln* für die Auflösung der cubischen Gleichungen Ferro begrüsse und als zweiten Erfinder Tartaglia: — „Cardan“ (dabei bleibt Cossali), „*lobt ebenso wie Scipione Ferro, so auch Tartaglia nicht* „*wegen zwei, sondern nur wegen einer Regel.*“ — Die Wahrheit jedoch ist, dass Cardan, wenigstens im Buche De Libris propriis, gelegentlich *zwei Regeln* erwähnt und nicht blos *eine* (wie sich aus einer unsrer Anmerkungen auf S. 120 ergibt); das rechtfertigt sowohl Wallis vollständig, als es auch uns in der Behauptung bestärkt, dass bei ähnlichen Angelegenheiten mit gutem Grunde das Erwähnen einer Regel oder zweier oder aller drei fast für gleichbedeutend gehalten wurde. So glaubte dies unzweifelhaft Cardan und nicht anders Ferrari, aus dessen lateinischem Cartello wir bei dieser Gelegenheit die Redensart wieder erwähnen: „*Cardanus ergo ex te accepit inventiunculam* „*illam cubi et laterum aequalium numero etc*“ [1]); als wir sie zuerst niederschrieben, tadelten wir sie wegen der Erniedrigung der Erfindung an sich, die er darin affectiert, aber nicht, weil er darin nur einen der Fälle der genannten Gleichung erwähnt, anstatt der ganzen Dreizahl derselben.

Aber Tartaglia selbst, der sich viel mehr darum kümmert, übergeht die schuldige Auslassung Cardans, die Cossali ihm unterstellt, und muckst nicht. Das ist in Wahrheit seine ganze Antwort auf die vollständige Stelle des Ferrarischen Cartello, die dem mitgetheilten Passus entspricht [2]): „*Ve* „*rispondo che ho molto accaro che voi siati quello che si trovava a quel tempo in* „*casa sua quando che gli insignai tal mia inventione. Ma ben me maraviglio di* „*Voi et di lui*“ — d. i. Cardans — „*(perche so che Voi parlati per bocca sua)* „*che habbiati ardire di humiliare tanto la detta mia inventione, con la quale vi* „*havevi pensato di farve immortali*“ (und so thaten sie in Wahrheit), „*Non* „*vedeti Voi che egliè cosa nota a cadauno intelligente, et lui medesimo lo confessa* „*in detta opera* (Cardan in der Ars Magna) *che tal mia inventione è l'anima*

1) M. s. oben S. 139.
2) A. a. O.

„*di tutto il detto suo volume. Non vedeti voi che cavando la detta mia pianta*
„*del detto vostro giardino, tal vostro giardino restaria una oscura selva, perche*
„*tutte le altre cose sostantiale derivano da detta mia pianta. Et tamen el non*
„*se vergogna de dire* [1]) *nella detta sua opera, che tutti li altri capituli che in*
„*quella si trovano oltra il mio esser tutte sue et vostre inventioni le quale erano*
„*state da me invente, et ritrovate gia 5. anni avanti che gli insegnasse a lui tal*
„*mia particolarita, come che è noto a molti qua in Venetia, cioè lo Capitulo de*
„*censo, e cubo egual a numero con li altri suoi compagni, anchor che a quel tempo*
„*non mi volsi scoprir con sua Eccellentia* (man verstehe mit Cardan), *accioche*
„*quella non tentasse de trovarli, perche sapeva che tal cosa gli saria facile per*
„*vigor della mia così humel pianta* [2])." In der ganzen Antwort kein einziges Wort des Tadels im Sinne der von Cossali vorgebrachten Verdammung! Diese sogar vollständig durch den Sinn des Ausdrucks selbst ausgeschlossen! Zuerst sieht man den Verfasser in Uebereinstimmung mit dem Gegner durch die Bezeichnungen *inventione*, *capitulo*, *particolarità* u. d. gl. alles das unterscheiden, was er acht Jahren früher dem Cardan mitgetheilt hatte; und als er dazu übergeht, sich für die Erfindung *der andern Capituli*, die in der Ars Magna enthalten sind, der Priorität zu rühmen, beeilt er sich, als ob er fürchtete, man könnte darunter die unmittelbar davon abhängigen und in Wirklichkeit von den genannten nicht verschiedenen Capitel des *cubus et res aequales numero* verstehen, hinzuzufügen: „*cioè lo Capitulo de censo, e cubo egual a nu-*„*mero con li altri suoi compagni*"; und unter diesen *compagni* verlangte er vielleicht, dass man die Capitel verstehe, welche ausser dem Quadrate und dem Cubus auch die Seite enthalten, aber sicherlich nicht etwa die, welche allein aus dem Cubus und der Seite zusammengesetzt sind.

Indem Cossali glauben macht, wir hätten weder bei Tartaglia noch bei Cardan „*einen Zug, der uns zeigte, bis zu welchem Grade die Erbitterung* „*stieg, und von welcher Art der Streit zwischen jenem und diesem war*", übergeht er, wegen des Unrechts, das er an Letzterem aufsucht [3]), es als *natürlich* hinzustellen, *dass der Erstere reclamierte, dass er* ebenso *Cardan die Ungerechtigkeit, nur ein Drittheil des geschenkten Geheimnisses zu bekennen, vorrückte!!*

Ich habe vielleicht zu lange bei diesem Gegenstande verweilt. Aber es ist Zeit, dass man die wohlfeile Behauptung vernichtet, (die so häufig in so vielen Büchern wiederholt wird, die selbst von grösserer Autorität in diesem Gegenstande sind, als selbst die von Andres, Tiraboschi u. s. w.), dass nämlich Ferro stehen geblieben sei oder sich beschränkt habe auf den einzigen speciellen Fall der cubischen Gleichungen: *res vel latus et cubus aequales numero.* Es fehlen uns directe Beweismittel, um zeigen zu können, dass er zu den (von den vorgenannten wirklich verschiedenen) Fällen des *cubus, census et numerus* und des *cubus, census, latus et numerus* fortschritt: wer aber wird erst strenge Beweise suchen, um das für richtig zu halten, dass ihm die beiden Fälle bekannt waren, welche ohne Weiteres mit dem seinigen verbunden sind?

---

1) M. s. oben S. 144.
2) Seite 5—6 der Seconda Risposta ecc.
3) Cossali, Origine ecc. dell' Algebra, Vol. 2, p. 130.

Wer wird speciell danach suchen, nachdem er die Thatsache in Betreff d
„libellum manu Scipionis Ferrei . . . . iam diu conscriptum, in quo istud inve
„tum, eleganter et docte explicatum, tradebatur“ [1]) kennt?

Doch jetzt Ferro bei Seite lassend, müssen wir denn dann dem prahl rischen Tartaglia den Ruhm zuerkennen, dass er zuerst das *„Capitulo*
„censo e cubo egual a numero, con li altri suoi compagni“ erfand, und zwar gene *fünf Jahre bevor* er Cardan seine Specialität *(particolarità)* des *cubus et lat aequales numero* lehrte? Es wird mir schwer, aber ich kann auch in diese Gegenstande mit dem hochberühmten Cossali nicht im Geringsten überein stimmen, der diesen Ruhm als eine schöne Zierde seines Schützlings betrachte Und zwar entnehme ich die hauptsächlichsten Gründe für meine abweichend Ansicht aus seiner eigenen Geschichte, aufmerksam und nicht knechtisch ge lesen. Ihm verdanken wir, das muss man bekennen, dass wir verstehen un Geschmack finden können an dem, was jetzt für uns, die wir die Bezeichnunge und das Kauderwälsch unserer früheren Mathematiker nicht kennen, nicht meh verständlich war. Die Werke von Leonardo Pisano meine ich, des Pa cioli, Tartaglia, Cardan, Bombelli und der andern geringern Alge bristen unserer Nation, welche in dieser *Ars Magna* nicht blos (wie in de andern Künsten) die Keime hervorbrachte und in Europa ausstreute, sonder die Zuwüchse und die besten Früchte; die Wiederherstellerin und Lehrerin de Anfangsgründe, als Niemand irgend Etwas wusste, höhere und erhabne Lehr meisterin, als das Wissen durch sie überall verbreitet war.

Ich werde nach Möglichkeit versuchen die gewichtigsten Gründe meine obenerwähnten abweichenden Ansicht in einige Puncte zusammenzufassen.

1. Die Behauptung Tartaglias, dass die Erfindung der allgemeine Auflösung der Gleichung $x^3 + mx^2 = n$ von ihm fünf Jahre vor dem 25. Mär 1539 gemacht sei, dem Tage, an dem er Cardan die Regeln für die Glei chung $x^3 + px = q$ mittheilte [2]), lässt sich nicht aufrecht halten; der Ze nach im Widerspruch mit den betreffenden Behauptungen desselben Tartag lia, die im Libro nono der Quesiti et Inventioni diverse enthalte sind. Und in der That, die Erfindung würde, wenn man jener Behauptun folgt, in den Anfang des Jahres 1534 und, wenn man diesen andern folgt, i das Jahr 1530 fallen [3]); hält man sich an jene, so würde diese Erfindun Tartaglias nur ungefähr um ein Jahr seiner andern Erfindung über die Gle chung $x^3 + px = q$ vorausgegangen sein (denn zu dieser gelangte er, na seiner Angabe, am 12. und 13. Februar 1535) [4]); während bei Festhaltu der andern Behauptung die erste der zweiten um fünf Jahre vorangegangen wär

2. Wir sahen, dass die Behauptungen des zweiten Cartello des Ta

---

1) M. s. oben S. 126, 140.

2) Tartaglia, Opere ecc., Quesito 34, p. 265; Cossali, Origine ecc. del Algebra, V. 2, p. 115 ff.

3) Tartaglia, a. a. O., Quesito 14, p. 223—224, Quesito 25, p. 237 und son Cossali, a. a. O., p. 98—99 und 101—102 etc.

4) Tartaglia, a. a. O., Quesito 25, p. 234—235; Cossali, a. a. O., p. 99—100.

taglia vollständig mit den Behauptungen der Quesiti desselben in Folgendem zusammentreffen: „er habe die cubischen Gleichungen von der Form „$x^3 + mx^2 = n$ behandelt und gelöst vor den Gleichungen von der Form „$x^3 + px = q$; oder er habe die erste gelöst, ohne durch die Auflösung der „letztern zu gehen“ —. Aber gerade der unglaubliche Dünkel des Brescianer Mathematikers, allgemein die Gleichung $x^3 + mx^2 = n$ vor der Gleichung $x^3 + px = q$ gelöst zu haben oder unabhängig von der Auflösung dieser letztern, ist für Cossali der erste Antrieb dazu gewesen, in diesem Puncte seine Erzählungen zu revidieren [1]). Nun aus dem Quesito 28 [2]), aus dem Quesito 31 [3]) und dem Quesito 32 [4]) legt Cossali mit grossem kritischen und wissenschaftlichen Scharfsinn mehrere Unrichtigkeiten und Widersprüche, Unachtsamkeiten und Verwirrungen Tartaglias über die eingebildete Entdeckung und den Besitz der Regel für die Gleichung $x^3 + mx^2 = n$ offen dar; daraus beweist er schliesslich, indem er ganz genau die Schlüsse und Rechnungen Tartaglias selbst verfolgt, dass dieser von 1530—1539 über diesen Gegenstand *höchstens* zu einer Regel die Gleichung $x^3 + mx^2 = n$ *zusammenzusetzen* gelangt sei *und zwar in specieller Weise*, indem er dem x eine ganz bestimmte Form gab, und daraus die Ausdrücke und eigenthümlichen Relationen herleitete, die m und n haben mussten; das heisst, die Gleichung, und zwar auf eine einzige Weise, *aufstellen*, aber *nicht sie allgemein lösen*, oder die Form von x bestimmen in m und n, und also den Werth von x, wenn m und n gegeben sind [5]) !

3. Aus dieser Verwechselung von solcher Wichtigkeit!, die Tartaglia seit 1530 machte, hätte er sich nach Cossali in der ganzen Länge von 9 Jahren nicht herausgefunden. Ich behaupte aber, dass er auch noch nach 1539 in diesem grossen Irrthum verharrte, dass man sogar ganz sichere Gründe hat, zu glauben (was auch immer derselbe berühmte Historiker meint und hinzufügt), dass Tartaglia ihn niemals eingesehen hätte. Denn man muss berücksichtigen (eine Thatsache, die Cossali völlig entgangen zu sein scheint), dass Tartaglia sein Libro nono der Quesiti et Inventioni diverse im Jahre 1546 herausgab. Welche Daten also auch den Quesiti von dem Verfasser beigeschrieben sind (und sie erstrecken sich von 1521 ausgehend, dem Datum des ersten Quesito., bis 1541, dem Datum des zweiundvierzigsten und letzten), alle Aussprüche, alle Meinungen, die in diesen Quesiti enthalten sind, müssen als Aussprüche und Meinungen die dem Verfasser im Jahre 1546 zugehörten, angesehen werden, wenn sie dann von ihm nicht zurückgenommen worden. Da dies nun in Bezug auf die Prahlerei, die Gleichung $x^3 + mx^2 = n$ vor der andern $x^3 + px = q$ gelöst zu haben, nicht geschieht und auch nicht in Bezug auf die vorerwähnte irrige Meinung oder grosse Illusion, die durch Cossali aufgedeckt ist, so muss man nothwendigerweise schliessen, dass er im Jahre 1546 sich noch nicht von ähnlichen Täuschungen freigemacht hatte. Und werden

---

1) Cossali, a. a. O., p. 105—106.
2) Tartaglia, a. a. O., p. 242, ff.; Cossali, a. a. O., p. 103.
3) Tartaglia, a. a. O., p. 249—250 etc.; Cossali, a. a. O., p. 104.
4) Tartaglia, a. a. O., p. 254 ff. und 262; Cossali, a. a. O., p. 104 und 113.
5) Cossali, a. a. O., p. 105 und 113—114.

wir darin nicht bestärkt, wenn wir ihn auch ein Jahr später in der Gewalt desselben Irrthumes sehen, nämlich 1547 dem Datum seines zweiten Cartello, in welchem er aufrecht hält, er habe die Gleichung $x^3 + mx^2 = n$ fünf Jahre vor dem März 1539 gelöst, und folglich ein Jahr bevor er die Regel für die Gleichung $x^3 + px = q$ gefunden? Die Wichtigkeit dieser Fehler Tartaglias wird um so sichtbarer, wenn man beachtet, dass die Veröffentlichung der vorgenannten Quesiti und des Cartello ein respective zwei Jahre nach der Veröffentlichung der Cardanschen Ars Magna fallen. Wenn er auch damals nicht ein Wenig Acht hatte, sich nicht verbesserte, damals als er in dem Werke des Gegners: *„die Kunst der Auflösung der Gleichungen 3. Grades zu ihrer ganzen Ausdehnung „gebracht, eine neue Kunst in Betreff der Auflösung der Gleichungen 4. Grades „entdeckt“* gesehen hatte, *„gefolgt von hunderten von trefflichen Lichtblitzen, „welche die Natur der Gleichungen betreffen*, kurz, *die Regeln und neuen Kennt- „nisse in eine Theorie verwebt“* [1]), hat man da nicht Grund über ihn nachzudenken, über seine Anmassung der Erfindung des *Cubus et census aequales numero*, das genügt nicht, ebenso in Bezug auf seine Behauptung der Erfindung des *Cubus et latus aequales numero?* Ueber die Ungereimtheit jener kann ich meinerseits keinen Zweifel finden, der Stich hielte; über die Richtigkeit dieser, welche bis jetzt von Niemand in Zweifel gezogen ist, steigert sich mir jetzt der im Texte der gegenwärtigen Arbeit erwähnte Zweifel und Argwohn [2]). Ein Algebraiker, der uns versichert, er habe $x^3 + px = q$ gelöst, und der dann 12 Jahre hintereinander behauptet und aufrecht hält, dass er vor der Gleichung $x^3 + px = q$ die andere $x^3 + mx^2 = n$ gelöst habe, ohne jemals gewahr zu werden, dass er hier als allgemeine Lösung hinstellt, was davon sehr weit entfernt ist, und der in dem Irrthum beharrt ungeachtet der vielen Hinweise darauf, die ihm von anderer Seite kamen, gibt der, frage ich, Zeichen von Genauigkeit und Klarheit der Ideen in diesem Gegenstande, von richtigem Urtheil, Beweisfertigkeit, aber vor Allem von ursprünglicher Erfindungskraft zu dem grössern Unternehmen, eine Regel für $x^3 + px = q$ zu finden? Ich der ich durch hundert von anderswo hergenommene Beweise von seinem Geiste und hohem Wissen überzeugt bin, suche hierfür keine andere Antwort als diese: der erwähnte Zweifel und Argwohn ist begründet; man muss wirklich zweifeln, dass Tartaglia — *suo marte* — (um mit Wallis zu reden) diese Regel gefunden, man muss argwöhnen, dass dieselbe für ihn hinreichend aus der Disputation mit Fiore hindurchsickerte, oder aus uns verborgenen Mittheilungen, die er sich verschaffte, nachdem er gehört, dass sie existiere; dass er sie erfassen konnte und sich aneignen, ohne recht die speculativen oder rationellen Grundlagen zu kennen, ohne sie wirklich *als Erfinder* zu besitzen [3]).

Aber nein, würde sicherlich Cossali ausrufen, wenn er mich hörte, und würde sogleich folgendermaassen fortfahren: Lest, wie im Quesito 31, datiert vom 2. Januar 1539 [4]), Tartaglia selbst ein Urtheil spricht: „dass

---

1) Cossali, a. a. O., p. 129.
2) M. s. S. 149—150 und sonst.
3) M. s. den Text der Abhandlung S. 129, 149—150.
4) Tartaglia, a. a. O., p. 251; Cossali, a. a. O., p. 109.

„wenn Cardan eine gewisse Frage, die auf die Aufgabe von *res et cubus* „*aequales numero* führte, nicht lösen konnte, er *viel weniger* andere Fragen zu „lösen gewusst hätte, die *auf viel fremdartigere Capitel als das der cosa e cubo* „*equal a numero* führten"; — und zwei dieser Capitel waren bestimmt von der Form $x^3 + mx^2 = n$. Hört, wie er im Quesito 34 [1]) gegen Cardan einige Zeit, ehe er nachgab, ihm das berühmte Stück in Versen zu dictieren, ausspricht: „dass dieses gegen ihn so sehr den Bedürftigen in Bezug auf die einfache Regel für *res et cubus aequales numero* mache, sei deshalb, *weil sie ein* „*Schlüssel ist, der den Weg öffnet, um unendlich viele andere Capitel zu ent-* „*decken* —; und dass folglich, wenn er sie *einem beobachtenden Menschen lehre* „im Verein mit einigen neuen Capiteln, die er schon daraus abgeleitet habe, „dieser *leicht bei solcher Deutlichkeit andere Capitel finden könne (da es leicht sei* „*den schon gefundenen Sachen neue hinzuzufügen)*." — Endlich hört im Quesito 42, das ihm im Jahre 1541 von seinem Gevatter Wentuorth gestellt war, ihn der Hauptsache nach Folgendes aussprechen: „Die Auflösung der „Capitel von der Form $x^3 + mx^2 = n$ hänge nachweislich ab von der Auf- „lösung der Capitel von der Form $x^3 + px = q$, da jene *mit diesen verkettet* „*wären*" [2]). Ich glaube aber kaum, dass ich Etwas auf die Einwürfe zu antworten brauche, die hier gegen meine Meinung angeführt sind, und die man wirklich aus der Geschichte Cossalis an den vorher genau bezeichneten Stellen entnehmen kann. Dennoch wiederhole ich, dass man nicht aus dem Auge verlieren darf, dass Tartaglia die eben behandelten richtigen Ansichten auf die innigste Weise mit den vorher angeführten irrigen verbunden ein Jahr nach Veröffentlichung der Ars Magna Cardans veröffentlichte; dass er in letzterem Werke dieselben richtigen Ansichten wiedergefunden hatte, aber bei Weitem deutlicher und ausgedehnter, ausserdem durch strenge Beweise erläutert, durch darauf folgende Regeln und durch sehr glücklich gewählte Beispiele; dass er also die *wiederholt genannten richtigen Ansichten* aus diesem Werke entnommen haben kann; und dass dies endlich noch dadurch bedeutend wahrscheinlich gemacht wird, wenn man sie von ihm mit den Irrthümern, die ihnen widersprechen, vermischt wiedergegeben sieht.

Aber das letzte Argument Cossalis, das man gleichsam sein Schlachtross nennen könnte in dem Kampfe, dass der Brescianer Algebrist wirklich dazu gelangte, die Gleichung $x^3 + mx^2 = n$ im Jahre 1541 oder kurze Zeit vorher zu lösen [3]), aber nicht im Jahre 1530 oder 1534, wie er sich anmaasst, und dass er dazu auf rationellem Wege gelangte, das heisst, indem er den bis dahin unbekannt gebliebenen Kunstgriff [4]) entdeckte, die Gleichung von dem Gliede zu befreien, welches das Quadrat der Unbekannten enthält, indem er sie in die andere Gleichung $z^3 = pz + q$ dadurch verwandelte, dass er $x = z - \frac{1}{3}m$ setzte, das letzte Argument, sagte ich, ist folgendes: „dass *die Form, unter der* „*Tartaglia* seinem genannten englischen Edelmann und Gevatter Wentuorth

1) Tartaglia, a. a. O., p. 265; Cossali, a. a. O., p. 116.
2) Tartaglia, a. a. O., p. 281; Cossali, a. a. O., p. 127—128.
3) Cossali, a. a. O., p. 165 u. ff.
4) Cossali, a. a. O., p. 105—106 und 113—114.

„*die Auflösung der Gleichung* $x^3 + 6x^2 = 100$ *mittheilte*, klar macht, *dass er* „wirklich *den* erwähnten *Kunstgriff entdeckt hatte. In der That*, fügt Cos- „sali hinzu, *setzt man* $x = z - \frac{1}{3}.6 = z - 2$, *und substituiert den Cubus und* „*das Quadrat von* $z - 2$ *in die Gleichung* $x^3 + 6x^2 = 100$, *so findet man* „$z^3 - 12z + 16 = 100$, *das heisst* $z^3 = 12z + 84$; *eine Gleichung, welche das* „*Quadrat* z^2 *der Unbekannten nicht mehr enthält, und deren Auflösung .... ist:*

$$z = \sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}};$$

„*und hieraus:*

$$x = z - \tfrac{1}{3}.6 = \sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}} - \tfrac{1}{3}.6,$$

genau so wie sie Tartaglia dem Wentuorth angab [1]). Wir theilen sofort die Originalstelle Tartaglias mit, die Cossali commentiert: „*Trovatime*" (das ist die Frage, die Tartaglia seinem Gevatter Wentuorth in den Mund legt) „*una quantità che multiplicata fia* (= via, per, mit) *la sua R.* (Quadrat- „wurzel), *più 6, faccia aponto 100. Onde ponendo tal quantità sia un censo*, „*la sua R. saria una cosa, alla quale giontovi 6, faria 1.cosa più 6, qual* „*multiplicandola fia 1.censo, faria 1.cubo più 6.censi, et questo saria egual* „*a 100.*" Die ganze Frage reduciert sich auf die letzten Worte, nämlich löst mir die Gleichung *1.cubus plus 6.censi aequales 100*, das heisst, wenn man die *res* gleich x setzt, $x^3 + 6x^2 = 100$. — „*In questo caso*" (so lautet die ganze Antwort Tartaglias) „*la cosa valeva:*

$$\sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}}$$

„*men el terzo di censi, cioè men 2.*" [2]) — Ich habe denjenigen Theil des Werthes von x mit unsern Symbolen ausgedrückt, welcher im Originale nicht leicht von denen verstanden werden würde, die nicht einige Uebung in der undeutlichen Bezeichnungsweise der Alten haben. Jenes *men el terzo di censi, cioè men 2* zeigt wirklich, dass der Werth der Unbekannten in der Gleichung $x^3 + 6x^2 = 100$ aus dem Werthe der Unbekannten einer andern Gleichung erhalten wird, wenn man diesen um den dritten Theil von 6, der Anzahl der Census, vermindert; dass man also vorläufig $x = z - \frac{1}{3}.6 = z - 2$ setzt, indem man die neue Unbekannte z nennt: daraus alles Uebrige wie bei Cossali. Man kann also dem Argumente desselben eine grosse Wahrscheinlichkeit nicht absprechen, man kann nicht sagen, dass, wenn man nur auf dies eine Beweismittel sieht, dasselbe seiner Angabe widerspräche. Er täuschte auch Franchini, der es deshalb vollständig aus Cossali aufnahm, indem er schrieb: „*Wir* „*schliessen mit der Bemerkung, dass Tartaglia um seine Arbeiten über die Glei-* „*chungen des 3. Grades zu vollenden, die Methode erfand, sie von dem 2. Gliede* „*zu befreien. In der That, als ihm von Wentuorth die Gleichung* $x^3 + 6x^2 = 100$ „*vorgelegt war, gibt er um* x *auszudrücken dieselbe Formel, die man erhält, wenn* „*man* $x = z - 2$ *setzt, und die Transformierte nach* z *auflöst.*" [3])

---

1) Cossali, a. a. O., p. 157—158, 127—128, 125.
2) Tartaglia, a. a. O., Quesito 42, datiert von 1541, p. 280.
3) Franchini, Storia dell' Algebra, p. 46—47.

Ich glaube aber, mit gebührender Achtung vor den beiden berühmten italiänischen Mathematikern, dass der angeführte Grund der hinfälligste von Allen ist. Man öffne die Ars Magna; *„jenes ausgezeichnete Werk*, sagt ebendaselbst Franchini, *„das immer ein Denkmal des Ruhmes für die italiänische „Mathematik bleiben wird, zum Verdrusse der Schriftsteller des Nordens, die seine „ansehnlichsten Zierden verheimlicht haben, um daraus einigen langsamen vater- „ländischen Geometern Kränze zu flechten“;* man öffne sie bei dem Cap. XV. betitelt *„De cubo et quadratis aequalibus numero“*, indem man von den vorhergehenden Capiteln und den Eingängen absieht (die so grosse und scharfsinnige Lehren enthalten, dass sie auch heute noch Staunen erregen), indem man vor Allen vom Cap. VII. *De capitulorum transmutatione* absieht (in demselben liest man an erster Stelle einer gewissen typischen Transformation, — *„si cubus et „quadratum aequantur numero, convertetur capitulum in cubum aequalem rebus et „numero“*); und indem man in dem eben ausgewählten Capitel XV. von der *Demonstratio* absieht, mit welcher dasselbe beginnt, und die über die Gründe der Behandlung und Auflösung auf allgemeinem Wege handelt, immer auf die strenge geometrische Weise angedeutet; auch abgesehen von dem ersten Theile der folgenden *Regula*, welche die allgemeinste Regel oder Auflösungsformel des *cubus et quadrati aequales numero* enthält; in Summa, indem man sich allein auf das erste numerische Beispiel der *Regula* beschränkt: *„Cubus et 6 quadrata“*, liest man darin, *„aequantur 100: duc 2 ad cubum, fit 8; duplica, fit 16; abijce „ex 100; habebis cubum aequalem 84 plus 12 rebus; sunt autem 12 res, triplum „quadrati 2, tertiae partis 6, numeri quadratorum; res igitur est, ex Cap. 12., . . .*

$$\sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}};$$

„ab hoc abijce 2, tertiam partem 6: erit rei aestimatio quaesita, quando cubus „et 6 quadrata aequantur 100, haec . . . .

$$\sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}} \textit{ minus } 2.“$$

Man würde es nicht glauben, wenn man es nicht mit Händen griffe, dass Cossali diese Stelle des Cap. XV. der Ars Magna mit geschlossenen Augen übergangen hätte (ein Capitel das er selbst in ausgezeichneter Weise commentiert, und dessen allgemeinen Theil er in unsere Symbole überträgt [1])): wie ihm die augenfällige Bemerkung von der vollständigen Identität des Cardanschen Exempels mit dem speciellen Capitel der gegebenen Gleichung $x^3 + mx^2 = n$, die Tartaglia für Wentuorth löste, entgangen sein konnte?, und wie er verschweigen konnte, dass die Form, unter welcher von Tartaglia der Werth der Unbekannten gegeben wurde, in welcher Angabe seine ganze Auflösung besteht, und in welcher Form allein der Grund für das Verdienst liegt, das man ihm zuschreiben mögte, identisch die Form des Werthes der Unbekannten des grossen Cardan ist, die dieser nicht blos angibt, sondern in seinem Beispiele beweist? In der Art, dass der Brescianer Mathematiker, um bei der

1) M. s. Cossali, a. a. O., p. 163, Distinzione 5a.

Nachwelt, nach der Meinung Cossalis, den herrlichen Ruhm zu erlangen, um den es sich handelt, nichts Anderes zu thun gebraucht hätte, als die letzte Zeile des genannten Exempels buchstäblich abzuschreiben; den ganzen Rest dieses Exempels schenkt ihm der Schutzredner. Aber soviel steht fest, die Identität beider Exempel, das eine veröffentlicht mit der Ars Magna im Jahre 1545, das andere mit den Quesiti et Inventioni diverse im Jahre 1546, eine Identität, die man nicht als zufällig annehmen kann, ist für denjenigen von beiden Schriftstellern verhängnissvoll, der zuletzt drucken liess. Und ich, der ich in der vorhergehenden Anmerkung mein Möglichstes that, um ihn von der Anklage zu befreien: — „*vivens alienis laboribus, et fur manifestus alieno*— „*rum studiorum etc.*", welche zwei- bis dreimal von den Gegnern ihm zugeschleudert wird, aber bei einem andern Gegenstande, hier weiss ich nicht, wie ihn vertheidigen. Und soviel steht ferner fest, der Ursprung aller Voreingenommenheiten und aller Täuschungen Cossalis zu Gunsten Tartaglias und zum Schaden Cardans war folgender: dass er entweder zu beachten vergass, oder nicht genügend beachtete, dass die Quesiti et Inventioni diverse alle zusammen in dem vielerwähnten Jahre 1546 herauskamen und nicht schon in den Jahren, die der Verfasser beisetzte. Diese Auslassung, die in Nichts die ausgezeichneten Gaben Cossalis als Mathematiker aufhebt, führte ihn von Folgerung zu Folgerung, zu einer nicht geringen Abweichung von der historischen Wahrheit auch unter andern Gesichtspuncten, und dazu, dass er sich in verschiedene Arten von Widersprüchen verwickelte. Ich will nicht die Beweise anführen, die mich jetzt von meinem Thema abbringen würden, die aber vielleicht ein anderes Mal gelegener kommen werden. Ich will auch anführen, dass andere Geschichtsschreiber, welche den Gegenstand vor diesem hochberühmten Professor behandelten, indem sie die Thatsachen weniger genau tractierten als er, *anderswo* oberflächlich, ungenau, parteiisch u. s. w. waren (alles das sagt er über seine Vorgänger), aber *hier* erfassten sie, meiner Meinung nach, die Sachen viel besser als er. So ging es z. B. mit Wallis und Montucla. Indem sie dem Rechnung trugen, was man in vollster Offenheit in den Werken Cardans und Tartaglias sieht, dem, was wirklich ist, ohne allzu sehr zu suchen, zu divinieren und zu supplieren, was da nicht ist, und wovon wahrscheinlich nur ein geringer Theil durch den Geist derselben ging, standen sie auf sicherem Grunde, belohnten jeden nach seinem wahrscheinlichen, wenn nicht unerschütterlichen Verdienst; sie drückten nicht den Einen herab, um in der Uebereilung gesuchter Conjecturen den Andern zu erhöhen. Und endlich in Betreff des zweiten der genannten Historiker (dessen, gegen welchen Cossali wahrhaft unerbittlich ist — „*impitoyable Cossali*" entschlüpft seiner Feder!), weit entfernt dass man, wie es Professor Cossali immer wollte, *staunte* ein gewisses Urtheil desselben über die Ansprüche Cardans und Tartaglias an die so oft genannte Erfindung *zu hören*, zeigt er sich sogar hinreichend genau und unparteiisch; es ist vielleicht das Beste, was man vorbringen kann, wenn man nicht Ferro zum Vergleiche herbeizieht, das heisst das Anrecht dieses an derselben Entdeckung mit der fahrlässigen Kargheit Aller abwägt. Auch bin ich nicht in Zweifel in Betreff dieses Gegenstandes wie Cossali, ob der vorgenannte Dialog, der von Tartaglia zwischen seinem Gevatter Wentuorth und sich selbst eingeführt wird, unter die Hände

Montuclas gefallen sei, oder nicht; ich glaube vielmehr, dass wenn ihn Montucla gesehen hat, er sich nicht versehen hat, wie ein Anderer.

Aufmerksam, wie ich es gewesen bin bis zum Scrupel (oder wie ich es wenigstens zu sein bemüht gewesen bin), das Pro und Contra in Bezug auf jeden zweifelhaften oder streitigen Punct des historischen Stoffes zu suchen und zu sagen, den ich unter den Händen habe, mögte ich hoffen, in jeder Beziehung die Parteilichkeit vermieden zu haben; auch in Bezug auf Scipione Ferro, zu Gunsten dessen mein Widerstandsvermögen gegen dergleichen Versuche mehr als leicht hätte fehlen können. Mir sind ferner die Schwierigkeiten, welche hie und da meine Schlüsse und Conjecturen, die ich vorgetragen, erleiden könnten, nicht verborgen. Auf dergleichen trifft nothwendigerweise jeder, welcher die Discussion eines alten geschichtlichen Themas wieder aufnimmt, das schon streitig ist, obgleich er die Hilfe mancher neuen Notiz benutzt. Bei dem Lichte derselben verschwinden gewisse Dunkelheiten des Thema, aber neben den verschwundenen entstehen andere wegen des Ungenügenden des neuen Lichtes. Das Beste, was man in ähnlichen Verlegenheiten thun kann, ist nicht etwa, die Vernunft zu zwingen, das Licht der Gewissheit zu geben, das ohne weitergehende Kenntniss nicht erreichbar ist, sondern sie vielmehr verständig dazu zu benutzen, bis zu dem begrenzten erreichbaren Ziele die entstandene Dunkelheit aufzuhellen. Daher kommt es, dass die Urtheile der einfachern, oder augenblicklichen Kritik oft viel mehr mit der Wahrheit, welche das weitere Studium des Gegenstandes nur nach und nach erobern lässt, in Uebereinstimmung sind, als die der künstlichen und ausgearbeiteten. Ich kann in Wahrheit behaupten, dass dies in dem Studium meines Gegenstandes eingetreten: je mehr ich vorgeschritten bin mit den Untersuchungen, mit den Vergleichungen, mit den Schlüssen, die sie betrafen, um so mehr erweiterten sich die Eingebungen der ersten leichthin gemachten Kritik, und fanden Bestätigung. Ich hege das Vertrauen, dass jeder darin mit mir einig sein wird, wer es auch sei, der es für werth gehalten hat, vollständig — Text, kurze Anmerkungen, lange Anmerkungen, diese sehr langen Anmerkungen — diese meine zu verschiedenartigen Materialien zu lesen. Ich will aber dafür noch einen neuen Beweis liefern. Es ist sicher, dass unter den genannten Vermuthungen diejenige sehr einleuchtend ist, anzunehmen, dass die Erfindung Ferros von Bologna auch noch auf andere Wege und auf andere Weise ausging als auf die beiden jetzt bekannten, der Disputation Fiores und der Mittheilung des Werkes von Ferro selbst, die sich Cardan und Ferrari verschafften [1]); es ist höchst wahrscheinlich, dass die Erfindung selbst oder wenigstens die betreffende Regel, eine Reihe von Jahren bevor Cardan und Tartaglia die Ars Magna und das Libro Nono delli Quesiti et Inventioni diverse publicierten, viel ausgedehnter bekannt war, als man aus den Schriften dieser Herren entnehmen sollte, beide in diesem Puncte die Wahrheit zu verbergen besorgt, zu ihrem grössern Ruhme und zur Bewahrung ihres guten Namens. Daraus entsprang ein Argwohn: dass nämlich Tartaglia selbst, und zwar eher als der Gegner und unabhängig von den freiwilligen oder unerwarteten Mittheilungen

---

1) M. s. oben S. 126; 149.

Fiores Etwas von der Originalerfindung des bologneser Algebristen hätte erreicht haben können, wenn auch nicht alles das, was er davon sein vollständiges Eigenthum nannte. Wir haben im Verlaufe der Schrift gesehen und sehen jetzt noch besser aus dem Inhalte gegenwärtiger Anmerkung verschiedene wohlbegründete Schlüsse zur Unterstützung dieses Argwohns kommen. Es könnte aber scheinen, als ob man diesen Schlüssen den Fehler, zuviel zu beweisen, vorwerfen könnte; weil es zu weit gehe, was man in Bezug auf diesen verlange, dem Tartaglia selbst das wegzunehmen, was der Gegner ihm zur Zeit der Ars Magna zusprach, nämlich die Wiederentdeckung der Regel und eines geometrischen Beweises derselben. Jeder Schein solcher Art fällt aber ganz sicherlich bei der augenscheinlichen Ueberlegung der vielen Beweggründe parteiischer Rücksichtsnahme, die in jener Zeit Cardan dem Tartaglia schuldete und sicherlich gegen ihn beobachtete, weil sie durch das gewichtige Interesse seines eigenen Decorums unterstützt wurden; Beweggründe, die ich mich hier anzuführen nicht aufhalte, da sie klar und offen aus verschiedenen Stellen meiner Schrift entspringen. Hier ist nun das, was zur Bestätigung von Alledem dient und den versprochenen neuen Beweis bildet. Es ist eine Periode aus dem sechsten Cartello Ferraris, die ich nicht eher als jetzt, wo ich bei den letzten Zeilen meiner Arbeit bin, bemerkt habe; ich werde den Abschnitt aus dem ganzen Passus, dem er angehört, durch fettere Schrift hervorheben; ich theile die Stelle mit, nicht weil sie so in ihrer Ganzheit uns dient, sondern weil sie dazu nützen wird, immer mehr den Geist der Cartelli erkennen zu lehren und vielleicht die Richtigkeit der Absicht, sie vollständig durch den Druck zu reproducieren[1]). Um ferner besser das Ganze zu verstehen, muss der Stelle Ferraris die Stelle aus der Quinta Risposta des Tartaglia vorausgeschickt werden, auf die jener sich bezieht; da ist sie: „*Ma piu non me* „*posso io avantare con verita non solamente voi signor Hieronimo* (d. i. Cardan) „*esser stato mio Discipulo, ma discipulo de dui mei Discipuli, della qualcosa* „*niuna persona si puo gloriar di me? Che voi siati stato mio discipulo non me* „*accade a provarlo, da poi che nel principio della vostra Arte magna, (per* „*acquietarmi de havermi mancato alla promessa fatta con giuramento) non sola-* „*mente lo confessati, ma anchora a carte 16. lo rettificati et narati di quanta* „*importantia siano le dette particolarita, che vi ho insignate, et chel sia el vero* „*qui pongo le vostre parole precise. Cum autem intellexissem Capitulum, quod* „*Nicolaus Tartalea mihi tradiderat, ab eo fuisse Demonstratione inventum Geo-* „*metrica cogitavi eam viam esse regiam ad omnia capitula venanda, etc.*[2]). *Et* „*così per la virtu et proprieta de tal mia inventione, et per le cose che da quella* „*derivano haveti formata tal opra credendovi per la nobilita della detta mia in-* „*ventione de farve ambidui* (d. i. Cardan und Ferrari) *immortali, et per* „*questa avidita non ve seti curato della fede vostra a me impegnata.*“[3]) — „*Altro di stravagante* (so antwortet nun Ferrari auf der zweiten Seite seines „*sechsten Cartello*) „*non aviso io che vi sia da farvi risposta, che quantunque* „*habbiate scritto che 'l Signor Hieronimo vi lodi in una delle sue opere, questo*

1) Man sehe oben S. 133—134.
2) M. s. oben S. 144.
3) Seite 3 der Quinta Risposta ecc. des Tartaglia.

„*a me non tocca, se non inquanto voi vi dannate da voi stesso.* **Atteso, che „potendo il Signor Hieronimo attribuire quel capitolo al primo „inventore, cioè a messer Scipione dal Ferro Bolognese, et oltre „lui, anchora a messer Antonio Maria di Fiore, il quale voi con- „fessate nel vostro libro che lo sapeva prima di voi, nondimeno, „egli è stato sì cortese, che vi ha voluto credere, che lo habbiate „trovato anchor voi, senza haverlo ricevuto da alcuno di loro, o, „da loro scolari, et vi ha celebrato insiememente con amendue loro.** „*Et voi in vece* **di questo beneficio:** *di quegli, che io vi ricordai nel mio secondo „Cartello: et di molti altri ch' io ne posso far testimonio: havete fuor di propo- „sito scritto di sua Signoria sì villanamente, che parete esser impazzito. Ma io „mi godo, che l' humanità, la vertù et la dottrina di sua eccellenza è sì nota a „tutto il mondo, che addoso di voi ricade la ignominia di questo sì gentil guider- „done. Oltre a ciò, quando pur alle giudiciose et alte sue orecchie pervengano „alcune di queste vostre maligne et invidiose parole, si havrà egli da allegrare, „che sia detto mal di lui da un vostro pari. Perciò che le lodi, che vengono „dalla integrità de buoni: et i biasmi, che vengono dalla malvagia invidia de rei, „vogliono ugualmente, et si debbono spendere per una medesima moneta. Et tanto „sia brevemente detto, per rintuzzare la naturale vostra maledicenza, alla quale „quando io, uscendo della natural mia modestia, volessi rispondere, come si richie- „derebbe a voi, io farei chiaro al mondo, che voi siete huomo, piu per udir male, „che veramente vi si puo oporre, che per dirlo d'altrui con false inventioni come „havete fatto.*“ — Bei der Lectüre dieses Passus muss man in der Schreibart des Verfassers, die von uns schon bei der Mittheilung verschiedener Stellen der seltenen Cartelli gelobt ist, ausser dem wichtigen Inhalt, den höchst empfehlenswerthen Schmuck einer gebildeten Sprache anerkennen. Sicherlich hat sich also auch in diesem Puncte, dass er nämlich mit grosser Leichtigkeit die Schönheit der Sprache erreichte, der hilfreiche Geist Cardans bei der Abfassung der Ars Magna, der erste Löser der biquadratischen Gleichungen, um seine Nation wohl verdient gemacht und nachahmenswerth für die mathematischen Schriftsteller seiner Zeit, die Cosimo Bertoli, die Danti, die Spini, die Bombelli und die andern, welche wirklich mit Eigenthümlichkeit und selbst mit Eleganz ihre Werke in der Vulgärsprache abfassten. Die Werke einiger von ihnen wurden später durch die schwer zu erlangende Erwähnung durch die Accademia della Crusca geehrt. Mit viel mehr Grund würde diese Ehre den Ferrarischen Cartelli gebührt haben, wenn nicht bei den Litteraten wie bei den Mathematikern dasselbe strafbare Geschick sie fast augenblicklich erreicht hätte.

Grosses Glück wäre es gewesen, wenn Libri in seiner weitberühmten Geschichte verweilt oder sich weiter verbreitet hätte über das specielle Thema des hauptsächlichsten Streitpunctes, der soweit möglich in dieser Anmerkung klar gelegt ist. Wir haben, glaube ich, gesehen, dass er in Bezug auf diesen Punct von Cosali abweichender Meinung ist, wie wir es auch in Bezug auf andere historische Puncte der ersten Auflösung der cubischen Gleichungen gesehen haben. Und ich gebe mich diesem Glauben hin, wenn man auch aus dem Wenigen, was der hochberühmte Schriftsteller in Betreff des vorgedachten

Thema ausspricht, wirklich grade das Gegentheil herleiten zu können glauben möchte; denn es könnte scheinen, dass er Tartaglia noch viel weitergehende Zugeständnisse machte als Cossali. Ich beziehe mich hier auf zwei Stellen des Textes auf S. 152 und 153 des dritten Theiles der Histoire des Sciences Mathématiques en Italie. Aber jeder der die zweite Anmerkung auf S. 152 dieses Werkes und desgleichen die zweite Note der S. 149 abwägt (man muss sie erwägen, indem man sich der neuhinzugekommenen Thatsachen bedient, die wir in gegenwärtiger Note in klares Licht zu stellen suchten), der wird, ich mögte daran nicht zweifeln, die Richtigkeit meiner ausgesprochenen Hoffnung einsehen.

Ich schliesse mit einer Bemerkung, die, hoffe ich, mir auch eine gute Entschuldigung für die so grosse Länge der vorliegenden Anmerkung, sowie des zweiten Theiles der Abhandlung gewährt. Von den beiden Mitbewerbern des Scipione Ferro, welche die langsame, wenig eifrige oder ein wenig phantastische Geschichte aufgefunden hat, war der furchtsamste, für jemand der an seiner Rechtfertigung arbeiten will, unzweifelhaft Nicolò Tartaglia, nachdem erst die Thatsache des Libellum manu Scipionis Ferrei etc. wiedergefunden war —; denn die Thatsache betrifft nur allein den andern Mitbewerber und nur am Ruhme dieses nimmt der Bologneser Algebrist Theil. Folglich gereichte die Wiederherstellung der guten Gründe Cardans, das aus dem Wege Räumen der weniger als gerechten Pretensionen, die dem Tartaglia zugestanden wurden, in doppelter Weise zur Ehrenrettung für Ferro.

Damit man sehe, welcher Auslese von trefflichen Männern die Cartelli mitgetheilt wurden, und auch weil diese genau dem Namen nach und nach den verschiedenen Städten, in denen sie zur Zeit sich aufhielten, als die Cartelli an die Oeffentlichkeit gelangten, zu kennen, zur Wiederauffindung einiger Exemplare derselben beitragen kann, habe ich mich entschlossen hier das Verzeichniss der erwähnten Männer mitzutheilen, das sich in dem ersten Cartello Ferraris befindet und zwei Blatt von den vier Blättern einnimmt, die dasselbe bilden.

„*IN ROMA.*"

„Illmo et Revmo Monsignore Cardinal *Sfrondato;* Revmo Monsignor *Phi-* „*lippo Archinto;* Illmo Sign. Don *Diego di Mendozza;* Molto Magnifico Sign. „*Latino Invenal;* Revndo Sign. *Alessandro Piccolhomini;* Sign. *Georgio Philandro*; „Sign. *Luca Gaurico;* Sign. *Ludovico Luceio.*"

„*IN VENETIA.*"

„Illustre et molto Revndo Sign. *Gabriel Tadino;* Clarissimo Cav. Sign. „*Dominico Moresino;* Clarissimo Sign. *Bernardo Navagiero;* Clarissimo Sign. „*Marco Antonio da Mula;* Magnifico Sig. *Vincentio Fedel;* Eccellente Sign. „*Triphone Gabrieli;* Magnifico Sign. *Gio. Battista Ludovici;* Sign. *Hieronimo* „*Negro;* Sign. *Gio. Bernardo Feliciano.*"

„*IN MELANO.*"

„Illmo Sign. *Benedetto Rhamberti;* Illmo Sign. *Nicolò Secco;* Magnifico „Sign. *Bernardo Spina;* Revndo Sign. *Bonaventura Castione;* Magnifico Sign. „*Hieronimo Firenza;* Magnifico Sign. *Philippo Rainoldo;* Eccemo Sign. *Gio. Am-* „*brosio Cavenago;* Eccente Sign. *Gio. Angelo Candiano;* Eccente Sign. *Gio. Luca* „*dalla Croce;* Eccente Sig. *Francesco d'Arluno;* Sign. *Cabrio da Caravazzo.*"

„*IN FIRENZE.*"

„Revndo Sign. *P. Francesco Gianbullari;* Magnifico Sign. *Carlo Fei;* „Sign. *Christoforo de Donini;* Sign. *Josefo de Tani.*"

„*IN FERRARA.*"

„Eccente Sign. *Antonio Brasavola;* Sign. *Jason Fortuese.*"

„*IN BOLOGNA.*"

„Magnifico Sign. Cav. *Achille Bochio;* Eccente Sign. *Ludovico Vital;* „Sign. *Hannibal dalla Nave;* Sign. *Nicolò Simo.*"

„*IN SALERNO.*“

„Sign. *Mattheo Mancino.*“

„*IN PADOVA.*“

„Eccemo Sign. *Marco Antonio Genua;* Magnifico et Eccente Sign. *Sperone* „*Speroni;* Eccemo Sign. *Lazaro da Bassano.*“

„*IN PAVIA.*“

„Eccemo Sign. *Andrea Alicato;* Eccente Sign. *Branda Porro;* Sign. „*Ottaviano Ferraro.*“

„*IN PISA.*“

„Eccemo Sign. *Simon Portio;* Sign. *Antonio Lapini;* Revndo frate *Giovanni* „*Carmelitano;* Sign. *Sonzino Benzo.*“

„*IN VERONA.*“

„Eccemo Sign. *Hieronimo Fracastoro.*“

Man bemerke, dass aus einigen Stellen der Cartelli hervorgeht, dass diese in viel mehr Städte gesandt und an viel mehr Personen vertheilt wurden, als es aus dem mitgetheilten Verzeichniss erhellen würde: auf Seite neun des Quinto Cartello Ferraris liest man zum Beispiel Folgendes: „*vi sono* „*diversi Gentil'huomini in Milano, che ne hanno mandato* (nämlich von den Car- „telli) *a soi e miei conoscenti in Napoli, in Roma, Mantoa, Firenze, et altri* „*luoghi . . . i Cartelli publicati* (soll heissen divulgati) *in Padoa, tutti gli ho* „*mandati io con mie lettere all Eccellentissimo Signor Marco Antonio Genua,* „*il qual (per sua cortesia e gentilezza) gli ha distribuiti alle persone virtuose,* „*come io nelle mie lettere il pregava, ecc. . . .*“

Um nun zu verstehen, welche Art von Oeffentlichkeit Ferrari selbst für die mathematische Disputation, zu der er Tartaglia aufforderte, gewünscht, sogar gewollt hatte, dienen ohne Weiteres die folgenden Sätze, welche ich aus Seite 7—8 des lateinischen Cartello auszüglich mittheile: „*Propono quatuor* „*urbes aeque commodas* (als Orte der öffentlichen Disputation) . . ., *Romam* „*civitatum omnium praestantissimam, Florentiam, Pisas et Bononiam, in quam* „*propter concilium ibi futurum scientissimi viri undique confluent . . . De iudicibus,* „*nulla erit controversia, modo contentus sis his, qui in urbe constituta doctiores,* „*et in mathematicis peritiores habebuntur.*“

Endlich will ich auch noch die Namen der unterschriebenen Zeugen, drei an Zahl für jedes Cartello, mittheilen. Diejenigen, welche man in den verschiedenen Cartelli Ferraris findet, sind: *Benedetto Rhamberti; Nicolò Secco; Mutio Iustinapolitano; Benedetto Pecchio; Giacomo Pirovano; Filippo Rainoldo;* und *Bernardo Spina.* Jene dagegen, welche in den Cartelli des Tartaglia erscheinen, sind: *Paulo Marescotto; Mario Nizolio; Tiberio Scardoa; Annibale Raymondo; Michele Tramezzino (libraro alla insegna della Sibilla); Dominico q. Donato Cantor; Agustino Bindoni (stampatore); P. Joseph Rodella, Carpenedulense, Brisciano; Joseph Cigola; Bernardino Piegabosco ditto del mangano;* und *Lucio de Alenis.* In mehreren der Cartelli des einen und des andern

streitenden Theiles wird ein gewisser *Ottaviano Scotto*, Buchdrucker, genannt; aber nicht als Drucker irgend eines Cartello [1]), sondern vielmehr als Depositar des Geldes, welches von beiden Theilen vor der Disputation als Preis für die siegende Partei nach dem Vorschlage Ferraris ausgesetzt werden musste, der in folgenden Worten des ersten Cartello enthalten ist: „*Et acciò che non vi* „*rincresca fatica o spesa mi offerisco di giucar, et deporre quanti danari vorrete* „*deporre anchor voi, infino alla somma di 200 scudi, acciò che il vincitor ac-* „*quisti l'honore, non con danno suo, ma piu tosto con avantaggio.*" [2]) Und mit diesen Worten des herrlichen Geistes, der mit Ferro das Vaterland gemein hatte, seine Erfindungen vertheidigte und erweiterte, ist es mir erwünscht, der Arbeit ein letztes Ende zu setzen.

Zu Anmerkung 2) auf S. 69—70.

Als ich vor einem Jahre den kurzen Zusatz zu der ebengenannten Anmerkung niederschrieb, welchen man am Ende derselben liest, hatte ich das kleine Monument auf Cavalieri in der Kirche der Parochie della Mascarella noch nicht gesehen, auf welches sowohl die ursprüngliche Anmerkung als auf ein *Project*, wie der Zusatz selbst als auf ein *Fait acompli* sich bezogen. — Bei einer günstigen Gelegenheit aber, das Monument zu besuchen (das nicht blos aus dem alten *Denkstein* und der *neuen* Inschrift, welche in der genannten Anmerkung erwähnt sind, besteht, sondern ausserdem aus einer schönen darüber angebrachten Büste des grossen *Jesuaters* — was nicht mit *Jesuit* verwechselt werden darf), die sich mir vor wenigen Wochen darbot, fiel mir sogleich ein Widerspruch zwischen dem *historischen Datum* und meiner Schrift sowohl als der des trefflichen Piola auf; ein Widerspruch, den ich nicht umhin kann hier anzuerkennen und zu erklären, da mir durch die Güte des Herrn Prof. Grunert eine Neuausgabe der Arbeit ermöglicht ist. — Die moderne Inschrift des kleinen Monuments setzt gleich zu Anfang „*An. MDCCCXXXXIII*" als Datum der Aufrichtung desselben fest; während ich im Jahre *1844*, in dem ich der Akademie zu Bologna meine Materialien vortrug, und im Jahre *1846*, in dem sie die Presse verliessen, behauptete und festhielt, das Monument *sei noch nicht aufgerichtet*, sondern noch völlig *Project* geblieben: das Nämliche wiederholte meinen Informationen folgend, der berühmte Piola in seinem bewundernswerthen Elogio auf Cavalieri [3]); dass ich an demselben in gewisser wenn auch unscheinbarer Weise durch meine Notizen und Aufklärungen, und meine zufällig gesammelten und dem berühmten Schriftsteller mündlich und schriftlich

---

1) M. s. S. 123 und 136.
2) M. s. das erwähnte Cartello Seite 3.
3) Elogio di Bonaventura Cavalieri ecc. Milano 1844, p. 76—77.

mitgetheilten Documente habe beitragen können, schätze ich und werde es immer als eine grosse Ehre und Befriedigung schätzen. Die Wahrheit zur Aufhellung des Widerspruchs ist so kurz als möglich und alles Specielle und Ueberflüssige weglassend Folgendes: „Das Project, das Monument wieder aufzurichten, welches ungefähr *1840* kurz nach der Wiederauffindung des alten *Denksteins* gefasst war, sollte im Jahre *1843* bei der feierlichen Gelegenheit eines Hochamtes in der dortigen Parochie und Kirche della Mascarella ausgeführt werden; wegen wichtiger, aber zur Zeit unüberwindlicher Schwierigkeiten wurde die Aufrichtung auf spätere Zeit verschoben; unterdessen starben bald darauf drei von den Herren Bianconi, den Mitpatronen der Kirche, denen die Sache vorzugsweise am Herzen lag: der eifrigste von ihnen, Gian Battista, Doctor der Philosophie und Mathematik, ein Jüngling von sehr guten Studien auch in der angewandten Physik, mein theurer Schüler, starb im Jahre *1847;* aber der Ueberlebende von ihnen, Gian Giuseppe, der als Professor und Schriftsteller in den Naturwissenschaften mit Recht berühmt ist, kam im Jahre *1853* bei der zehnten Wiederkehr des vorerwähnten feierlichen Hochamtes dem heissen Verlangen des verstorbenen Bruders Gian Battista nach, indem er das mehrerwähnte Monument völlig auf seine eignen Kosten ausführen und aufstellen liess, und indem er in der ganz in Marmor gegrabenen Inschrift das ganze Verdienst jenem zusprach, und durch diesen liebevollen brüderlichen Gedanken bewogen erlaubte er sich das *neue* Datum *1853* der unzweifelhaften wirklichen Aufstellung mit dem Datum *1843* zu vertauschen, in welchem dieselbe nach allen von dem beklagten Bruder getroffenen Dispositionen hätte stattfinden müssen.

Da ich nun einmal zu dieser geringfügigen Specialität gekommen bin, glaube ich, sie werde günstiger aufgenommen werden, wenn ich zum Schlusse dieses Zusatzes sowohl die alte Inschrift des *Denksteins*, als die *neue* Inschrift mittheile, wie sie auf dem vielerwähnten Monument des grossen Cavalieri zu lesen sind. (Auf ihn findet sich in dem alten *restaurierten* Archigymnasium zu Bologna auch nicht ein einziges Wort, nicht ein einziges Zeichen, das auf ihn hinwiese, wie sich gleicherweise Nichts findet über Novara, (Copernicus), Ferro, Pacioli, Cardan als Mathematiker — als Arzt, denke ich, ist es der Fall —, Ferrari, (Bombelli), Cataldi u. s. w.)[1]) Die alte Inschrift lautet:

---

1) ***Povera e nuda voi Geometria!*** rief mit mir eines Tages der berühmte Forbes aus, als wir bei einem gemeinsamen Besuche des Archigymnasiums die wirklich bewundernswürdige Flucht von 12—15 prachtvollen Sälen in vollkommen gerader Linie durchwanderten und die Augen auf die Tausende von verschiedenen Inschriften auf den Wänden richteten, die zum grössten Theile über ganz obscure Namen waren, ohne auch nur den Namen eines einzigen Mathematikers zu finden. Wenn auch die Vernachlässigung der mathematischen Studien in alter Zeit, die hieraus hervortritt, vielleicht aus gewissen Specialgründen erklärt und bedauert werden kann, die mir von gelehrten Bolognesern als in dem damaligen Gefühle gegen dieselben zum Theile vorhanden versichert werden, so kann dies doch nicht auch jetzt noch verziehen werden, seitdem, vor 35 Jahren wenigstens, die staunenswerthe prachtvolle Restauration des Archigymnasiums ***vollständig auf Kosten der Bologneser Stadtbehörden*** vollendet wurde. Weil man einen solchen Fehler wieder hätte gut machen können, ja ***müssen*** . . . . . wenn auch nur mit einer einzigen und einfachen Inschrift, welche nur die ***Namen*** der bedeutenderen Mathematiker enthielt, welche dem Archigymnasium zur Zierde gereichten, welche für Italien eine Ehre waren, und stets eine Ehre für dasselbe sein werden.

D . O . M.
A . R . P . Bonaventurae Cavalerio Mediolasi .
Ord[is] . Jesuator in hoc coenobio Mascarellae
Priori . Perpetuo Aposto[co].

Die neue dagegen:

An . MDCCCXXXXIII .
Lapis . qui .
injuria . temporum . amotus .
diffractusque .
obscuro . loco . delituit .
curante . Jo . Baptista . Bianconi .
Doct . Phil . Mathem . Aedis . Patrono .
egestus . restitutusque . est .
ne .
Bonaventurae . Cavalerio.
geometrae . maximo .
qui . ab . anno . MDCXXIX.
ad . annum . MDCXLVII.
interiorem . mathesim .
Bononiae . tradidit .
testimonium . deesset .
amplissimae . dignitatis .

Der Sinn dieser Inschrift war schon 1840 meinem Landsmann und genauen Freunde Avv. Cav. Luigi Crisostomo Ferrucci gegeben worden, seit 12 Jahren erstem Bibliothekar der Mediceo-Laurenzianischen Bibliothek zu Florenz: sie ging aus seiner hochgeehrten Feder hervor würdig seinem Rufe als Latinist, Epigraphiker und weitberühmter Schriftsteller.

ANHANG.

[Durch die Güte des Herrn Verfassers bin ich in die angenehme Lage versetzt, ausser dem schon im Anfange mitgetheilten Empfehlungsschreiben Galileis für Cavalieri, das ich als die grösste Zierde dieser deutschen Ausgabe bezeichnen mögte, in diesem Anhange nicht nur das Capitolo in Rima mittheilen zu können, durch welches Tartaglia seine Lösung der cubischen Gleichungen an Cardan übermittelte, und das schon in Italien kaum noch gekannt, in Deutschland wohl ganz unbekannt sein dürfte, sondern auch eine spätere Arbeit des Verfassers über Ferrari, in Form eines Briefes an Monsignor später Cardinal Grasselini, die wir schon oben S. 154 erwähnt haben. Ich erlaube mir demselben hierfür meinen aufrichtigen Dank an dieser Stelle öffentlich auszusprechen. D. Ueb.]

I.

Capitel in Terza Rima zur Auflösung der Gleichungen des dritten Grades von der Form $x^3 \pm px = \pm q$, durch Tartaglia am 25. März 1539 an Cardan mitgetheilt [1]).

Quando che 'l cubo con le cose appresso,
Se agguaglia à qualche numero discreto:
Trouan dui altri, differenti in esso.
Dapoi terrai, questo per consueto,
Che 'l lor produtto, sempre sia equale
Al terzo cubo, delle cose neto [2]);
El residuo poi suo generale,
Delli lor lati cubi, ben sostratti
Varra la tua cosa principale.
In el secondo, de cotesti atti;
Quando che 'l cubo restasse lui solo,
Tu asseruerai quest' altri contratti,
Del numer farai due, tal part' à uolo [3]),
Che l'una, in l'altra, si produca schietto,
El terzo cubo delle cose in stolo [4]);
Delle qual poi per commun precetto,
Torrai li lati cubi, insieme gionti
Et cotal somma, sarà il tuo concetto:
El terzo, poi de questi nostri conti,
Se solue col secondo, se ben guardi
Che per natura son quali congionti.
Questi trouai, & non con passi tardi
Nel mille ciuquecent' è quattro è trenta;
Con fondamenti ben saldi, e gagliardi,
Nella Città dal mar' intorno centa.

---

1) M. sehe Opere del famosissimo Nicolo Tartaglia ecc. Venezia 1506, p. 266.
2) Des Reimes wegen statt *netto*.
3) *à uolo* = *in un subito*. 4) Für *stuolo*.

II.

Schreiben[1]) des Professors Silvestro Gherardi an Monsignor Gaspare Grasselini über einige Nachrichten das Leben und die Arbeiten des Lodovico Ferrari betreffend, entnommen den Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät in der alten Universität Bologna, gesammelt von demselben Gherardi und zum Theil schon der Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna mitgetheilt.[2])

Werthgeschätzteste Collegen!

Das weitausgedehnte Thema, über das ich im letztvergangenen akademischen Jahre vor Ihnen zu lesen begonnen habe, betreffend die Geschichte der mathematischen Facultät in der alten Studienanstalt dieser Stadt, führt eine Bequemlichkeit mit sich, durch welche ich, so wie ich bin, mit meinen schwachen Kräften ihm mich anbequemen kann, und mit den Augenblicken von Zeit, die ich ihm, meinen amtlichen Geschäften entnommen, widmen kann. Diese Bequemlichkeit ist folgende: dass die Behandlung dieses Thema, sowie die betreffenden Nachsuchungen und Recherchen über Handschriften und alte Bücher sich getrennt und mit Unterbrechungen anstellen lassen, und ohne die Nothwendigkeit, dass die Theile sich in der Ordnung der betreffenden Zeiten folgen, da es hinreicht, wenn sie unter sich das Bindemittel haben, dass sie demselben Gegenstande angehören. So ist es, weil ich mit meiner Arbeit *Materialien* zur Geschichte der genannten Facultät zu sammeln gewollt habe; es würde nicht so sein, wenn ich die wirkliche Abfassung der Geschichte selbst beabsichtigt hätte. Jetzt kann auch eine einfache Erläuterung, eine Uebung über ein beliebiges Theilchen des weiten Gegenstandes gelegentlich gearbeitet und mitgetheilt werden, ohne abwarten zu müssen, bis sie an ihrem Ort in der ganzen

---

1) Dieses Schreiben findet sich abgedruckt in den Nuovi Annali delle Scienze Naturali di Bologna, fascic. di Marzo e Aprile 1859 und in einem daraus gemachten Sonderabdruck betitelt: Lettera del Professore Silvestro Gherardi a Monsignor Gaspare Grasselini. 14 S. 8°.

2) M. s. Novi Commentarii Academiae etc. T. VIII, p. 519. Das vorliegende Schreiben wurde der Akademie in ihrer Sitzung vom 12. December 1844 mitgetheilt.

Arbeit gesetzt werde, nach dem Plane, nach welchem ich mir's vorstellte, dass die verschiedenen Theile sich untereinander verknüpfen liessen, und den ich in der schon mitgetheilten Schrift dargelegt habe. — Solches ist auch diese kurze Notiz, die ich heute mittheile. Zu ihrer Abfassung gab der sehr glückliche Zufall vorzugsweise Anlass, der mir im vergangenen October mit der hochgelehrten und weltberühmten Persönlichkeit mich zu unterhalten Gelegenheit gab, an welche, mit ihrer gütigen Erlaubniss, dieselbe gerichtet ist.

Seiner Excellenz dem Herrn Commendatore Monsignor Gaspar Grasselini, Pro-Präsident des Census in Rom etc., etc.

Excellenz!

Nicht so bald war ich beim Durchblättern der Storia del Catasto Prediale Milanese di Carlo Lupi, con Aggiunta di Prefazione e Note[1]) zu den mit (B) und (L) bezeichneten Anmerkungen gekommen, als ich Sachen erwähnt fand, die einen Punct aus einer Arbeit berührten, die ich unter den Händen habe, betreffend die Geschichte der mathematischen Facultät an der alten Studienanstalt zu Bologna; ich nahm von daher Gelegenheit zu der nachfolgenden Schrift, die gleichsam aus dieser Arbeit einen Auszug

---

1) Pesaro 1844, in den Esercitazioni der dortigen Accademia Agraria aber auch separat veröffentlicht zu grösserer Bequemlichkeit der Ingenieure und Staatsöconomen. Die vorerwähnte Vorrede und die Anmerkungen am Ende des Textes sind aus der berühmten Feder desselben erhabenen Prälaten, der mit ausgezeichneter Güte diese meine Kleinigkeit anzunehmen geruht hat. Sie sind sehr geeignet die hohe Meinung von ihm zu bestätigen, die er den competentesten Richtern in dieser Materie eingeflösst hat, die von Amtswegen mit ihm über dieselbe zu verhandeln und zu discutieren hatten: ich habe ihn mehrfach mit Bewunderung sprechen gehört. Aber die Tiefe und umfassende Kenntniss, die der besitzt, der hier bei uns glücklicherweise dem Hauptunternehmen der Revision des öffentlichen Katasters vorsteht, und allen den fortdauernden Arbeiten des hochwichtigen Amtes des Census, lassen sich viel klarer erkennen in seiner Relazione su la eseguita revisione dell' estimo rustico delle due Provincie di Urbino e Pesaro, welche 1843 veröffentlicht ist. — Jetzt bei dem Drucke dieser Schrift (November 1849) kann ich bei Gelegenheit noch zwei andere empfehlenswerthe ähnliche Relazioni von ihm über die Provinzen Ancona und Macerata und Fermo und Ascoli erwähnen, die 1845 und 1846 erschienen sind, und von denen alle Gebildeten eine neue Ausgabe zu sehen wünschen (wie man von der ersterwähnten machen musste), um den Bestellungen entsprechen zu können, die danach von allen Seiten, selbst von ausserhalb unsres Staates einlaufen, und sie zum allgemeinen Nutzen zu verbreiten. — Angesichts solches Wissens und solches Eifers für das öffentliche Wohl beklagen Alle, dass die Zeiten (1847—1848) dem Census einen so trefflichen Führer verlieren liessen und, was mehr sagen will, dazu verleiteten, eine so glänzende Zierde der römischen Prälatur (als man es am Wenigsten erwartete!) von jedem Staatsamte zu entfernen. Er wurde später zur Würde des Purpurs erhoben kurz nach seiner Verwaltung von Bologna (1851—1857). Während derselben konnte er, um die Wahrheit zu sagen, ***weder Gutes, noch Schlechtes*** thun, wegen der Bevormundung durch die Oesterreicher, die im Belagerungszustande diese Provinz ***mitregierten.***

ildet. Da dieselbe in einem ihrer Theile, wenn auch nur in entfernter Weise, uf die ausgedehnten Studien über den Census sich bezieht, mit dem Ew. Excellenz ich zum grossen Nutzen der öffentlichen und Privatangelegenheiten bei uns eschäftigen, habe ich mir die Kühnheit genommen, sie Ew. Excellenz zuzueignen, ndem ich bitte, sie als Zeichen der Ehrerbietung und Dankbarkeit gegen Ew. Herrlichkeit Person annehmen zu wollen. Das Schriftchen ist nun folgendes.

Zur Erläuterung der Geschichte des ersten Mailänder Katasters „unter- „nommen im Jahre 1546 auf Befehl des Kaisers Karl V an den Fürsten „D. Ferrante Gonzaga, Gouverneur von Mailand, welcher *die soge- „nannten Prefetti dell' Estimo vier an der Zahl* ernannte, *beauftragt mittelst „geübter und geehrter Erfahrenen eine allgememeine Abschätzung aller Landgüter „u. s. w. zu veranlassen*“ (M. s. die erwähnten Storia del Cat. Pred. Milanese etc., p. 121), dürfte es gut und nützlich sein, in das Gedächtniss der jetzt Lebenden den Antheil zurückzurufen, den an diesem so bedeutenden Unternehmen Lodovico Ferrari nahm, in seiner Sphäre sicherlich der bedeutendste Mann unter Allen, welche bei dieser Arbeit erwähnt werden. Seine Berühmtheit bei den Zeitgenossen war gross, aber sie hat dennoch, wie es ja bei den meisten berühmten Männern geschieht, bei der Nachwelt eher zu- als abgenommen. Er löste zuerst die biquadratischen Gleichungen durch Erfindung der Methode die man noch heutigen Tages anwendet; eine Erfindung die für sich allein schon hinreichen würde, ihn an die Spitze der grössten Mathematiker seiner Zeit zu stellen [1]). Dies ist aber nicht der einzige Punct, durch den er sich im höchsten Grade um die Wissenschaft und ihre Anwendungen verdient gemacht, obwohl von diesem allein zum Lobe Ferraris gewöhnlich Erwähnung geschieht. Die anderen Ansprüche desselben auf immerdauernden Ruhm und die Bewunderung der Nachwelt werden aus dem Auszug, den wir hier über seine Arbeiten geben, klar werden.

Zur Welt gekommen in Bologna im Jahre 1522 von einem Vater, der ebenfalls hier geboren war, aber von Mailänder Abstammung, verliess er als Waise Vaterland und Verwandte im jugendlichen Alter von 15 Jahren. Aber er kehrte dahin vier Jahrfünfte später zurück, wohin ihm der wunderbare Ruhm seiner Thaten in diesem kurzen Zeitraum voranging. Im Verlaufe desselben zuerst armseliger und niedriger Diener im Hause des grossen Cardan in Mailand, wusste er sehr bald sich zum Dienste eines Amanuensen desselben zu befähigen und dann sich als Lieblingsschüler ansehen zu lassen; später mit grösstem Beifall aufgenommener Professor der gesammten Mathematik in jener Hauptstadt [2]) zum grossen Staunen der Personen, welche ihn nur drei Jahre früher gekannt hatten; bald darauf triumphierender Herausforderer Collas und Tartaglias (der grössten Mathematiker ihrer Zeit)

---

1) Libri, Histoire des Sciences mathématiques en Italie, T. 3, p. 180.

2) „*Quid? Quod diebus festis intersum lectioni Arithmetices ex Euclide, et Sphae- „rae ex Sacrobusto: has enim scientias publice profitetur Lodovicus Ferrarius omnium „artium Praeceptor*“ (M. s. einen Brief des Francesco Cicereo, datiert *Mailand den 14. November 1544* in der Sammlung seiner Briefe gedruckt zu Mailand im Jahre 1782 durch den Abbate Pompeo Cassati unter dem Titel: Francisci Cicerei Epistolarum Libri XII, T. 1, p. 59, Epistola X.)

über die dunkelsten und noch nicht gelösten algebraischen und geometrischen Probleme, die untereinander in gedruckten Cartelli oder mündlich in öffentlicher Disputation ausgewechselt wurden; höchst scharfsinniger Algebrist, Geometer, Architekt und gründlicher Astronom; sehr gewandter Schriftsteller in seiner Muttersprache, in der lateinischen und auch in der griechischen; von Grossen und Königen als Lehrer ihrer eigenen Kinder gesucht; zuletzt Vorgesetzter der allgemeinen Landmessung [1]) für die Abschätzung des weiten Mailänder Gebiets; in welcher löblichen Arbeit er gut acht Jahre der gewöhnlich schönsten oder angenehmsten des Lebens ausdauerte. — Es verdient alle Beachtung, dass er sie übernahm, indem er sie den Aufträgen und Aemtern, deren Besitz er schon war oder über die zu disponiren bei ihm stand, vorzog. Und gelte das Wahre: er zog sie vor dem Lehrstuhl, den er in Mailand inne hatte, mit dem Rufe den man oben kennen gelernt, und gut drei oder vier ausgezeichneten und auch in Bezug auf den Gewinn ansehnlichen Berufungen, die ihm gleichzeitig mit der für den Mailänder Kataster kamen. Und um eben nur um diesen Bedacht zu sein, kümmerte er sich nicht im Mindesten um die Rathschläge seines Lehrers, der sehnlichst gewünscht hatte, dass er noch nicht dreissigjährig sich nicht von dem erwähnten Lehrstuhle wegen irgend welches Glücksfalles entfernen mögte. [2]) Dies die hauptsächlichsten Gründe sowohl für das hohe Ansehen, was Ferrari bei der Commission in Rede besass, sowie für die hohe Einsicht der Auftraggeber, die einen solchen Mann, wenn auch noch in der ersten Blüthe seines Lebens, dazu als Dirigent wollten. Alles lässt glauben, dass er sich demselben ausschliesslich nicht vor dem Jahre 1549 hingab. Denn in den letzten Monaten des vorhergehenden Jahres 1548 weiss man ihn noch an seinen Lehrstuhl in Mailand gefesselt. — Es ist ja den in der Geschichte der Auflösung der cubischen Gleichungen Erfahrenen bekannt, dass gerade am 10. August dieses Jahres 1548 in einer Kirche Mailands jene öffentliche, grosses Geschrei erregende Disputation vorfiel, Brust gegen Brust zwischen ihm und Tartaglia, die endlich den Cartelli

---

1) Tiraboschi, Storia della Letteratura Italiana ecc., T. VII, P. 2, Lib. 2, Cap. II, § 44, verwechselt vielleicht den ersten Haupttheil jedes regulären Landkatasters, nämlich die Ausmessung des Terrains, mit der ganzen Operation (M. s. die Prefazione der citierten Storia del Catasto Prediale Milanese), wenn er mit offenbarer Uebertreibung behauptet, Ferrari *habe* auf Befehl des Don Ferrante Gonzaga *die allgemeine Abschätzung des Gebietes dieses Staates ausgeführt u. s. w.* Der Passus aus dem Leben Ferraris, das von seinem Lehrer Cardan geschrieben ist, der Tiraboschi als Beweismittel dient, um dieses bemerkenswerthe Amt des Ferrari zu erwähnen, spricht einzig und allein aus, dass er der *Vermessung* des Landes vorstand (wie man in der nächsten Anmerkung sehen wird). Dies ist auch mehr in Uebereinstimmung mit dem, was man in der oben citierten Anmerkung (B) auf p. 121 der Storia del Cat. Pred. Milanese liest. Sicherlich aber war Ferrari wenn nicht einer der vier *Prefetti dell' Estimo*, die dort erwähnt sind (M. s. auch Anmerkung (L) auf p. 142), doch der wirkliche Prefetto des geodätischen Theiles dieser Schätzung.

2) „*Duobus post annis simul vocatus est Romam, et a Prorege Galliarum Brisacco, „et Venetias privata tamen conditione sed locupleti, tum a Cardinale Mantuano, et a „Caesare ut erudiret filium qui nunc est Imperator. Pervicit Cardinalis; quod eodem „anno illius frater Ferdinandus Gonzaga Praefectus Provinciae muneri dimetiendi „agrum Mediolanensem eum praefecisset . . . . . Dissuaseram ego discessum. vole„bamque esse contentum praesenti fortuna etc.*“ (Cardani Opera Omnia ed. Sponius, T. IX, p. 568 in der Vita Ludovici Ferrarii bononiensis).

ein Ziel setzte und jedem andern litterarischen Streite zwischen ihnen —. Er nahm dann jene ehrenvolle Stellung als Dirigent an auf dringendes Verlangen und in speciellem Dienste des Cardinal Ercole Gonzaga, des Bruders des Don Ferrante, Gouverneurs von Mailand, wie man in der mitgetheilten Stelle Cardans gelesen hat; als Einkommen für seine Mühen wurden ihm 400 Goldkronen pro Jahr gezahlt, ausser dem Ersatz aller Kosten für seinen Unterhalt und dem zweier Diener und eines Pferdes (ein für jene Zeiten gewiss höchst ansehnliches Gehalt)[1]).

Durch die Beschwerden und Strapazen bei der genannten Thätigkeit und auch (um mit Cardan zu reden) durch die geringe Mässigkeit seines Lebens zog sich unser Ferrari ein sehr unbequemes und lästiges Uebel zu. Wegen der Unannehmlichkeit und auch der Gefahren desselben entschloss er sich plötzlich, diese Arbeit aufzugeben und in sein Vaterland zu kommen, um sich heilen zu lassen: dies muss ungefähr um das Jahr 1556 gewesen sein. Und nachdem er sich hier im Vaterlande ein Haus gebaut und eine arme Schwester, eine Wittwe, die er sehr liebte, zu sich genommen, fing er die philosophischen und mathematischen Studien wieder an, die er wegen des mailänder Katasters unterlassen hatte. Er emendierte auch nach dem Zeugnisse Cardans die Commentarien Caesars und zierte sie mit Figuren; er beschäftigte sich mit Bemerkungen über Vitruv.... Aber wie lange? Hier dauerte sein Leben nur eine sehr kurze Zeit, nur 9 bis 10 Jahre, indem er plötzlich (nicht ohne Argwohn von Gift durch ein scheussliches Verbrechen seiner eigenen Schwester) in einem Alter von wenig mehr als acht Lustren im October des Jahres 1565 starb. Wenige Monate vorher hatte sich Bologna dadurch geehrt, dass es ihn unter seine *Doctoren der Philosophie* aufnahm, und erst seit einem Jahre und einigen Monaten hatte es ihn als *Professor der reinen und angewendeten Mathematik* an seiner Universität begrüsst; ein Lehrgegenstand, darf man sagen, gerade für ihn geschaffen.

Es liegt nicht ausser der Wahrscheinlichkeit, dass er in den vorgenannten Jahren, in denen er im Vaterlande zubrachte, nachdem er das Mailändische verlassen, mit Bombelli, einem anderen berühmten bologneser Algebristen, Zeitgenossen wenn nicht Altersgenossen von ihm, Umgang pflegte; dass er sich mit ihm über seine grösste Entdeckung der Auflösung der Gleichungen des 4. Grades besprach, ein von dem, welcher sie zuerst veröffentlichte, von Cardan nämlich im Cap. 39, Questio 4, Reg. 2 und Questio 5 der Ars Magna, ihm zuerkannten Eigenthum, und dass er sich mit ihm auch über seine andern analytischen Erfindungen besprach. Denn wenn man die Ars Magna genau

---

1) „*Pro qua opera pene quadringenti coronati in singulos annos numerabantur* „..... *Accepitque octo in annis aureos coronatos pene quater mille, certe plus tribus* „*millibus praeter omnem sumptum vitae: nam famulos duos et equum ei alebat Car-* „*dinalis, etc.*“ (Cardani Opera etc., a. a. O.). Dies lässt erkennen, dass Ferrari der Vorgesetzte des angegebenen Theils der Mailänder Schätzung war und nicht blos für die Arbeiten am Schreibtisch, sondern, und sogar vorzugsweise, für die auf dem Felde: eine Thatsache, die man auch aus dem entnehmen kann, was auf den obigen Cardanschen Passus folgt. Dies würde die Kenntniss aller Specialitäten seiner Operation, der Ausführung, der geometrischen Methoden, der angewendeten Instrumente u. s. w. nur um so viel interessanter machen. Möge doch diese Aufforderung nicht vergeblich sein!

durchgeht, so ist jenes nicht die einzige Erfindung, welche ihm zugeschrieben wird: ausser den scharfsinnigen Unterstützungen beim Studium der cubischen Gleichungen und dem strengen geometrischen Beweise der Auflösungsformel derselben, die von der andern Zierde der bologneser Studienanstalt, von Scipione Ferro, erfunden wurde, und bei der Ausdehnung dieser Regel, werden ihm ebenfalls die dunkelsten und geistreichsten Transformationsmethoden der Formeln, Eliminationsmethoden der Grössen u. s. w. zugeschrieben, in der Art, dass Ferrari als der wahrhaft schöpferische Geist erscheint, der dem Cardan in den steilsten und abgelegensten Puncten des hochgelehrten Werkes Rath gibt, während Letzterer davon nur der einfache, übrigens ausgezeichnete Darsteller und Ordener ist. Der erwähnte Bombelli, der in der Vorrede Agli Lettori seines unsterblichen Werkes L'Algebra (Bologna 1572) Ferrari und Cardan „*ingegni . . . . più tosto divini, che humani*" nennt, handelt im Texte seines Werkes selbst weitläufig von jener grössten Erfindung Ferraris und ihren Folgerungen, indem er den ersten Ruhm dem berühmten Mitbürger zutheilt. Aber über unsere erwähnte Annahme, dass sie sich zusammen besprochen haben, haben wir Nichts hinzuzufügen, was sie beweisen oder Lügen strafen könnte; Grund die elenden Notizen, die uns über das Leben dieser Koryphäen aufbewahrt sind und besonders durch ihre Mitbürger.

Gedruckte Sachen dieses ebenso unglücklichen als ausserordentlichen (nach Aussage Cardans aber auch heftigen, zornigen, unklugen u. s. w.) Geistes findet man nicht erwähnt, wenn man ein lateinisches Epigramm sowie ein griechisches ausnimmt, die in Werken seiner Freunde enthalten und von ihm bis zu seiner öffentlichen Lehrthätigkeit in Mailand verfasst sind.[1]) Aber nach vielen Nachforschungen bin ich endlich so glücklich gewesen ein Exemplar der vorerwähnten Cartelli wiederaufzufinden, die eines Tages hochberühmt, nachher in Vergessenheit gerathen und verloren gegangen sind; die Cartelli meine ich, die zwischen ihm und Tartaglia bei der mehrerwähnten Disputation gewechselt sind. Zwei von den sechs, welche Ferrari angehören, nur zwei genügen schon, um hinreichend die hohen Gaben seines Geistes zu bestätigen; und sie dienen auch dazu, was viel wichtiger ist, die Geschichte der Algebra und ebenso der Geometrie in einigen Rücksichten oder Folgerungen zu berichtigen und zu erläutern. Ich erkenne es auch als ein grosses Glück an, dass ich eine Handschrift von ihm wieder auffinden konnte, die noch nicht gedruckt ist, mit folgendem Titel: „*Libellus Ludovici Ferrarij de erroribus, qui nostro tempore con-* „*tingunt in celebratione Paschatis, et de eorum causis, ad Herculem Gonzagam* „*Cardinalem amplissimum ac Sacrosanctae Synodi Tridentinae Antistitem. Dat.* „*Bononiae VI Idus Novembris 1562*" (und das ist eine andere Arbeit Ferrari's, welche der Sorgfalt seines Lehrers entschlüpft ist, der hier in Bologna in seiner Wohnung, während er starb, und nach seinem Tode, seine Schriften und Bücher aufsuchte). Die Existenz dieses werthvollen Manuscriptes war schon durch den wohlverdienten Fantuzzi, den ich oben erwähnte, angedeutet worden; er sah auch und theilte in seinem Buche über *die Bologneser Schriftsteller*

---

1) Tiraboschi, a. a. O. und Fantuzzi, Scrittori Bolognesi unter Ferrari, Lodovico.

einige der vorerwähnten Cartelli *im Auszuge* mit, die weder Cossali gesehen noch andere Schriftsteller über die Geschichte der Mathematik (die aber auch nicht einmal den vorgedachten *Auszug* sahen oder ihn übersahen, der übrigens hinreicht diese Geschichte zu berichtigen). Bei Gelegenheit der Erwähnung dieses Manuscriptes durch Fantuzzi hat unser Libri nicht gezögert auszusprechen: „*Si des ouvrages de Ferrari se conservent encore en manuscrits ils* „*meritent d'être tirés de l'oubli où ils sont restés depuis trois siècles*"[1]. Und ich, auch in Beachtung einer so gewichtigen Meinung, nehme mir vor, das Manuscript als ganz einzigen Schmuck meiner erwähnten historischen Arbeit zugleich mit dem äusserst seltenen, vielleicht einzig vollständigen Bande der Cartelli zu veröffentlichen.

Die Widmung dieses Manuscripts an den Cardinal Gonzaga, noch mehr aber der höfliche und unterthänige Brief[2]), welcher der Abhandlung mit dem mitgetheilten Titel vorausgeht, lässt sehr an der Wahrheit einer Behauptung Cardans in der Lebensbeschreibung seines Schülers zweifeln; dass nämlich dieser mit dem Cardinal selbst wegen des bei der Arbeit an dem Mailänder Kataster sich zugezogenen Uebels hart aneinander gerathen sei, und aufgebracht über ihn in unartiger Weise diese Arbeit verlassen habe.[3]) Es ist übrigens auch nur zu wahrscheinlich, dass ausser dem vorerwähnten Uebel viele andere Gründe, die leicht aus dem zu entnehmen sind, was von dem Widerstande, den Schwierigkeiten aller Art und endlich den persönlichen Gefahren, erzählt wird die den Arbeitern an diesem grossartigen Unternehmen zustiessen, Ferrari erbitterten und ihn zwangen nach einer hinreichend langen und harten Probe ohne Schuld oder derartige Unhöflichkeit zu entsagen.[4]) Ich zweifle ferner nicht sehr, dass bei Nachsuchung in den Registern, den Schriftstücken, den alten Archiven dieser hochberühmten Arbeit, um Documente für den Antheil zu entdecken, den er daran hat, man sehr der Erwägung und des Studiums werthe Sachen finden würde auch in dem Lichte unserer Tage. In jeder Beziehung sehe ich sehr viel leichter, dass durch die zerstörende Kraft der Zeit, hier unterstützt durch die Unachtsamkeit der Menschen, ähnliche Untersuchungen

---

1) Histoire etc., T. 3, p. 181.

2) Mehr um ein Beispiel des gewandten und ausgesuchten Stiles des Verfassers zu geben als zum Beweise unsrer Behauptung an dieser Stelle, geben wir hier einen Passus des ungedruckten Manuscriptes wieder: „*Hoc eo libentius feci*" (so liest man gegen das Ende des genannten Widmungsschreibens), „*quod videam te in hac Sacrosancta Synodo Prae*„*sidem, qui non solum in Theologia, Philosophia, ac humanioribus litteris, quibus a* „*teneris ungniculis continenter vacasti, emineas: sed disciplinis etiam mathematicis* „*aliquot annos felicissime operam dederis. Ita ut de te maxime sit sperandum; ut* „*quod alii tentarunt, tu perficias: quod alii ob difficultatem emiserunt, tu resumas, et* „*absolvas: ac tandem huic de Paschate negotio supremam manum imponas. Mitto* „*igitur ad te, Amplissime Antistes, comemoratum libellum, tamquam ad summum* „*judicem. Etc.*"

3) „*Verum fistulam in ano contraxit, ex qua, cum esset intemperans, malum con*„*traxit habitum. Cumque nullis non officiis Cardinalis illum non demereretur, quasi* „*quod fortunae, sibi imputari debuerat, a Cardinale acceptum referret, illi iratus non* „*obscure Bononiam se contulit, ad sororem Magdalenam orbam viduam quam unice* „*diligebat, ibique extructa domo satis commode praeter vim morbi vixit. Etc.*" (Cardani Opera omnia ed. Sponius, a. a. O.)

4) M. s. Storia del Catasto Prediale Milanese, p. 122, Anmerkung 2.

fruchtlos bleiben können, deswegen, weil Ferrari in diesem Unternehmen irgend einen Abdruck seines ebenso frühreifen als vollendeten Geistes nicht hinterlassen hat.

Indem ich dies aber demjenigen überlasse, der die Spuren der angegebenen Untersuchungen in Händen hat, und die Mittel sie zu vollenden, will ich diese Schrift, wie sie nun auch sein mag, nicht schliessen, ohne sie durch eine Bemerkung zu bereichern, die nöthigenfalls einige von den Ansichten stützen und bestätigen dürfte, welche in der Anmerkung (L) der oft erwähnten Storia del Catasto Prediale Milanese (p. 142—145) ausgesprochen sind, Ansichten, die uns sehr gewichtig und sehr verständig klingen, und welche die Qualität der für das Hauptunternehmen eines öffentlichen Katasters gewünschten und gesuchten Arbeiter betreffen. Diese Bemerkung ist: dass man den Entschluss, welchen der bologneser Algebrist fasste, seine Kräfte der Mailänder Schätzung zu leihen, unter den von Cardan beschriebenen und von mir treu wiedergegebenen Umständen, mit Erlaubniss dieses, sehr empfehlen und in sehr vielen Fällen des öffentlichen Wohles als ein hervorleuchtendes Beispiel anführen kann. So werden die ausgezeichneten Geometer, deren Arbeit nöthig war, um den Kataster unseres Staates zu vollenden und zu Ende zu führen, und denen die fortdauernde Materialität und die Beschwerden solcher Arbeit nothwendigerweise drückend und langweilig werden, aus der Betrachtung Ferraris sehr grosse Stärkung und Kraft schöpfen; geboren mehr als irgend ein Anderer für den Ruhm in der theoretischen Mathematik, entschied er sich doch, sie für eine gleiche, sogar viel schwierigere Arbeit zu verlassen; und nicht blos jene: den sichersten Beifall der öffentlichen Schule, den geliebten Frieden der sitzenden Studien, endlich die Anziehungskraft des Glanzes eines königlichen Hofes. Die Kraft zu solchen Opfern kann nur durch ein einziges Gefühl eingeflösst werden, das für das öffentliche Wohl. Cardan scheint andeuten zu wollen, dass der hauptsächlichste Beweggrund Ferraris zu den Vorzug, welchen er dem mailänder Kataster gab, der grosse Gewinn war; aber er selbst legt uns genügende Gründe vor Augen, woraus wir sehen, dass wenn sein Schüler nicht auf etwas Anderes geblickt hätte, er anders gewählt haben würde.

Und indem ich hiermit diesem Schreiben ein Ende setze, bitte ich Ew. Excellenz, der ich dasselbe ehrerbietigst überreiche, um Verzeihung, wenn es Ihnen, wie ich sehr stark fürchte, noch viel weiter von dem entfernt zu sein scheinen sollte, was Sie nach den Sachen, die den Anstoss dazu gegeben, davon erwartet hätte, und in jeder Beziehung der Beachtung unwerth, wie ich noch mehr Grund zu befürchten habe.

Bologna, den 1. November 1844.

Ew. Excellenz

ergebenster Diener und Bewunderer
Prof. Silvestro Gherardi.

III.

Angeregt durch einen im Copernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst in Thorn von dem Uebersetzer gehaltenen Vortrag über *Domenico Maria Novara*, der darauf in einem Provincialblatte zum Abdruck kam[1]), sowie durch die Anzeige dieses Vortrages in der Rivista Europea[2]) hat Fürst Boncompagni in Rom uns gütigst über die gedruckten Schriften Novaras, von denen 5 in seinem Besitze und eins in dem der Universität Bologna den Bibliographen völlig unbekannt geblieben sind, eine Reihe von Notizen zur Mittheilung an gedachten Verein, dessen Ehrenmitglied er ist, zugesendet, die ich hier, mit seiner gütigen Erlaubniss, dieser Uebersetzung mit seinen eigenen Worten anzufügen mir erlaube.

La Bibliothèque de l' Université royale de Bologne possède un volume in 4° p°, coté „A. V. KK. VIII. 29" (c' est à dire salle (*aula*) cinquième, armoire KK, rayon VIII, numéro 29 des ouvrages placés dans ce rayon) formé de 156 feuillets, et contenant 33 opuscules, dont les 1r—30e sont imprimés, et les 31e—33e sont manuscrits. Le 20e de ces 33 opuscules, formant les feuillets 97e—100e du même volume, est composé de 4 feuillets non numérotés, imprimés en caractères semi-gothiques, et intitulé dans le 1er de ces feuillets (*recto*, lig. 1—2)

¶ Ad Illustriss: Dnm. d. Joannem benti. de aragonia ꝛc. Dominici marie ferr. de Nouarien. (*sic!*) pronosticon. In annū domini . Mccccc.

Tout ce qui suit, jusqu' à la fin du *recto* du 4e feuillet est *en italien*. Le *verso* du même feuillet contient dans les lignes 1—25, 28—40 un calendrier d' oppositions et conjonctions, et de jours heureux ou malheureux pour chaque mois de l' aunée *en latin*. Dans les lignes 26—27 du même *verso* on lit:

¶ Datū Bononie die 20 Januari. Mccccc. ꝑ Egregium Artiū ꝛ medicine doctorē. d. Magistrū. Dninicū (*sic!*) mariā ferr d' nouara matēaticū celeberrimuꝫ.

---

1) Altpreussische Monatsschrift, VI Band, herausgegeben von R. Reicke und E. Wichert, Königsberg 1869 (8. Heft, S. 735 — 743. M. sehe auch Band VII, Heft, S. 253—256.)

2) Rivista Europea diretta in Firenze dal Prof. Angelo de Gubernatis, vol. 2°, fasc. 3°, 1° maggio 1870.

Je prossède moi même et garde dans mon domicile à Rome, Rue du Corso, n° 213, troisième étage, un volume in 4°, composé de 426 feuillets non numérotés et contenant 103 opuscules, dont le premier, composé de 4 feuillets non numérotés, est intitulé dans le 1er de ces feuillets (*recto*, lig. 1—2):

Ad Illustrissimũ Dominũ. D. Johãnē Bēti. de Aragonia &c. Dominici Mariae Ferr . de Nouaria Pronosticon ĩ annũ 1501.

Dans les lignes 27—29 du *verso* du 4e de ces feuillets on lit:

Datuꝫ in gymnasio Bonon . die . 25. Ianuarii . 1501 . ꝑ Egregiuꝫ Artiuꝫ & medicine doctorem dnuꝫ magistruꝫ dominicum mariã ď nouaria
Impressum ꝑ Benedictum Hectoris Bonon. [1])

Le 4e des 103 opuscules ci-dessus mentionnés, composé de 4 feuillets non numérotés, mais dont les deux premiers ont dans les marges inférieurs des *rectos* les signatures „A i", „A ii", est intitulé (1er feuillet *recto*, lig. 1—2):

Ad Illustrissimũ Dnm. D. Johãnē Bēti. de Aragonia Do minici mariae Ferr. de nouaria ꝑnosticō ĩ ãnũ. M. ccccc ii.

et a dans les lignes 34—36 (dernières) du 4e feuillet *verso* la date suivante:

¶ Datũ bon. ꝑ eximiũ Artiũ & medicinae doctorē ac celebratum ma thematicũ. D. Magistrũ Dominicũ mariã Ferr. de Nouaria. In felici gymnasio bon. Anno Domini M. CCCCC. II. die 5. Mēsis Februa. [2])

Le 9e des 103 opuscules ci-dessus mentionnés, composé de 4 feuillets non numérotés, est institulé dans le 1er de ces feuillets (*recto*, lig. 1—2):

Ad Illustrissimum: dnm. D. Io. Benti. Dominici Mariae Ferrarien de Nouaria Pronosticon in Annum dni. 1503.

Dans les lignes 27—32 du *verso* du 4e de ces feuillets on lit:

Datum Bononiae ꝑ eximium artium & medicinē (*sic!*) doctorem. D. ma gistrum Dominicum Mariam Ferrar. de nouaria. In Felici gymnasio Bonon. 1502. die. 20. Decembris
Impressum Bononiae per Benedictum Hecto / reum Calchographum Bonon. Anno Salutis &c. [3])

1) Cet opuscule forme les feuillets 2e—5e du volume ci-dessus mentionné.
2) Cet opuscule forme les feuillets 17e—20e du volume ci-dessus mentionné.
3) Cet opuscule forme les feuillets 34e—37e du même volume.

Le 10e des 103 opuscules cités ci-dessus, composé de 4 feuillets non numérotés, est intitulé dans le 1er de ces feuillets (*recto*, lig. 1—2)

Ad Illustrissimū dominū. D. Io. Benti. Dominici Marie ferr. de No uaria pronosticon in annū dni. 1504.

Dans les lignes 27—31 du *verso* du 4e de ces feuillets on lit:

Datum Bonōie per egregium artium ⁊ medicine doctorem Magi / strum Dominicū Mariā Ferr. de nouaria. die. 7. mensis decēbris. 1503.
Impressum Bononie per Benedictum Hectorem
Calchographum Bonon. Anno
Salutis. ⁊c. [1])

Le 12e des 103 opuscules ci-dessus mentionnés, composé de 4 feuillets, a dans le 1er de ces feuillets (*recto*, lig. 1—2) le titre rapporté dans les lignes 4—5 de la présente page. Dans les lignes 27—31 du *verso* du 4e de ces feuillets on trouve ce qu' on lit dans les lignes 7—11 de la présente page. Cet opuscule n'est que la traduction italienne du précedent.[2])

J' ai acheté le volume cité ci-dessus dans une vente faite à Rome des livres possédés par Louis Ciccolini, illustre mathématicien. On a publié un catalogue de cette vente intitulé: „CATALOGO | DELLA | PREZIOSA LIBRERIA | GIÀ APPARTENUTA | „*alla ch. me. dell' insigne Mattematico,* | *ed astronomo* | IL COMM° „LODOVICO CICCOLINI, ecc. La vendita si effettuerà all' asta pubblica „nel | negozio librario di Francesco Archini, via del | Collegio „Romano num. 205., incominciando Lu- | nedi 14 gennaio 1856, etc. „ | ROMA | FRATELLI PALLOTTA TIPOGRAFI | in piazza Colonna". In 8°. Dans ce catalogue (page 118, lig. 17—21, VENDITA X. (*Giovedì* ***24 Gennajo 1856***) on lit:

„82. Prognostica Astronomica ab anno 1501 ad ann. 1540. *Un grosso vol. in 4. di rari opuscoli intonsi stampati nella prima metà del XVI. Sec.* „1 . 20"

Dans ce passage du catalogue cité ci-dessus est décrit le volume ci-dessus mentionné. Ce volume est relié en carton

---

1) Cet opuscule forme les feuillets 38e—41e du volume cité ci-dessus. Le 25e des 33 opuscules contenus dans le volume de la Bibliothèque de l' Université de Bologne cité ci-dessus (feuillets 121e—124e) est aussi un exemplaire du pronostic pour l'année 1504 décrit ci-dessus.

2) Cet opuscule forme les feuillets 44e—47e du même volume.

recouvert intérieurement de papier blanc et extérieurement de parchemin. Sur le dos de ce volume on trouve collés deux carrés, dont le 1er en peau rouge contient les mots suivants dorés: „PROGNOSTICA ASTROLOGICA.“ Sur le 2d. en peau verte est imprimé en caractères dorés: „AB ANNO | 1501 AD 1540“.

Le même volume a été décrit dans un cahier intitulé „IL | DILUVIO DI ROMA“ qui est le 53e d' un recueil intitulé „ARTI E LETTERE“ par Benvenuto Gasparoni (page 84, lig. 29—41). Dans ce cahier (pages 85—91) a été reproduit le 70e des 103 opuscules cités ci-dessus, intitulé „Diluuio di Roma che fu a. VII. „d' Ottobre Lanno | M.D.XXX. col numero delle case roinate, delle „ | robbe perdute, animali morti, huomini e dõne affo | gate, cõ „ordinata discrittione di parte in parte &c.“

Je ne connais aucun exemplaire actuellement existant de l'édition de 1489 d'un Prognostic de Domenico Maria Novara cité par M. Gherardi dans son ouvrage intitulé DI ALCUNI MATERIALI ecc. Bologna 1846 ecc. (p. 33, lig. 1—17.) Les mentions que j' en ai trouvées sont rapportées ci-après.

La Bibliothèque Casanatense de Rome possède un exemplaire coté „M. VII. 14“ d' une édition intitulée: „TABVLAE | SECVN- „DORVM | MOBILIVM | COELESTIVM, | Ex quibus omnium syderum „aequabiles, & apparentes motus | ad quouis tempora praeterita, „praesentia ac futura | mira promptitudine colliguntur, | *Congruen- „tes cum obseruationibus Copernici*, | *& canonibus Prutenicis*, | „Atque ad nouam Anni Gregoriani rationem, ac emendationem | „Ecclesiastici Kalendarij accomodatae. | *Secundum longitudinem „Inclytae Venetiarum Vrbis.* | Authore | IO. ANTONIO MAGINO „PATAVINO | Philosophiae, ac Mathematicarum professore. | *CVM „PRIVILEGIIS.* | VENETIIS, M.D.LXXXV. | Ex Officina Damiani „Zenari.“ Dans cette édition (p. 29, lig. 19—44, p. 30, lig. 1—11, CANON 8) on lit:

„Quod porrò in quorundam paucorum locorum latitudinibus etiam a „priori nostro edito Catalogo dissentiamus, vtpotè Venetiarum, Veronae, „Patavij, &c. nempe eas aliquantisper augendo in causa sunt recentes ho- „rum locorum indubiae, repetitaeq; obseruationes, quae à Petro Pitato, atq; „alijs diligentissimis nostri saeculi viris factae sunt, imo & aliorum locorum „latitudines Ptolemaei debere augeri tum ex hoc, tum ex authoritate Do- „minici Mariae Ferrariensis opinamur, qui vir diuino ingenio praeditus „fuit Nicolai Copernici praeceptor, cuius in hac re sententiam placet stu-

„diosis communicare, presertim cum sciam, non ita facilè eius scripta ad „cuiusq; manus deuenire posse, is namque in quodam antiquo vaticinio „anni 1489. Bononiae excusso praeponit haec verba. „Ego autem superiori-„ „bus annis contemplando Ptolemaei Cosmographiam inueni eleuatio-„ „nes Poli Borei ab eo positas in singulis regionibus ab his, quae nostri tem-„ „poris sunt, gradu vno, ac decem minuta deficere, que diuersitas vitio Ta-„ „bulae nequaquam ascribi potest: non enim credibile est totam libri se-„ „riem in numeris Tabularum aequaliter depravatam esse. Ea propter ne-„ „cesse est Polum Boreum versus punctum verticalem delatum concedere„, „longa itaq; temporis observatio iam nobis coepit detegere, quae nostris„ „maioribus latitarunt, non quidem ex eorum ignauia: sed quia longi tem-„ „poris obseruatione praedecessorum suorum caruere. Pauca enim admo-„ „dum loca ante Ptol. in eleuationibus Poli obseruata fuere, sicut, & ipse„ „testatur in principio suae Cosmographiae: inquit enim: Solus Hypparcus„ „paucorum locorum latitudines nobis tradidit, quamplures autem distan-„ „tiarum praesertim, quae ad Solis Ortum, seu ad Occasum vergerent, ex ge-„ „nerali quadam traditione conceptae fuerunt, non ex ipsorum Authorum„ „ignauia: sed quod nondum diligentioris Mathematicae vsus foret: nimi-„ „ „rum igitur si priores hunc tardissimum motum non perceperunt: is „ „etenim in mille & septuaginta annis versus apicem habitantium gradu „ „vnò fere delatum se manifestat. Indicat autem hoc angustia freti Gadi- „ „tani, vbi tempore Ptolemaei Polus Boreus ab horizonte gradibus 36. cum „ „quarta, nunc vero 37. ac duplici quinta eleuatus apparet, similem quoq; „ „diuersitatem indicat Leucopetra Calabriae, & singula loca Italiae, illa vi- „ „delicet, que à Ptolemaeo ad nostra tempora non mutarunt. Ex hoc itaq; „ „motu, quae nunc habitantur loca deserta tandem fient, ad illa, quae nunc „ „sub Torrida Zona decoquuntur, longo licet temporis spacio ad nostram „ „coeli temperiem deducentur, ita vt tercentis & nonagintaquinq; mil- „ „libus annorum curriculo motus is perficiatur tardissimus."

On voit par ce passage de l'edition citée ci-dessus intitulée „TABVLAE | SECVNDORVM | MOBILIVM", etc. que le Pronostic ci-dessus mentionné a été certainement imprimé à Bologne en 1489, et que cette édition contenait tout ce qui est rapporté dans le même passage entre guillemets, depuis les mots „Ego autem" (voyez la présente page, lig. 3) jusqu' au mot „tardissimus" (voyez ci-dessus, lig. 29).

La Bibliothèque Cassanatense possède aussi unexemplaire coté „L. V. 18" d' une édition intitulée: „GVILIELMI GIL- | BERTI „COLCESTREN- | SIS, MEDICI LONDI- | NENSIS, | DE MAGNETE, „MAGNETI- | CISQVE CORPORIBVS, ET DE MAG- | no magnete „tellure; Physiologia noua, | *plurimis & argumentis, & expe-* | „rimentis demonstrata. | LONDINI | EXCVDEBAT PETRVS SHORT ANNO | MDC." Dans cette édition (p. 212, lig. 29–37; p. 213, lig. 1, LIBER SEXTVS, CAP. II) on lit:

„ Axis telluris magneticus, vt in ipsis primordijs mo-
„ tiui mundi, per telluris media transibat: ita nunc per
„ centrum ad eadem superficiei puncta tendit, per-
„ manente etiam aequinoctialis lineae circulo & pla-
„ no. Non enim sine vastissima terrenae molis demo-
„ litione, immutari naturales hij termini possunt, vt
„facile est ex magneticis demonstrationibus colligere. Quare Do-
„minici Mariae Ferrariensis, viri ingeniosissimi, qui fuit Nicolai Co-
„pernici praeceptor, opinio delenda est, quae ex observationibus qui-
„busdam suis talis est.“

Tout de suite après on lit dans cette édition (p. 213, lig. 1—29) le passage ci-dessus mentionné de l' édition de 1489 cité ci-dessus. Après avoir rapporté ce passage G. Gilbert ajoute (GVILELMI GIL- | BERTI, etc. DE MAGNETE, etc., p. 213, lig. 29—33):

„Ita iuxta has Dominici Mariae obser-
„uationes, polus Boreus altiùs eleuatur, & latitudines regionum ma-
„iores existunt, quàm olim; unde immutationem arguit latitudinum.
„Iam verò Stadius contrariâ prorsus opinione decreuisse latitudines
„per obseruationes probat.“

La Bibliothèque Angelica de Rome possède un exemplaire coté „g. 4. 9“ d' une édition intitulée „ERATOSTHENES | BATAVVS | „De Terrae ambitus vera | quantitate, | A | WILLEBRORDO SNELLIO „ | Διὰ τῶν ἐξ ἀποςημάτων με- | τρουσῶν διοπτρῶν, | *Suscitatus* „ | LVGDVNI BATAVORVM, | Apud IODOCVM à COLSTER | Ann ,clↄ Iↄ CXVII.“ Dans cette édition (p. 40, lig. 25—28. LIBER I CAP. VIII) on lit:

„Cujus mentionem nobis facit
„indefessi laboris & maximi ingenij vir Antonius Magi-
„nus ad suas tabulas canone octavo. verba ipsa, quia le-
„ctu non sunt indigna, huc transcribere placuit.“

Immédiatement après on trouve dans cette édition (p. 40, lig. 28—32; p. 41; p. 42, lig. 1—8) tout ce qu' on lit dans le passage ci-dessus rapporté de l' édition intitulée „TABVLAE | „SECVNDORVM | MOBILIVM“, etc. depuis les mots „imo & aliorum“ (voyez ci-dessus, p. 200, lig. 36) jusqu' au mot „tardissimus“ voyez ci-dessus p. 201, lig. 29.

La Bibliothèque Angelica possède aussi un exemplaire coté „h. 10. 21“ d' un volume intitulé „AD | MAGNANIMVM PRINCIPEM „HONORATVM II. | MONOECI PRINCIPEM, etc. ALMAGESTI NOVI „ | PARS POSTERIOR | TOMI PRIMI“. Dans ce volume (p. 348, col. 2, lig. 37—44. LIBRI IX, SECTIO IV, §. VII) on lit:

„Sub finem decimiquarti *(sic!)* saeculi Dominicus Ma-
„ria Ferrariensis, vir summo ingenio praeditus, & Nico-
„lai Copernici praeceptor, primus. quem sciam, hanc de
„mutatione altitudinis poli opinionem excitauit, in quo-
„dam tractatu seu vaticinio Bononiae edito Anno 1489
„ex quo *Maginus* Canone 8. secundorum Mobilium &
„*Gulielmus Gilbertus* lib. 6. de Magnete cap. 2 verba hac
„selegit."

Tout de suite après on lit dans ce volume (p. 348, col. 2, lig. 44—75) le passage cité ci-dessus de l'édition ci-dessus mentionnée de 1489. Le Père Riccioli ajoute ensuite (AD | MAGNANIMVM PRINCIPEM, etc. ALMAGESTI NOVI | PARS POSTERIOR | TOMI PRIMI, p. 348, col. 2, lig. 76—78; p. 349, col. 1, lig. 1—6):

„Porrò huic Dominici Mariae commēto subscripsit no-
„uitatum plurimarum studiosus *Iordanus Brunus* Nola-
„nus in suis libris de Maximo & Immenso, & de Infinito
„ac Innumerabilibus pagina 306. & quod magis mirere,
„*Io. Antonius Maginus* in tabulis Secundorum Mobiliū
„Canone 8. vbi ait, se auxisse locorum latitudines in suo
„catalogo, propter obseruationes recensiores Petri Pitati
„& aliorum, qui eas auctas ac maiores, quàm Ptolemaei
„tempore, nacti sunt: additq."

Le Père Riccioli rapporte ensuite (AD | MAGNANIMVM PRINCIPEM, etc. ALMAGESTI NOVI | PARS POSTERIOR | TOMI PRIMI, p. 349, col. 1, lig. 6—13) une partie du passage ci-dessus mentionné de l' edition intitulée „TABVLAE | SECVNDORVM | MOBI-„LIVM", etc. depuis les mots „imo & aliorum" (voyez ci-dessus, p. 200, lig. 36); jusqu' aux mots „superioribus annis" (voyez ci-dessus, p. 201, lig. 3—4).

La Bibliothèque Barberini de Rome possède un exemplaire actuellement coté „O. XII. 13" et anciennement côté „LXXII. E. 2" d' une édition intitulée „TYCHONIS | BRAHEI, | EQVITIS DANI, | „Astronomorum Coryphaei | VITA. | *Authore PETRO GASSENDO* „*Regio* | *Matheseos Professore* | ACCESSIT | NICOLAI COPERNICI, „GEORGII PEVRBACHII, (& JOANNIS REGIOMONTANI | Astronomo-„rum celebrium | VITA. | MARISIIS, | Apud Viduam PATHVRINI | „DVPVIS, viâ Iacobaeâ, sub | signo Coronae Aureae. | M. DC. LIV. „| CVM PRIVILEGIO REGIS". Dans cette édition (dernière numération, p. 5, lig. 26 -36; p. 6, lig. 1—7; NICOLAI COPERNICI, etc. VITA, etc.) on lit:

„Stitit se verò primium Bononiae, ob eruditionem, ac
„famam eximij viri Dominici Mariae Ferrariensis, qui ab an-
„nis iam duodecim illûc auocatus Astronomiam magna cum
„laude profitebatur, ac reperisse perhibebatur obliquitatum
„Eclipticae medio inter Peurbachium, & Regiomontanum
„loco, graduum putà 23. & minut. 29. Nec verò difficile fuit
„in Optimi viri familiaritatem admitti; quandò esse illi gra-
„tius nihil potuit, quàm auditorem habere, vt perspicacissi-
„mum, sic appetentissimum veritatis. Delectauit autem il-
„lum maximè non improbari Copernico suspicionem, qua
„tenebatur, ne Poli in eodem loco altitudo non tam con-
„stans foret, quàm vulgò haberetur; quòd ea deprehendere-
„tur à Ptolemaei; tempore in omnibus propemodum Italiae
„locis increuisse, ac in Gaditano etiam freto, vbi cùm tem-
„pore Ptolemaei Polus Boreus attolleretur gradibus solum
„36. cum quadrante, attolleretur iam tum gradibus 37. cum
„duabus quintis; quod ille quidem prodiderat in quodam
„Prognostico, ante octo annos."

Ce passage de la première édition de la vie de Copernic écrite par Gassendi, dans lequel on trouve cité le Pronostic ci-dessus mentionné, a été reproduit 1° dans le volume intitulé „PETRI | GASSENDI | DINIENSIS, etc. MISCELLANEA, etc. TOMVS „QVINTVS, etc. LVGDVNI | Sumptibus LAVRENTII ANISSON, etc. *M.DC.LVIII*, etc., p. 499, col. 2, lig. 8—32; 2° dans le volume intitulé: „PETRI GASSENDI | DINIENSIS, etc. MISCELLANEA, etc. „Tomus Quintus, etc. FLORENTIAE | TYPIS REGIAE CELSITUDI-„NIS", etc. (p. 441, col. 1, lig. 9—31)

Druckfehler.

Durch die Verkehrsstörungen, in Folge der strengen Kälte, sind auf den letzten Bogen einige Druckfehler stehen geblieben, die man gefälligst verbessern möge:

Seite 161, Zeile 30 für „letzten" setze man „ersten".
„ 162, „ 38 „ „er, der ihn — beraubte" „ „ „er, der, wenn er ihn auch nicht beraubt hätte".
„ 166, „ 7 „ „e" „ „ „et".
„ „ „ 25 „ „Bilanzia" „ „ „Bilancia".
„ 178, „ 33 „ „wovon — Theil" „ „ „wahrscheinlich nicht einmal"
„ „ „ 39 hinter dem Worte Cossali füge man in Parenthese hinzu: (Origine ecc. dell' Algebra, Vol. 2. p. 164).
„ „ „ 46 hinter dem Worte Cossali füge man in Parenthese hinzu: (*A. a. O.*, p. 165).
„ 179, „ 44 für „unerwarteten" setze man „unbedachtsamen".
„ 181, „ 31 „ „Bertoli" „ „ „Bartoli".
„ „ „ 43 „ „Cosali" „ „ „Cossali".
„ 184, „ 7 „ „Alicato" „ „ „Alciato".
„ 189 u. ff. lese man überall „Grassellini" für „Grasselini".

X.

Theorie des vollständigen elliptischen Vierseits und deren Anwendung.

Von

Herrn Gymnasiallehrer *Carl Mittelacher*
in St. Petersburg.

(Figuren s. Taf. II., III. u. IV.)

§. 1.

Die Gleichung der Ellipse in Bezug auf ein beliebiges Coordinaten-System, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Curve liegt, sei gegeben in der allgemeinen Form:

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 = F_0.$$

Die auf dasselbe Coordinaten-System bezogene Gleichung einer Secante, welche durch den willkührlich gewählten Punkt $x_{,}y_{,}$ geht und deren Längeneinheit die Richtungs-Componenten $\alpha_{,}\beta_{,}$ hat, sei:

$$\alpha_{,}(y-y_{,}) = \beta_{,}(x-x_{,}).$$

Alsdann findet man die Länge der Abschnitte $\varrho\varrho_1$, welche die Ellipse auf dieser Secante bestimmt, unter Anwendung der Relation:

$$\frac{x-x_{,}}{\alpha_{,}} = \varrho = \frac{y-y_{,}}{\beta_{,}},$$

und wenn wir zur Abkürzung:

$$A\beta_{,}^2 + 2B\alpha_{,}\beta_{,} + C\alpha_{,}^2 = A_{,}; \quad Ay_{,}^2 + 2Bx_{,}y_{,} + Cx_{,}^2 = C_{,};$$
$$(A\beta_{,} + B\alpha_{,})y_{,} + (B\beta_{,} + C\alpha_{,})x_{,} = B_{,}$$

setzen, aus der Gleichung:

$$A_{,}\varrho^2 + 2B_{,}\varrho + C_{,} = F_0.$$

Soll ϱ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe haben, so muss das Glied, welches diese Grösse in der ersten Potenz enthält, verschwinden, und daraus ersehen wir, dass:

$$(A\beta_{,} + B\alpha_{,})y + (B\beta_{,} + C\alpha_{,})x = 0$$

die Gleichung des der Richtung $\alpha_{,}\beta_{,}$ conjugirten Durchmessers ist. Die Richtungs-Componenten der Längeneinheit dieses Durchmessers sind also mit Rücksicht auf die Gleichung:

$$\alpha_{,}^2 + 2\alpha_{,}\beta_{,}\cos\omega + \beta_{,}^2 = 1,$$

und wenn wir wieder der Kürze halber:

$$A - 2B\cos\omega + C = A_0; \quad AC - B^2 = B_0$$

setzen:

$$\alpha' = -\frac{A\beta_{,} + B\alpha_{,}}{\sqrt{A_0A_{,} - B_0}}; \quad \beta' = \frac{B\beta_{,} + C\alpha_{,}}{\sqrt{A_0A_{,} - B_0}};$$

so dass zwischen $\alpha'\beta'$ und den Componenten $\alpha_{,}\beta_{,}$ der gegebenen Richtung die Relation stattfindet:

$$A\beta_{,}\beta' + B(\alpha_{,}\beta' + \alpha'\beta_{,}) + C\alpha_{,}\alpha' = 0.$$

Auch muss sich durch Verlegung des willkührlich gewählten Punktes $x_{,}y_{,}$ in den Coordinaten-Anfang die Länge des der Richtung $\alpha_{,}\beta_{,}$ parallelen Halbmessers a_0 aus der Gleichung für ϱ ergeben, indem wir darin $x_{,} = y_{,} = 0$ setzen:

$$a_0^2 = \frac{F_0}{A_{,}},$$

und in dieser Formel können an Stelle von $\alpha_{,}\beta_{,}$ die Richtungs-Componenten des conjugirten Halbmessers eingeführt werden, so haben wir zur Bestimmung der Länge des letzteren die Gleichung:

$$b_0^2 = \frac{(A_0A_{,} - B_0)\,F_0}{B_0A_{,}}.$$

Man denke sich (Fig. 1.) nun zwei beliebige Richtungen (I III) mit den Componenten $\alpha_{,}\beta_{,}$ und $\alpha_{,,}\beta_{,,}$, berechne nach den gegebenen Formeln die Componenten ihrer conjugirten Richtungen (II IV), auch die Längen der parallelen Halbmesser und führe die Werthe der vier Paare von Richtungs-Componenten zu je zweien in die allgemeine Gleichung:

$$\sin\psi = (\alpha_{,}\beta_{,,} - \alpha_{,,}\beta_{,})\sin\omega$$

ein, wo ω den Coordinatenwinkel, ψ den Winkel der Richtu $\alpha_{,}\beta_{,}$ und $\alpha_{,,}\beta_{,,}$ bedeutet.

Nennen wir alsdann das durch zwei beliebig gewählte deren conjugirte Richtungen bestimmte Liniensystem der fachen Characterisirung wegen ein **Vollständiges elliptisc Vierseit**, schreiben auch in den Resultaten einige zusam gesetzte Ausdrücke kürzer:

$$\sqrt{A_0A_{,} - B_0} = Q_{,};\quad \sqrt{A_0A_{,,} - B_0} = Q_{,,};$$
$$A\beta_{,}\beta_{,,} + B(\alpha_{,}\beta_{,,} + \alpha_{,,}\beta_{,}) + C\alpha_{,}\alpha_{,,} = M;$$
$$\alpha_{,}\beta_{,,} - \alpha_{,,}\beta_{,} = \mu;$$

so sind:

a. Die Richtungs-Componenten der Seiten des elliptischen Vier

$$\text{a)} \ldots \begin{cases} \text{I.} & \alpha_{,}; & \beta_{,}; \\ \text{II.} & \alpha' = -\dfrac{A\beta_{,} + B\alpha_{,}}{Q_{,}}; & \beta' = \dfrac{B\beta_{,} + C\alpha_{,}}{Q_{,}}; \\ \text{III.} & \alpha_{,,}; & \beta_{,,}; \\ \text{IV.} & \alpha'' = -\dfrac{A\beta_{,,} + B\alpha_{,,}}{Q_{,,}}; & \beta'' = \dfrac{B\beta_{,,} + C\alpha_{,,}}{Q_{,,}}. \end{cases}$$

b. Die den Seiten des elliptischen Vierseits parallelen Halbmes

$$\text{b)} \ldots \begin{cases} \text{I.}\ a_0^2 = \dfrac{F_0}{A_{,}}; & \text{III.}\ c_0^2 = \dfrac{F_0}{A_{,,}}; \\ \text{II.}\ b_0^2 = \dfrac{Q_{,}^2F_0}{B_0A_{,}}; & \text{IV.}\ d_0^2 = \dfrac{Q_{,,}^2F_0}{B_0A_{,,}}. \end{cases}$$

c. Die Sinus der Winkel des elliptischen Vierseits:

$$\text{c)} \ldots \begin{cases} \sin(\text{I II}) = \dfrac{A_{,}\sin\omega}{Q_{,}} = \sin\varepsilon; & \sin(\text{III IV}) = \dfrac{A_{,,}\sin\omega}{Q_{,,}} = \text{si} \\ \sin(\text{II III}) = \dfrac{M\sin\omega}{Q_{,}} = \sin\varphi; & \sin(\text{I IV}) = \dfrac{M\sin\omega}{Q_{,,}} = \text{si} \\ \sin(\text{I III}) = \mu\sin\omega = \sin\psi; & \sin(\text{II IV}) = \dfrac{B_0\mu\sin\omega}{Q_{,}Q_{,,}} = \text{si} \end{cases}$$

Diese Formeln reichen hin, um den Beweis einiger Lehrsätze

zutreten, welche ihrer fundamentalen Bedeutung halber geeignet erscheinen, in die Geometrie eingeführt zu werden.

§. 2.

Stellen wir uns also die Aufgabe, die Seiten des elliptischen Vierseits und deren Abschnitte einzeln in Coordinaten der gegebenen Punkte $(x_, y_,)$ $(x_{,,} y_{,,})$ in Componenten der durch diese Punkte gezogenen Richtungen $(\alpha_, \beta_,)$ $(\alpha_{,,} \beta_{,,})$ und in Coefficienten der allgemeinen Gleichung auszudrücken. Dazu setze man:

$$x_, - x_{,,} = \xi; \quad y_, - y_{,,} = \eta;$$

$$\beta_, \xi - \alpha_, \eta = z_,; \quad \beta_{,,} \xi - \alpha_{,,} \eta = z_{,,};$$

$$A\beta_, \eta + B(\alpha_, \eta + \beta_, \xi) + C\alpha_, \xi = B_,;$$

$$A\beta_{,,} \eta + B(\alpha_{,,} \eta + \beta_{,,} \xi) + C\alpha_{,,} \xi = B_{,,};$$

so lassen sich zwischen diesen Ausdrücken und den im vorigen Paragraphen eingeführten zunächst folgende Hülfs-Relationen aufstellen:

$$\text{d)} \ldots\ldots \quad \begin{cases} A_, z_{,,} - B_, \mu = M z_,, \\ A_{,,} z_, + B_{,,} \mu = M z_{,,}; \\ A_, B_{,,} + B_0 z_, \mu = M B_,, \\ A_{,,} B_, - B_0 z_{,,} \mu = M B_{,,}. \end{cases}$$

Legt man nun durch die Punkte $(x_, y_,)$ $(x_{,,} y_{,,})$ die zu $\alpha_, \beta_,$ und $\alpha_{,,} \beta_{,,}$ conjugirten Richtungen und benennt in dem so entstandenen elliptischen Vierseit:

die Seite I	mit a;	ihre Abschnitte mit	$a_,$	und	$a_{,,}$;
„ „ II	„ b;	„ „ „	$b_,$	„	$b_{,,}$;
„ „ III	„ c;	„ „ „	$c_,$	„	$c_{,,}$;
„ „ IV	„ d;	„ „ „	$d_,$	„	$d_{,,}$;

so sind von diesen Seiten a und b conjugirt, eben so c und d und die resp. Winkel beider Paare von conjugirten Richtungen dieselben, welche Oben mit ε und $\varepsilon_,$ bezeichnet worden sind.

Durch einfache Betrachtung der entstandenen Dreiecke und Einführung der im vorigen Paragraphen für die Sinus der Winkel des Vierseits abgeleiteten Werthe findet man jetzt trigonometrisch die Länge aller Seiten desselben und deren Abschnitte:

$$\text{e)} \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} c_{\prime} &= \frac{z_{\prime}}{\mu}; & a &= \frac{z_{\prime\prime}}{\mu}; \\ c &= \frac{A_{\prime} z_{\prime\prime}}{M\mu}; & a_{\prime} &= \frac{A_{\prime\prime} z_{\prime}}{M\mu}; \\ c_{\prime\prime} &= \frac{B_{\prime}}{M}; & a_{\prime\prime} &= \frac{B_{\prime\prime}}{M}; \\ b_{\prime} &= \frac{z_{\prime\prime} Q_{\prime}}{M}; & d_{\prime} &= \frac{z_{\prime} Q_{\prime\prime}}{M}; \\ b_{\prime\prime} &= \frac{B_{\prime\prime} Q_{\prime}}{B_0 \mu}; & d &= \frac{B_{\prime} Q_{\prime\prime}}{B_0 \mu}; \\ b &= \frac{A_{\prime\prime} B_{\prime} Q_{\prime}}{B_0 M \mu}; & d_{\prime\prime} &= \frac{A_{\prime} B_{\prime\prime} Q_{\prime\prime}}{B_0 M \mu}. \end{aligned} \right.$$

Von diesen Strecken sind zuerst $ac_{\prime}$ und $a_{\prime}c$ und daraus unter Anwendung der Hülfs-Relationen 1. und 2. $a_{\prime\prime}c_{\prime\prime}$ berechnet worden. Darauf bestimme man $b_{\prime}d_{\prime}$ und $b_{\prime\prime}d$ und hieraus mittels der Hülfsgleichungen 3. und 4. $bd_{\prime\prime}$.

Um sich von der Richtigkeit der aufgefundenen Werthe zu überzeugen, kann man dieselben an folgenden bekannten für jedes beliebige Vierseit gültigen Gleichungen einer Prüfung unterziehen:

$$\begin{aligned} abd_{\prime} &= \frac{A_{\prime\prime} B_{\prime} z_{\prime} z_{\prime\prime} Q_{\prime} Q_{\prime\prime}}{B_0 M^2 \mu^2} = a_{\prime} b_{\prime} d_{\prime}, \\ cda_{\prime\prime} &= \frac{A_{\prime} B_{\prime} B_{\prime\prime} z_{\prime\prime} Q_{\prime\prime}}{B_0 M^2 \mu^2} = c_{\prime\prime} d_{\prime\prime} a, \\ b_{\prime} c_{\prime} d_{\prime\prime} &= \frac{A_{\prime} B_{\prime\prime} z_{\prime} z_{\prime\prime} Q_{\prime} Q_{\prime\prime}}{B_0 M^2 \mu^2} = b_{\prime\prime} c d_{\prime}, \\ b_{\prime\prime} c_{\prime\prime} a &= \frac{A_{\prime\prime} B_{\prime} B_{\prime\prime} z_{\prime} Q_{\prime}}{B_0 M^2 \mu^2} = b c_{\prime} a_{\prime\prime}. \end{aligned}$$

Nunmehr combinire man die für die Seiten des elliptischen Vierseits und deren Abschnitte bestimmten Ausdrücke mit den in §. 1. b. für die Quadrate der ihnen parallelen Halbmesser aufgestellten Werthen, indem man immer das Product aus je zweien derselben Richtung angehörigen Strecken durch das Quadrat des ihnen parallelen Halbmessers der Ellipse dividirt, und es ergeben sich ohne Weiteres die Gleichungen:

$$\text{I)} \ldots\ldots \left\{\begin{aligned}
\frac{aa_{\prime}}{a_0^2} &= \frac{A_{\prime}A_{\prime\prime}z_{\prime}z_{\prime\prime}}{M\mu^2F_0} = \frac{cc_{\prime}}{c_0^2},\\
\frac{bb_{\prime}}{b_0^2} &= \frac{A_{\prime}A_{\prime\prime}B_{\prime}z_{\prime\prime}}{M^2\mu F_0} = \frac{cc_{\prime\prime}}{c_0^2},\\
\frac{dd_{\prime}}{d_0^2} &= \frac{A_{\prime\prime}B_{\prime}z_{\prime}}{M\mu F_0} = \frac{c_{\prime}c_{\prime\prime}}{c_0^2},\\
\frac{aa_{\prime\prime}}{a_0^2} &= \frac{AB_{\prime\prime}z_{\prime\prime}}{M\mu F_0} = \frac{b_{\prime}b_{\prime\prime}}{b_0^2},\\
\frac{a_{\prime}a_{\prime\prime}}{a_0^2} &= \frac{A_{\prime}A_{\prime\prime}B_{\prime\prime}z_{\prime}}{M^2\mu F_0} = \frac{d_{\prime}d_{\prime\prime}}{d_0^2},\\
\frac{bb_{\prime\prime}}{b_0^2} &= \frac{A_{\prime}A_{\prime\prime}B_{\prime}B_{\prime\prime}}{B_0M\mu^2F_0} = \frac{dd_{\prime\prime}}{d_0^2}.
\end{aligned}\right.$$

Nennen wir also den Quotienten aus irgend einer Strecke dividirt durch den parallelen Halbmesser der Ellipse kurz eine **reducirte Strecke**, betrachten je zwei Richtungen des Systems und die von ihrem Durchschnittspunkt aus genommenen Abschnitte, welche die beiden anderen Richtungen auf ihnen bestimmen, so lassen sich die gegebenen Gleichungen in folgenden Satz zusammenfassen:

Lehrsatz I. In jedem vollständigen elliptischen Vierseit sind die Producte der von einer Ecke aus genommenen und reducirten Abschnitte je zweier Seiten einander gleich.

Indem wir aber das Quadrat jeder Strecke durch das Quadrat des ihr parallelen Halbmessers dividiren und die erhaltenen Quotienten mit den in I) gewonnenen Resultaten vergleichen, so ergeben sich unter Anwendung der Hülfs-Relationen d) eben so leicht die Gleichungen:

$$\text{IIa)} \ldots\ldots \left\{\begin{aligned}
\frac{a^2}{a_0^2} &= \frac{A_{\prime}z_{\prime\prime}^2}{\mu^2F_0} = \frac{cc_{\prime}}{c_0^2} + \frac{b_{\prime}b_{\prime\prime}}{b_0^2},\\
\frac{b^2}{b_0^2} &= \frac{A_{\prime}A_{\prime\prime}^2B_{\prime}^2}{B_0M^2\mu^2F_0} = \frac{cc_{\prime\prime}}{c_0^2} + \frac{dd_{\prime\prime}}{d_0^2},\\
\frac{c^2}{c_0^2} &= \frac{A_{\prime}^2A_{\prime\prime}z_{\prime\prime}^2}{M^2\mu^2F_0} = \frac{aa_{\prime}}{a_0^2} + \frac{bb_{\prime}}{b_0^2},\\
\frac{d^2}{d_0^2} &= \frac{A_{\prime\prime}B_{\prime}^2}{B_0\mu^2F_0} = \frac{bb_{\prime\prime}}{b_0^2} + \frac{c_{\prime}c_{\prime\prime}}{c_0^2}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{III)} \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} : \dfrac{\sin\varphi_{,}}{\sin\varepsilon_{,}} = \dfrac{A_{,,}}{A_{,}} \quad = \dfrac{a_0^2}{c_0^2}, \\[2ex] \dfrac{\sin\psi}{\sin\varepsilon} : \dfrac{\sin\psi_{,}}{\sin\varepsilon_{,}} = \dfrac{A_{,,}Q_{,}}{B_0 A_{,}} = \dfrac{b_0^2}{c_0^2}, \\[2ex] \dfrac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon_{,}} : \dfrac{\sin\varphi_{,}}{\sin\varepsilon} = \dfrac{A_{,}Q_{,,}}{A_{,,}Q_{,}} = \dfrac{d_0^2}{b_0^2}, \\[2ex] \dfrac{\sin\psi}{\sin\varepsilon_{,}} : \dfrac{\sin\psi_{,}}{\sin\varepsilon} = \dfrac{A_{,}Q_{,,}}{B_0 A_{,,}} = \dfrac{d_0^2}{c_0^2}. \end{array} \right.$$

Im Ganzen lassen sich sechs Gleichungen aufstellen, aber ich gebe die genannten vier gesondert, weil man die anderen aus ihnen herleiten kann. Denn wir finden nicht blos unmittelbar aus den Formeln b) und c) §. 1., sondern auch durch Division der ersten mit der zweiten und Multiplication der ersten und letzten Gleichung unter III), dass:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} : \frac{\sin\varphi_{,}}{\sin\psi_{,}} = \frac{B_0}{Q_{,}} = \frac{a_0^2}{b_0^2},$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi_{,}} : \frac{\sin\varphi_{,}}{\sin\psi} = \frac{Q_{,,}}{B_0} = \frac{d_0^2}{c_0^2}.$$

Die Oben citirte Formel:

$$\operatorname{tang}\varphi \,.\, \operatorname{tang}\psi = -\frac{b^2}{a^2}$$

geht aus einer der vorstehenden hervor, indem man z. B. an Stelle von c_0 und d_0 die halben Hauptaxen und an Stelle der anderen conjugirten Richtungen zwei conjugirte Durchmesser einführt; so wird:

$$\sin\psi_{,} = \sin(90^0 - \varphi) = \cos\varphi; \quad \sin\varphi_{,} = \sin(\psi - 90^0) = -\cos\psi;$$

$$c_0 = a; \quad d_0 = b$$

und daraus resultirt die Formel.

Da die Seiten eines Dreiecks sich zu einander verhalten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, so geht Satz III. gerade in I) über, indem man überall die resp. Seitenverhältnisse substituirt:

$$\text{I)} \ldots\ldots \left\{\begin{aligned}
\frac{a_0^2}{c_0^2} &= \frac{a}{c} : \frac{c_{\prime}}{a_{\prime}} = \frac{aa_{\prime}}{cc_{\prime}}, \\
\frac{b_0^2}{c_0^2} &= \frac{b_{\prime}}{c} : \frac{c_{\prime\prime}}{b} = \frac{bb_{\prime}}{cc_{\prime\prime}}, \\
\frac{d_0^2}{b_0^2} &= \frac{d}{b} : \frac{b_{\prime\prime}}{d_{\prime\prime}} = \frac{dd_{\prime\prime}}{bb_{\prime\prime}}, \\
\frac{d_0^2}{a_0^2} &= \frac{d_{\prime}}{a_{\prime}} : \frac{a_{\prime\prime}}{d_{\prime\prime}} = \frac{d_{\prime}d_{\prime\prime}}{a_{\prime}a_{\prime\prime}}, \\
\frac{a_0^2}{b_0^2} &= \frac{a}{b_{\prime}} : \frac{b_{\prime\prime}}{a_{\prime\prime}} = \frac{aa_{\prime\prime}}{b_{\prime}b_{\prime\prime}}, \\
\frac{d_0^2}{c_0^2} &= \frac{d}{c_{\prime\prime}} : \frac{c_{\prime}}{d} = \frac{dd_{\prime}}{c_{\prime}c_{\prime\prime}};
\end{aligned}\right.$$

und Lehrsatz II. ergiebt sich dann aus I. durch einfache Combination (Addition oder Subtraction) solcher vorher reducirten Producte, welche einen Factor gemeinschaftlich haben:

$$\text{II)} \ldots \left\{\begin{aligned}
\frac{a^2}{a_0^2} &= \frac{aa_{\prime}}{a_0^2} + \frac{aa_{\prime\prime}}{a_0^2} = \frac{cc_{\prime}}{c_0^2} + \frac{b_{\prime}b_{\prime\prime}}{b_0^2}, \\
\frac{b^2}{b_0^2} &= \frac{bb_{\prime}}{b_0^2} + \frac{bb_{\prime\prime}}{b_0^2} = \frac{cc_{\prime\prime}}{c_0^2} + \frac{dd_{\prime\prime}}{d_0^2}, \\
\frac{c^2}{c_0^2} &= \frac{cc_{\prime}}{c_0^2} + \frac{cc_{\prime\prime}}{c_0^2} = \frac{aa_{\prime}}{a_0^2} + \frac{bb_{\prime}}{b_0^2}, \\
\frac{d^2}{d_0^2} &= \frac{dd_{\prime}}{d_0^2} + \frac{dd_{\prime\prime}}{d_0^2} = \frac{bb_{\prime\prime}}{b_0^2} + \frac{c_{\prime}c_{\prime\prime}}{c_0^2}, \\
\frac{a_{\prime}^2}{a_0^2} &= \frac{aa_{\prime}}{a_0^2} - \frac{a_{\prime}a_{\prime\prime}}{a_0^2} = \frac{cc_{\prime}}{c_0^2} - \frac{d_{\prime}d_{\prime\prime}}{d_0^2}, \\
\frac{a_{\prime\prime}^2}{a_0^2} &= \frac{aa_{\prime\prime}}{a_0^2} - \frac{a_{\prime}a_{\prime\prime}}{a_0^2} = \frac{b_{\prime}b_{\prime\prime}}{b_0^2} - \frac{d_{\prime}d_{\prime\prime}}{d_0^2}, \\
\frac{b_{\prime}^2}{b_0^2} &= \frac{bb_{\prime}}{b_0^2} - \frac{b_{\prime}b_{\prime\prime}}{b_0^2} = \frac{cc_{\prime\prime}}{c_0^2} - \frac{aa_{\prime\prime}}{a_0^2}, \\
\frac{b_{\prime\prime}^2}{b_0^2} &= \frac{bb_{\prime\prime}}{b_0^2} - \frac{b_{\prime}b_{\prime\prime}}{b_0^2} = \frac{dd_{\prime\prime}}{d_0^2} - \frac{aa_{\prime\prime}}{a_0^2}, \\
\frac{c_{\prime}^2}{c_0^2} &= \frac{cc_{\prime}}{c_0^2} - \frac{c_{\prime}c_{\prime\prime}}{c_0^2} = \frac{aa_{\prime}}{a_0^2} - \frac{dd_{\prime}}{d_0^2}, \\
\frac{c_{\prime\prime}^2}{c_0^2} &= \frac{cc_{\prime\prime}}{c_0^2} - \frac{c_{\prime}c_{\prime\prime}}{c_0^2} = \frac{bb_{\prime}}{b_0^2} - \frac{dd_{\prime}}{d_0^2}, \\
\frac{d_{\prime}^2}{d_0^2} &= \frac{dd_{\prime}}{d_0^2} - \frac{d_{\prime}d_{\prime\prime}}{d_0^2} = \frac{c_{\prime}c_{\prime\prime}}{c_0^2} - \frac{a_{\prime}a_{\prime\prime}}{a_0^2}, \\
\frac{d_{\prime\prime}^2}{d_0^2} &= \frac{dd_{\prime\prime}}{d_0^2} - \frac{d_{\prime}d_{\prime\prime}}{d_0^2} = \frac{b_{\prime}b_{\prime\prime}}{b_0^2} - \frac{a_{\prime}a_{\prime\prime}}{a_0^2}.
\end{aligned}\right.$$

Mit Hülfe des Satzes III. lassen sich also die Lehrsätze I. und II. eben so leicht erweisen, wie die mit dem Pythagoräischen Lehrsatze zusammenhängenden Lehrsätze aus der Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 4.

Gehen (Fig. 2.) drei der Linien des Systems durch denselben Punkt, z. B. die Gerade (IV) des zweiten Paares conjugirter Richtungen mit den Richtungen (I II) des ersten Paares, so bilden die Geraden (I II) mit ihrer Transversalen (III) die Seiten eines Dreiecks, welches wir allgemein ein **elliptisches Dreieck** nennen wollen, die beiden conjugirten Seiten (I II) dessen **Katheten**, ihre Transversale (III) die **Hypotenuse** und die zur Hypotenuse conjugirte Richtung (IV) die **Ordinate** des Dreiecks.

Nennen wir die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Katheten $x_{,}y_{,}$ und die Richtungs-Componenten einer derselben $\alpha_{,}\beta_{,}$; die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Hypotenuse $x_{,,}y_{,,}$ und deren Richtungs-Componenten $\alpha_{,,}\beta_{,,}$, setzen wieder zur Abkürzung:

$$(x_{,}-x_{,,})\alpha_{,,}-(y_{,}-y_{,,})\beta_{,,}=z,$$

so findet man wie in §. 2., da die Winkel $\varphi\varphi_{,}$, $\psi\psi_{,}$ und $\varepsilon\varepsilon_{,}$ ihre Bedeutung beibehalten:

$$\text{f)} \ldots\ldots \begin{cases} a=\dfrac{1}{\mu}.z; & d=\dfrac{Q_{,,}}{A_{,,}}.z; \\ c=\dfrac{A_{,}}{M\mu}.z; & c_{,}=\dfrac{M}{A_{,,}\mu}.z; \\ b=\dfrac{Q_{,}}{M}.z; & c_{,,}=\dfrac{B_0\mu}{A_{,,}M}.z; \end{cases}$$

und daraus unter Zuziehung der Formeln b) §. 1. die zusammengesetzten Grössen:

$$\text{IVa)} \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{a^2}{a_0^2}=\dfrac{A_{,}}{\mu^2F_0}.z^2=\dfrac{cc_{,}}{c_0^2}, \\ \dfrac{b^2}{b_0^2}=\dfrac{B_0A_{,}}{M^2F_0}.z^2=\dfrac{cc_{,,}}{c_0^2}. \end{cases}$$

$$\text{IVb)} \ldots\ldots \dfrac{d^2}{d_0^2}=\dfrac{B_0}{A_{,,}F_0}.z^2=\dfrac{c_{,}c_{,,}}{c_0^2}.$$

Lehrsatz IV. In jedem elliptischen Dreieck ist:

a) das Quadrat einer reducirten Kathete gleich dem Product aus der reducirten Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt;

b) das Quadrat der reducirten Ordinate gleich dem Product aus den reducirten Abschnitten der Hypotenuse.

Macht man ferner Anwendung von der Hülfs-Relation:

d) . . . . $A_{,}A_{,,} - B_0\mu^2 = M^2$,

so ergiebt sich:

$$\text{V)} \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{c^2}{c_0^2} = \dfrac{A_{,}^2 A_{,,}}{M^2\mu^2 F_0} . z^2 = \dfrac{a^2}{a_0^2} + \dfrac{b^2}{b_0^2}, \\ \dfrac{c_{,}^2}{c_0^2} = \dfrac{M^2}{A_{,,}\mu^2 F_0} . z^2 = \dfrac{a^2}{a_0^2} - \dfrac{d^2}{d_0^2}, \\ \dfrac{c_{,,}^2}{c_0^2} = \dfrac{B_0^2\mu^2}{A_{,,}M^2 F_0} . z^2 = \dfrac{b^2}{b_0^2} - \dfrac{d^2}{d_0^2}. \end{array} \right.$$

Lehrsatz V. In jedem elliptischen Dreieck ist das Quadrat der reducirten Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate aus den reducirten Katheten.

Je nachdem der Punkt $x_{,,}y_{,,}$ in C, D oder B gewählt wird, tritt an Stelle von z:

$$z = \frac{a \sin \psi}{\sin \omega} = \mu . a,$$

$$z = \frac{b \sin \varphi}{\sin \omega} = \frac{M}{Q_{,}} . b,$$

$$z = \frac{d \sin \varepsilon_{,}}{\sin \omega} = \frac{A_{,,}}{Q_{,,}} . d;$$

welche Werthe man in die Gleichungen f) einzuführen hätte, um jedesmal alle Strecken des Systems durch eine einzige bekannte, die gegebenen Richtungs-Componenten $(\alpha_{,}\beta_{,})(\alpha_{,,}\beta_{,,})$ und in Coefficienten der allgemeinen Gleichung ausgedrückt zu erhalten. Natürlich hätten die Gleichungen IV) und V) auch direct aus I) und II) abgeleitet werden können, indem man darin die Substitutionen:

$$a_{,,} = b_{,,} = d_{,,} = 0;$$

$$a_{,} = a; \quad b_{,} = b; \quad d_{,} = d$$

ausführt.

Unabhängig findet man sie aber wiederum aus Lehrsatz III., weil:

$$\frac{a_0^2}{c_0^2} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} : \frac{\sin\varphi_{,}}{\sin\varepsilon_{,}} = \frac{a}{c} : \frac{c_{,}}{a} = \frac{a^2}{cc_{,}},$$

$$\frac{b_0^2}{c_0^2} = \frac{\sin\psi}{\sin\varepsilon} : \frac{\sin\psi_{,}}{\sin\varepsilon_{,}} = \frac{b}{c} : \frac{c_{,,}}{b} = \frac{b^2}{cc_{,,}},$$

$$\frac{d_0^2}{c_0^2} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi_{,}} : \frac{\sin\varphi_{,}}{\sin\psi} = \frac{d}{c_{,,}} : \frac{c_{,}}{d} = \frac{d^2}{c_{,}c_{,,}};$$

und aus diesen die anderen durch einfache Addition oder Subtraction derjenigen vorher reducirten Producte, welche einen Factor gemeinschaftlich haben.

Sollen für beliebige Wahl der Richtungen $(\alpha_{,}\beta_{,})$ $(\alpha_{,,}\beta_{,,})$ die Conjugationswinkel ε und $\varepsilon_{,}$ Rechte werden, so muss:

$$\sin\varepsilon = 1 = \sin\varepsilon_{,}; \quad \varphi = \varphi_{,}; \quad \psi = \psi_{,}$$

werden, woraus man nach §. 1. c) schliessen kann, dass:

$$A_{,}\sin\omega = Q_{,}; \quad Q_{,} \quad = Q_{,,};$$

$$A_{,,}\sin\omega = Q_{,,}; \quad Q_{,}Q_{,,} = B_0$$

sein muss, folglich nach den Formeln b) desselben Paragraphen:

$$a_0 = b_0 = c_0 = d_0.$$

Lässt man also überall die Reduction durch die den betreffenden Strecken parallelen Halbmesser fort, so gehen die Sätze vom elliptischen Vierseit und elliptischen Dreieck in die elementaren vom rechtwinkligen über.

Nach der in §. 3. angewendeten Beweismethode bedürfen übrigens die Lehrsätze (I II), welche als Verallgemeinerungen von (IV V) erscheinen, keiner anderen geometrischen Voraussetzungen als solcher, wie sie die gleichartigen Sätze über rechtwinklige Liniensysteme verlangen, und diese beschränken sich auf die Aehnlichkeit der Dreiecke. Ich habe wohl in §. 1., um aus den Componenten $\alpha_{,}\beta_{,}$ einer beliebigen Richtung die Componenten $\alpha'\beta'$ ihrer conjugirten Richtung zu finden, von der Gleichung der Richtungs-Componenten einer Geraden Linie:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\omega + \beta^2 = 1$$

Gebrauch gemacht, welche den Pythagoräischen Lehrsatz zur Grundlage hat. Dies geschah aber nur darum, damit den Nennern der für $\alpha'\beta'$ resultirenden Verhältnisse eine so bestimmte

Construction gegeben werde, dass die Schlussformeln a), b), c), §. 1. gleichzeitig geeignet würden zur Ableitung einer Reihe von Sätzen, deren Beweis hiernach in sehr einfacher analytischer Form auftritt. Dazu gehören unter Anderen die bekannten Relationen:

$$a_0^2 b_0^2 \sin^2\varepsilon = \frac{F_0^2 \sin^2\omega}{B_0} = c_0^2 d_0^2 \sin^2\varepsilon_{,},$$

$$a_0^2 + b_0^2 = \frac{A_0 F_0}{B_0} = c_0^2 + d_0^2$$

u. s. w. Zur Auffindung der Sätze vom elliptischen Vierseit ist es aber gar nicht nothwendig, die Form der $f(\alpha_{,}\beta_{,}) = Q_{,}$ und $f(\alpha_{,,}\beta_{,,}) = Q_{,,}$ zu kennen, da diese Functionen später nirgendwo in Auflösung zu erscheinen brauchen. $Q_{,}$ ist eine Grösse, zu der $A\beta_{,} + B\alpha_{,}$ dasselbe Verhältniss hat wie $\alpha':1$, oder zu der $B\beta_{,} + C\alpha_{,}$ dasselbe Verhältniss hat wie $\beta':1$. Das Analoge gilt für $Q_{,,}$.

Die Lehrsätze (I II) vom elliptischen Vierseit treten hiernach als eine in gewisser Richtung höchstmögliche Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes und der damit zusammenhängenden Sätze auf und müssen auch in der Lehre von der Ellipse dasselbe leisten, was jene in Bezug auf alle aus rechtwinkligen Dreiecken bestehenden Systeme.

§. 5.

Lehrsatz VI. In jedem vollständigen elliptischen Vierseit sind diejenigen Diagonalen, welche die Durchshnittspunkte je zweier nicht conjugirten Seiten verbinden, conjugirte Richtungen. (Fig. 3.).

Um dieses nachzuweisen, wähle man zur Vereinfachung der Rechnung, und da hierdurch der Allgemeinheit des Satzes kein Eintrag geschieht, die in C sich schneidenden Richtungen (I III), mit den parallelen Halbmessern (a_0 c_0) zu Coordinaten-Axen. Dann ist das Verhältniss der Richtungs-Componenten der Diagonale ($DE = f$): $-\frac{c}{a}$ und das der Diagonale ($CF = g$), welche durch den Coordinaten-Anfang C geht, gleich dem Verhältniss $\frac{y}{x}$ der Coordinaten des anderen Endpunktes F. Diese Coordinaten aber findet man aus den Gleichungen der Geraden (II IV), welche sich im Punkte F durchschneiden.

Die Gerade II geht durch den Punkt D, welcher die Coordinaten $x=0$; $y=c$ hat, und die Gerade IV durch den Punkt E, dessen Coordinaten $x=a_{\prime}$; $y=0$ sind. Ferner ist das Verhältniss der Richtungs-Componenten von II wegen $\alpha_{\prime}=1$; $\beta_{\prime}=0$ und mit Rücksicht auf die Formeln §. 1. a) $=-\frac{C}{B}$; und das Verhältniss der Richtungs-Componenten von IV ist $=-\frac{B}{A}$ wegen $\alpha_{\prime\prime}=0$; $\beta_{\prime\prime}=1$. Folglich sind die Gleichungen beider Geraden:

$$\text{II}): B(y-c)+Cx=0,$$

$$\text{IV}): Ay+B(x-a_{\prime})=0;$$

und daraus findet man:

$$y=\frac{B(Ca_{\prime}-Bc)}{AC-B^2};\quad x=\frac{B(Ac-Ba_{\prime})}{AC-B^2};$$

also:

$$\frac{y}{x}=\frac{Ca_{\prime}-Bc}{Ac-Ba_{\prime}}.$$

Dies ist aber nichts Anderes als das Verhältniss der Richtungs-Componenten einer zu $-\frac{c}{a_{\prime}}$ conjugirten Richtung.

Bringt man nun die bekannten Lehrsätze (I II) auf die neuen elliptischen Vierseite $(abfg)(cdfg)$ in Anwendung, so sind unter den aus ihnen entspringenden Gleichungen diejenigen, welche die reducirten Quadrate der Diagonalen (fg) in reducirten Producten der Seiten und ihrer Abschnitte ausdrücken, von vorwiegendem Interesse:

$$\text{VII)} \ldots \left\{\begin{array}{l} \frac{aa_{\prime}}{a_0^2}+\frac{dd_{\prime}}{d_0^2}=\frac{g^2}{g_0^2}=\frac{cc_{\prime}}{c_0^2}+\frac{bb_{\prime\prime}}{b_0^2}, \\ \frac{bb_{\prime}}{b_0^2}-\frac{a_{\prime}a_{\prime\prime}}{a_0^2}=\frac{f^2}{f_0^2}=\frac{cc_{\prime\prime}}{c_0^2}-\frac{d_{\prime}d_{\prime\prime}}{d_0^2}; \end{array}\right.$$

oder, indem man nach Lehrsatz I. eine Vertauschung der Glieder dieser Gleichungen vornimmt:

$$\text{VII)} \ldots \left\{\begin{array}{l} \frac{cc_{\prime}}{c_0^2}+\frac{dd_{\prime\prime}}{d_0^2}=\frac{g^2}{g_0^2}=\frac{aa_{\prime}}{a_0^2}+\frac{bb_{\prime\prime}}{b_0^2}, \\ \frac{cc_{\prime\prime}}{c_0^2}-\frac{a_{\prime}a_{\prime\prime}}{a_0^2}=\frac{f^2}{f_0^2}=\frac{bb_{\prime}}{b_0^2}-\frac{d_{\prime}d_{\prime\prime}}{d_0^2}. \end{array}\right.$$

Werden also die Abschnitte auf den Seiten immer von den

Endpunkten der betreffenden Diagonale aus gerechnet, so lassen sich diese Gleichungen als Lehrsatz in folgende Form bringen:

Lehrsatz VII. In jedem elliptischen Vierseit ist das reducirte Quadrat einer der beiden Diagonalen, welche nicht durch die Scheitel der Conjugationswinkel gehen, gleich der Summe (Differenz) der Producte aus den reducirten Abschnitten je zweier Seiten, welche sich in den Endpunkten der anderen Diagonale durchschneiden, oder auch der resp. Abschnitte je zweier conjugirten Seiten.

Ziehen wir aber durch den Punkt E mit den Richtungen (II III) die Parallelen $EJ = y$ und $EK = x$; eben so durch D mit (I IV) die Parallelen $DG = y_,$ und $DH = x_,$, so lässt sich das reducirte Quadrat der Diagonale f auch als eine Summe von Producten darstellen:

$$\text{VIII)} \ldots \quad \frac{b_, y}{b_0^2} + \frac{c_{,,} x}{c_0^2} = \frac{f^2}{f_0^2} = \frac{a_{,,} y_,}{a_0^2} + \frac{d_, x_,}{d_0^2},$$

also wenn wir die von den Seiten $(b_, c_{,,} d_, a_{,,})$ begrenzte Figur ein elliptisches Viereck nennen, diese Gleichung als Satz folgendermaassen ausdrücken:

Lehrsatz VIII. In jedem elliptischen Viereck ist das reducirte Quadrat derjenigen Diagonale, welche die Durchschnittspunkte der nicht conjugirten Seiten verbindet, gleich der Summe der reducirten Producte aus je jweien dieser Seiten in die resp. Abschnitte, welche die Parallelen aus dem anderen Endpunkt der Diagonale in ihnen bestimmen.

Denken wir uns nun folgende Senkrechten gefällt:

$$EO = \eta; \quad EP = \xi, \quad DQ = \eta_,; \quad DR = \xi_,;$$

wo:

$$y.\sin\varphi = \eta = d_, \sin\varepsilon_,; \qquad x \sin\varphi = \xi = a_{,,} \sin\varepsilon;$$

$$y_,.\sin\varphi_, = \eta_, = c_{,,} \sin\varepsilon_,; \quad x_, \sin\varphi_, = \xi_, = b_, \sin\varepsilon;$$

auch die Verbindungslinien ihrer Fusspunkte gezogen:

$$OP = e; \quad OR = e_,;$$

so dass aus den Kreisvierecken $(DOEP)(DQER)$ folgt:

$$e = f \sin\varphi; \quad e_, = f \sin\varphi_,.$$

Dann lässt sich der Lehrsatz VIII. umschreiben in:

$$\text{VIIIa)} \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{b_{,}\eta}{b_0^2} + \dfrac{c_{,,}\xi}{c_0^2} = \dfrac{ef}{f_0^2}, \\[2ex] \dfrac{a_{,,}\eta_{,}}{a_0^2} + \dfrac{d_{,}\xi_{,}}{d_0^2} = \dfrac{e_{,}f}{f_0^2}; \end{cases}$$

wo derselbe in der Form des Ptolemäischen Satzes erscheint, auch unmittelbar in den letzteren übergeht, sobald die conjugirten Richtungen zu einander senkrecht werden.

Um die Länge der Diagonalen (fg) des elliptischen Vierseits und deren parallele Halbmesser $(f_0 g_0)$ in Coefficienten der allgemeinen Gleichung auszudrücken, hat man mit Benutzung des Conjugationswinkels ε die Relationen:

$$f^2 = a_{,,}^2 - 2a_{,,}b_{,}\cos\varepsilon + b_{,}^2,$$

$$g^2 = a^2 + 2ab_{,,}\cos\varepsilon + b_{,,}^2.$$

Hierin findet man zunächst den Cosinus des Winkels ε nach der Formel:

$$\cos\varepsilon = \alpha_{,}\alpha' + (\alpha_{,}\beta' + \alpha'\beta_{,})\cos\omega + \beta_{,}\beta',$$

wenn man darin an Stelle der Componenten der conjugirten Richtung $(\alpha'\beta')$ ihre Werthe nach §. 1. a) einführt, so wird:

$$\cos\varepsilon = \frac{(B - A\cos\omega)\beta_{,}^2 + (C - A)\alpha_{,}\beta_{,} + (C\cos\omega - B)\alpha_{,}^2}{Q_{,}}.$$

Der Kürze halber lasse man in obigen Relationen $\cos\varepsilon$ stehen, schreibe aber an Stelle der darin vorkommenden Seiten und ihrer Abschnitte die entsprechenden Werthe in allgemeinen Coefficienten nach §. 2. e), so verwandeln sich beide in:

$$\text{e)} \ldots \begin{cases} f^2 = \dfrac{B_{,,}^2 - 2B_{,,}z_{,,}Q_{,}\cos\varepsilon + z_{,,}^2 Q_{,}^2}{M^2}, \\[2ex] g^2 = \dfrac{B_0 z_{,,}^2 + 2B_0 z_{,,} B_{,,} Q_{,}\cos\varepsilon + B_{,,}^2 Q_{,}^2}{B_0^2 \mu^2}. \end{cases}$$

Setzen wir endlich:

$$A\eta^2 + 2B\xi\eta + C\xi^2 = C_{,},$$

wo $\xi\eta$ die in §. 2. angegebenen Bedeutungen haben, berücksichtigen ausserdem die Hülfs-Relationen:

$$\text{d)} \ldots\ldots \begin{cases} z_{\prime\prime}B_{\prime} - z_{\prime}B_{\prime\prime} = \mu C_{\prime}, \\ B_{\prime}B_{\prime\prime} + B_0 z_{\prime} z_{\prime\prime} = MC_{\prime}; \end{cases}$$

so finden sich die Längen der den Diagonalen parallelen Halbmesser $(f_0 g_0)$ aus den Gleichungen des Satzes VII., indem man die darin vorkommenden Strecken in allgemeinen Coefficienten nach §. 2. e) ausdrückt:

$$\frac{f^2}{f_0^2} = \frac{A_{\prime}A_{\prime\prime}C_{\prime}}{M^2 F_0}, \quad \frac{g^2}{g_0^2} = \frac{A_{\prime}A_{\prime\prime}C_{\prime}}{B_0 \mu^2 F_0};$$

und dann die für f_0^2 und g^2 bereits entwickelten Werthe in diese Formeln einführt.

§. 6.

Die Nützlichkeit der in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Lehrsätze ist von verschiedenen Gesichtspunkten aus aufzufassen. Zuerst lassen sich mit ihrer Hülfe viele bekannte Sätze ohne weitere Ausführungen an der Figur ablesen und geometrische Verwandtschaften auffinden, welche sich durch Zerreissen naturgemäss zusammengehöriger Relationen, indem man deren Richtigkeit in gesonderten Beweisen zu geben gezwungen war, der Erkenntniss entziehen. Andererseits bieten diese Sätze durch die grosse Zahl von Gleichungen, welche ihnen entspringen, und die bei jedem Liniensystem, in welchem zwei Paare von conjugirten Richtungen auftreten, zur Disposition stehen, zu einer Fülle von Combinationen, sowohl unter sich wie mit anderen, und dadurch zur Auffindung neuer Lehrsätze Gelegenheit. Manche complicirten Liniensysteme an der Ellipse lassen sich so in ihren Eigenschaften, ohne irgend eine andere Grundlage, fast erschöpfend untersuchen. Dazu sind vorzüglich auch die Formeln §. 2. e) zu verwerthen, in denen alle Strecken eines beliebigen elliptischen Vierseits durch die Coordinaten zweier seiner Ecken, die Richtungs-Componenten irgend zweier Seiten und in allgemeinen Coefficienten ausgedrückt erscheinen. Ich gebe in diesem und den folgenden Paragraphen ein paar Beispiele, welche geeignet sind, die Art solcher Anwendung zu zeigen. Was die fremden analytischen Voraussetzungen betrifft, auf welche in diesen Beispielen Rücksicht genommen worden ist, so beschränken sie sich auf solche, welche leicht den einleitenden Formeln des §. 1. entnommen werden können.

Man ziehe durch einen Punkt P (Fig. 4.) im Umfang der Ellipse Parallelen mit zwei Paar conjugirten Durchmessern $(a_0 b_0)$ und $(c_0 d_0)$, so wird jede dieser Parallelen von den drei anderen

Durchmessern in drei Punkten durchschnitten. Bildet man nun Producte aus je zwei Abschnitten, welche irgend zwei unmittelbar aufeinander folgende Durchschnittspunkte in irgend einer der Parallelen bestimmen, und combinirt damit eines der beiden Producte aus den Abschnitten, welche von den beiden anderen Durchmessern auf diesen Parallelen bestimmt werden, führt auch überall die Reduction durch die betreffenden parallelen Halbmesser aus, so gilt der Satz:

Satz 1. Die Summe oder Differenz der Producte aus den reducirten Abschnitten, welche je zwei Paare von Halbmessern auf ihren Parallelen durch einen Punkt im Umfange der Ellipse bestimmen, ist constant $=1$, je nachdem die zusammengehörigen unmittelbar auf einander folgenden Durchschnittspunkte für jedes der combinirten Producte auf derselben Seite des gegebenen Punktes liegen oder nicht.

$$\text{I. a.}\ \begin{cases} \dfrac{AP.BP}{a_0^2}+\dfrac{CP.DP}{c_0^2}=1=\dfrac{EP.FP}{b_0^2}+\dfrac{GP.HP}{d_0^2}, \\[2ex] \dfrac{BP.JP}{a_0^2}-\dfrac{GP.NP}{d_0^2}=1=\dfrac{DP.LP}{c_0^2}-\dfrac{EP.KP}{b_0^2}, \end{cases}$$

$$\text{I. b.}\ \begin{cases} \dfrac{AP.BP}{a_0^2}+\dfrac{EP.FP}{b_0^2}=1=\dfrac{CP.DP}{c_0^2}+\dfrac{GP.HP}{d_0^2}, \\[2ex] \dfrac{BP.JP}{a_0^2}+\dfrac{EP.KP}{b_0^2}=1=\dfrac{DP.LP}{c_0^2}-\dfrac{GP.NP}{d_0^2}. \end{cases}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen ergiebt sich unmittelbar unter Anwendung des Lehrsatzes VII. auf die elliptischen Vierseite $PBMD \cong PEMG$ und $ABHG \cong CDFE$ wegen $\dfrac{PM^2}{e_0^2}=1$, wo e_0 der dem Punkt P entsprechende Halbmesser der Ellipse ist.

Was die in I. a. aufgestellte Gleichung der Ellipse betrifft, welche sich auf ein beliebiges Coordinatensystem bezieht, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkte der Curve liegt, so werde ich bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher auf dieselbe zurückkommen. Hier will ich nur bemerken, dass, wenn man in dieser Gleichung

$$AP=x;\quad CP=y;\quad BP=u;\quad DP=v$$

setzt, die Grössen (uv) die Coordinaten (xy) in der Weise enthalten, dass:

$$u=x+\frac{B}{C}\cdot y;\quad v=y+\frac{B}{A}\cdot x$$

ist, wo A, B, C die Coefficienten der allgemeinen Gleichung bedeuten.

Führen wir aber in der so gewonnenen Gleichung der Ellipse, in welcher alle Elemente bestimmte geometrische Strecken an der Figur repräsentiren:

$$\frac{ux}{a_0^2} + \frac{vy}{c_0^2} = 1$$

an Stelle der laufenden Werthe (uv), welche einem beliebigen Punkt (xy) auf der Curve entsprechen, die bestimmten Werthe $(u_, v_,)$ ein, welche dem bestimmten Punkte $(x_, y_,)$ im Umfang der Ellipse angehören, so ist:

$$\frac{u_, x}{a_0^2} + \frac{v_, y}{c_0^2} = 1$$

die Gleichung der Tangente jenes Punktes. Und wenn $(u_, v_,)$ die gleichartig construirten Strecken für einen Punkt $(x_, y_,)$ innerhalb oder ausserhalb der Curve bedeuten, so ist dieselbe Gleichung die der Polare des gegebenen Punktes in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem.

Setzen wir endlich dieselbe algebraische Summe von Producten $= 0$, so ist:

$$\frac{u_, x}{a_0^2} + \frac{v_, y}{c_0^2} = 0$$

die Gleichung eines dem Durchmesser des Punktes $(x_, y_,)$ entsprechenden conjugirten Durchmessers.

Die Gleichungen 1. b. sind Gleichungen der Ellipse in Bezug auf conjugirte Durchmesser. In ihnen verwandeln sich alle Producte in Quadrate, sobald die beiden Paare conjugirter Richtungen $(a_0 b_0)$ und $(c_0 d_0)$ in ein einziges zusammenfallen. Dasselbe gilt für die Gleichungen 1. a., falls die beliebigen Richtungen $(a_0 c_0)$ oder $(b_0 d_0)$ in conjugirte übergehen. Alle Gleichungen aber, in denen Differenzen von Producten vorkommen, verschwinden gänzlich.

Zieht man ferner durch irgend einen Punkt P (Fig. 5.) im Umfange der Ellipse eine Tangente, schneidet dieselbe mittelst dreier beliebigen Halbmesser $a_0 b_0 c_0$, fällt aus den Durchschnittspunkten von a_0 und b_0 mit der Tangente Ordinaten auf c_0, so wie umgekehrt aus dem Durchschnittspunkte von c_0 mit der Tangente Ordinaten auf a_0 und b_0, zieht auch den Halbmesser e_0 des Berührungspunktes der Tangente, und nimmt nun die Abschnitte

auf den Halbmessern vom Mittelpunkte aus, die auf d Tangente vom Berührungspunkt ab, so gilt der Satz:

Satz 2. Die Differenz oder Summe der Produc aus den reducirten Abschnitten eines Durchmesse und der Tangente ist constant $= 1$, je nachdem d Durchschnittspunkte mit den Halbmessern auf de selben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten d Berührungspunktes liegen.

$$2.\quad \begin{cases} \text{a.} & \dfrac{EM.FM}{b_0^2} - \dfrac{BP.EP}{f_0^2} = 1 = \dfrac{BM.GM}{c_0^2} - \dfrac{BP.EP}{f_0^2}, \\ \text{b.} & \dfrac{AM.CM}{a_0^2} + \dfrac{AP.BP}{f_0^2} = 1 = \dfrac{BM.DM}{c_0^2} + \dfrac{AP.BP}{f_0^2}. \end{cases}$$

Die Richtigkeit des Satzes erhellt aus der Betrachtung der ell tischen Vierseite *BFMP*, *BGJP* und *ACHP*, *BDHP*, ind man direct den Lehrsatz (II) darauf in Anwendung bringt, weg $\dfrac{MP^2}{e_0^2} = 1$.

Aber unter Zugrundlegung des Lehrsatzes (I) haben wir no die weiteren Sätze:

Satz 3. Das Product aus den reducirten Abschnitt der Tangente ist gleich der reducirten Entfernung ihr Berührungspunktes vom Durchschnittspunkte der O dinaten aus ihren Endpunkten auf die gegenüberli genden Halbmesser.

$$3.\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{AP.BP}{f_0^2} = \dfrac{HP}{e_0}, \\ \dfrac{BP.EP}{f_0^2} = \dfrac{JP}{e_0}. \end{cases}$$

Satz 4. Das Product aus den reducirten Absch ten, in welche zwei Halbmesser durch die Ordinat aus den gegenüberliegenden Durchschnittspunkt mit der Tangente zerlegt werden, ist gleich der red cirten Entfernung des Mittelpunktes vom Durchschnit punkte der Ordinaten.

$$4.\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{AM.CM}{a_0^2} = \dfrac{HM}{e_0} = \dfrac{BM.DM}{c_0^2}, \\ \dfrac{EM.FM}{b_0^2} = \dfrac{JM}{e_0} = \dfrac{BM.GM}{c_0^2}. \end{cases}$$

Werden $(a_0 b_0)$ zwei conjugirte Halbmesser der Ellipse.

alsdann OP (Fig. 5.) die dem Berührungspunkte P der Tangente entsprechende Ordinate auf den Halbmesser a_0, so dass $MP = e_0$ sowohl als Hypotenuse wie auch als Kathete und Ordinate gewisser elliptischen Dreiecke auftritt (als Hypotenuse in MOP, als Kathete in AMP und EMP, als Ordinate in AME) so gehen für diesen Fall, und unter Anwendung der Lehrsätze (IV V), die genannten Sätze (1—4) über in:

1. a. Für jeden Punkt innerhalb der Ellipse ist die Summe der Quadrate seiner reducirten Entfernung vom Mittelpunkte und der zugehörigen Ordinate constant = 1.

1. a. . . . . $$\frac{OM^2}{a_0^2} + \frac{OP^2}{b_0^2} = 1.$$

2. a. Für jeden Punkt ausserhalb der Ellipse ist die Differenz der Quadrate seiner reducirten Entfernung vom Mittelpunkte und der zugehörigen Tangente constant = 1.

2. a. . . . . $$\frac{AM^2}{a_0^2} - \frac{AP^2}{b_0^2} = 1.$$

3. a. Das Product aus den reducirten Abschnitten zweier conjugirten Halbmesser von irgend einer Tangente ist constant = 1.

3. a. . . . . $$\frac{AP.EP}{f_0^2} = 1.$$

4. a. Das Product aus den reducirten Entfernungen zweier zugeordneten Punkte eines Durchmessers vom Mittelpunkte ist constant = 1.

4. a. . . . . $$\frac{AM.OM}{a_0^2} = 1.$$

Unter zugeordneten Punkten sind hier die Fusspunkte der aus einem Punkte im Umfange der Ellipse auf einen Durchmesser gefällten Ordinate und der zugehörigen Tangente verstanden.

Von demjenigen Gesichtspunkte aus, auf welchen man durch die Sätze von den elliptischen Figuren geführt wird, erscheinen also die wohlbekannten Relationen (1. a.—4. a.), sowohl unter sich wie auch mit ihren Verallgemeinerungen (1—4), in der engsten geometrischen Verwandtschaft. Indem ich darauf verzichte, anderweitige Beispiele heranzuziehen, will ich nur noch eine zweite Art der Verallgemeinerung der so eben entwickelten Sätze andeuten.

Man löse (Fig. 6.) den Berührungspunkt der Tangente in zwei zugeordnete Punkte auf, also die Tangente selber in zwei parallele Gerade, welche dem betreffenden Durchmesser conjugirt sind, und von denen jede die Polare des zugeordneten Punktes auf der anderen ist. Der den Polaren parallele Halbmesser sei c_0, der conjugirte d_0. An Stelle der Einheit $\left(\frac{d_0^2}{d_0^2}\right)$ tritt jetzt $\frac{MP^2}{d_0^2} = \frac{MP}{MQ}$ wegen $MP.MQ = d_0^2$ (4. a.), und dadurch gehen dieselben Sätze (1—4) über in:

$$\frac{CM^2}{a_0^2} + \frac{CP^2}{b_0^2} = \frac{MP}{MQ},$$

$$\frac{CM}{DM} = \frac{MP}{MQ} = \frac{CP}{DQ};$$

---

1. b. $$\frac{CM.DM}{a_0^2} + \frac{CP.DQ}{b_0^2} = 1.$$

$$\frac{AM^2}{a_0^2} - \frac{AP^2}{c_0^2} = \frac{MP}{MQ},$$

$$\frac{AM}{BM} = \frac{MP}{MQ} = \frac{AP}{BQ};$$

---

2. b. $$\frac{AM.BM}{a_0^2} - \frac{AP.BQ}{c_0^2} = 1.$$

$$\frac{AP.EP}{c_0^2} = \frac{MP}{MQ},$$

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{MP}{MQ} = \frac{EP}{FQ};$$

---

3. b. $$\frac{AP.FQ}{c_0^2} = 1 = \frac{EP.BQ}{c_0^2}.$$

$$\frac{AM.DM}{a_0^2} = \frac{MP.MQ}{d_0^2} = \frac{BM.CM}{a_0^2},$$

$$MP.MQ = d_0^2;$$

---

4. b. $$\frac{AM.DM}{a_0^2} = 1 = \frac{BM.CM}{a_0^2}.$$

Der letzte Satz bildet den Ausgangspunkt für die Entwickelung von den Polareigenschaften der Ellipse und giebt Veranlassung

zu der Bemerkung, dass sich mit Hülfe der Sätze vom elliptischen Vierseit diese Eigenschaften für die Ellipse ebenso leicht rein geometrisch ableiten lassen wie für den Kreis, und ohne dass man nothwendig hätte, sich auf die projectivischen Eigenschaften beider Curven zu berufen. Ich verfolge jedoch den Gegenstand hier nicht weiter, da er sehr bald in ein anderes Gebiet hineinführen würde.

§. 7.

Ich werde nun noch (Fig. 7.) eine Anwendung der Grundformeln §. 2. e) zeigen, mittels deren man alle Strecken eines elliptischen Vierseits in Coefficienten der allgemeinen Gleichung ausdrücken kann. Ich wähle als Beispiel das im vorhergehenden Paragraphen unter b) betrachtete Liniensystem, indem ich die willkührlichen conjugirten Durchmesser $(a_0 b_0)$ in die Hauptaxen der Ellipse übergehen lasse, vervollständige aber das System durch die Normalen in den zugeordneten Punkten und die Senkrechten aus den Brennpunkten und dem Mittelpunkt auf die Polaren, fälle auch aus einem der Brennpunkte ein Perpendikel auf die Senkrechte aus dem Mittelpunkt und verbinde die Brennpunkte mit den Durchschnittspunkten je einer Polare und der Normale ihres Pols. Endlich errichte ich in den Brennpunkten Senkrechte auf der Grossen Axe und verbinde je zwei Endpunkte derselben in einer Polare mit dem Endpunkt der Normale aus ihrem resp. Pol in der Grossen Axe.

Darnach löse ich die Aufgabe, alle Strecken dieses Systems in Coordinaten eines der zugeordneten Punkte (xy) und durch die halben Hauptaxen (ab) auszudrücken, indem ich die allgemeinen Formeln des §. 2. e) auf das Kreisvierseit $(AMEO)$ in Anwendung bringe, welches von den Hauptaxen, der inneren Polare und ihrer Normale gebildet wird; dessen Rechte Winkel also ihre Scheitel in M und O haben. Zunächst sind die Coordinaten (xy) und $(x_{,}y_{,})$ der zugeordneten Punkte $(OO_{,})$ mit einander verbunden durch die Gleichung:

$$\frac{x}{x_{,}} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{y}{y_{,}} \quad (1.\ \text{b.})$$

und die Halbmesser $(a_0 b_0)$, welche den Polaren und ihrer conjugirten Richtung parallel sind, mit denselben Elementen durch die Gleichungen:

$$b_0^2 = xx_{,} + yy_{,} \qquad (4.\ \text{a.})$$
$$a_0^2 = a^2 + b^2 - b_0^2 \quad (\S.\ 1.\ \text{b})).$$

Wir können also der Kürze halber in den Schlussformeln überall $(x_, y_,)$ und a_0 stehen lassen, da wir ja wissen, wie sich diese Strecken in (xy, ab) ausdrücken lassen.

Bezeichnen wir jetzt:

Die Richtungs-Componenten des Halbmessers . . $b_0 : \alpha\beta$,

" " " der Normale (I) . . . : $\alpha_, \beta_,$,

" " " " Polare (II) . . . . : $\alpha' \beta'$,

" " " " Kleinen Axe (III) . : $\alpha_{,,} \beta_{,,}$,

" " " " Grossen Axe (IV) . : $\alpha'' \beta''$;

so finden wir, dass:

$$\alpha = \sqrt{\frac{xx_,}{xx_, + yy_,}} = \frac{\sqrt{xx_,}}{b_0};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{yy_,}{xx_, + yy_,}} = \frac{\sqrt{yy_,}}{b_0};$$

$$\alpha_, = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{xx_,}}{a_0}; \quad \alpha' = -\frac{a}{b} \frac{\sqrt{yy_,}}{a_0};$$

$$\beta_, = \frac{a}{b} \frac{\sqrt{yy_,}}{a_0}; \quad \beta' = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{xx_,}}{a_0};$$

$$\alpha_{,,} = 0; \quad \alpha'' = 1;$$

$$\beta_{,,} = 1; \quad \beta'' = 0.$$

Daraus ergeben sich aber alle zusammengesetzten Ausdrücke, welche in den Formeln §. 2. e) benutzt worden sind, indem wir das ganze Liniensystem auf einen Kreis beziehen, dessen Mittelpunkt im Coordinaten-Anfang liegt.

$$A_0 = 2; \quad B_0 = 1; \quad A_, = Q_, = 1 = A_{,,} = Q_{,,};$$

$$z_, = \frac{e^2}{ab} \frac{\sqrt{yy_,}}{a_0} . x; \quad z_{,,} = x; \quad B_, = \frac{ab}{a_0} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x_,}}; \quad B_{,,} = y;$$

$$\mu = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{xx_,}}{a_0} = \alpha_,; \quad M = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{yy_,}}{a_0} = \beta_, .$$

Führen wir also diese Werthe in die allgemeinen Formeln ein, so findet man:

$$
\text{g)} \ldots \left\{
\begin{array}{ll}
BM = d = \dfrac{B_{,}Q_{,,}}{\mu B_0} = \dfrac{a^2}{x_{,}}, \\[2ex]
CM = c_{,,} = \dfrac{B_{,}}{M} = \dfrac{b^2}{y_{,}}, \\[2ex]
EM = d_{,} = \dfrac{z_{,}Q_{,,}}{M} = \dfrac{e^2}{a^2}.x, \\[2ex]
DM = c_{,} = \dfrac{z_{,}}{\mu} = \dfrac{e^2}{b^2}\,y, \\[2ex]
BE = d_{,,} = \dfrac{A_{,}B_{,,}Q_{,,}}{B_0\mu M} = \dfrac{a_0{}^2}{x_{,}}, \\[2ex]
CD = c = \dfrac{z_{,,}A_{,}}{\mu M} = \dfrac{a_0{}^2}{y_{,}}, \\[2ex]
BO = b_{,,} = \dfrac{B_{,,}Q_{,}}{B_0\mu} = \dfrac{a\sqrt{yy_{,}}}{bx_{,}}.a_0, \\[2ex]
DO = a = \dfrac{z_{,,}}{\mu} = \dfrac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{x_{,}}}.a_0, \\[2ex]
CO = b_{,} = \dfrac{z_{,,}Q_{,}}{M} = \dfrac{b\sqrt{xx_{,}}}{ay_{,}}.a_0, \\[2ex]
EO = a_{,,} = \dfrac{B_{,,}}{M} = \dfrac{b\sqrt{x}}{a\sqrt{x_{,}}}.a_0, \\[2ex]
BC = b = \dfrac{A_{,,}B_{,}Q_{,}}{B_0\mu M} = \dfrac{ab}{x\sqrt{yy_{,}}}.a_0, \\[2ex]
DE = a_{,} = \dfrac{z_{,}A_{,,}}{\mu M} = \dfrac{e^2\sqrt{x}}{ab\sqrt{x_{,}}}.a_0, \\[2ex]
\qquad CE = f = \dfrac{b}{a}.\dfrac{a_0b_0}{y_{,}}, \\[2ex]
\qquad BD = g = \dfrac{a}{b}.\dfrac{a_0b_0}{x_{,}}.
\end{array}
\right.
$$

Für die gleichliegenden und gleichbezeichneten Strecken in ıg auf die äussere Polare hat man in diesen Formeln nur all x mit $x_{,}$ und y mit $y_{,}$ zu vertauschen.

An dieser Stelle tritt nun auch die Bedeutung der Hülfs- hungen d) in den §§. 2., 4., 5. hervor; denn führt man in ihnen elben Substitutionen aus, so gehen sie über in:

$$\frac{xx_{,}}{a^2}+\frac{yy_{,}}{b^2}=1;\qquad e^2=a^2-b^2;$$

1)

$$a_0^2=a^2-\frac{e^2}{a^2}xx_{,};\quad a_0^2=b^2+\frac{e^2}{b^2}yy_{,};$$

$$b_0^2=a^2-\frac{e^2}{b^2}yy_{,};\quad b_0^2=b^2+\frac{e^2}{a^2}xx_{,};$$

$$a_0^2=\frac{a^2}{b^2}yy_{,}+\frac{b^2}{a^2}xx_{,}.$$

Die anderen Strecken an der Figur finden sich nun unter g) berechneten durch die einfachsten geometrisc[illegible] trachtungen.

Fig. 2, S.

$$BF = BM - e = \frac{a}{x_{,}}\left(a-\frac{e}{a}x_{,}\right),$$

$$BG = BM + e = \frac{a}{x_{,}}\left(a+\frac{e}{a}x_{,}\right),$$

$$FJ = \frac{BF}{BE}\cdot EO = \frac{b\sqrt{x}}{a_0\sqrt{x_{,}}}\left(a-\frac{e}{a}x_{,}\right),$$

$$GK = \frac{BG}{BE}\cdot EO = \frac{b\sqrt{x}}{a_0\sqrt{x_{,}}}\left(a+\frac{e}{a}x_{,}\right),$$

$$FP = \frac{CM}{BM}\cdot BF = \frac{b^2}{ay_{,}}\left(a-\frac{e}{a}x_{,}\right),$$

2). $$GR = \frac{CM}{BM}\cdot BG = \frac{b^2}{ay_{,}}\left(a+\frac{e}{a}x_{,}\right),$$

$$E_{,}F = e - E_{,}M = \frac{e}{a}\left(a-\frac{e}{a}x_{,}\right).$$

$$E_{,}G = e + E_{,}M = \frac{e}{a}\left(a+\frac{e}{a}x_{,}\right).$$

$$[illegible] = \frac{BM}{BC}\cdot E_{,}F = \frac{e\sqrt{yy_{,}}}{ba_0}\left(a-\frac{e}{a}x_{,}\right).$$

$$[illegible] = \frac{BM}{BC}\cdot E_{,}G = \frac{e\sqrt{yy_{,}}}{ba_0}\left(a+\frac{e}{a}x_{,}\right).$$

[illegible]

Fig. 7., 8.

$$GQ = \sqrt{GK^2 + KQ^2} = \frac{\sqrt{\frac{y}{y_,}(b^2 + \frac{e^2}{b^2} y_,^2)}}{a_0}(a + \frac{e}{a}x_,),$$

$$E_,P = \sqrt{FP^2 + E_,F^2} = \frac{b}{ay_,}\sqrt{b^2 + \frac{e^2}{b^2}y_,^2}(a - \frac{e}{a}x_,),$$

$$E_,R = \sqrt{GR^2 + E_,G^2} = \frac{b}{ay_,}\sqrt{b^2 + \frac{e^2}{b^2}y_,^2}(a + \frac{e}{a}x_,),$$

$$AE = x - EM = \frac{b^2}{a^2}x,$$

$$A_,D = y + DM = \frac{a^2}{b^2}y,$$

$$AB = BM - x = \frac{a^2 - xx_,}{x_,},$$

$$A_,C = CM - y = \frac{b^2 - yy_,}{y_,},$$

$$FN = \frac{DO}{CD} \cdot e = \frac{b\sqrt{yy_,}}{ba_0} \cdot e,$$

h)……

$$MN = \frac{CO}{CD} \cdot e = \frac{b\sqrt{xx_,}}{aa_0} \cdot e,$$

$$BH = \frac{BM}{BE} \cdot BO = \frac{b\sqrt{yy_,}}{ba_0} \cdot \frac{a^2}{x_,},$$

$$CH = \frac{CM}{CD} \cdot CO = \frac{b\sqrt{xx_,}}{aa_0} \cdot \frac{b^2}{y_,},$$

$$BE_, = BM - E_,M = \frac{a^2 - \frac{e^2}{a^2}x_,^2}{x_,},$$

$$CD_, = CM + D_,M = \frac{b^2 + \frac{e^2}{b^2}y_,^2}{y_,},$$

$$BQ = \frac{BE_,}{BE} \cdot BO = \frac{a\sqrt{yy_,}}{bx_,} \frac{a^2 - \frac{e^2}{a^2}x_,^2}{a_0},$$

$$CQ = \frac{CD_,}{CD} \cdot CO = \frac{b\sqrt{xx_,}}{ay_,} \frac{b^2 + \frac{e^2}{b^2}y_,^2}{a_0},$$

Fig. 7., 8.

$$\text{h)} \ldots \left\{ \begin{aligned} HM &= \frac{CM}{CD} . DO = \frac{ab\sqrt{x}}{a_0 \sqrt{x_,}}, \\ HO &= \frac{DO}{CD} . EM = \frac{x\sqrt{yy_,}}{ab} . \frac{e^2}{a_0}, \\ E_,Q &= \frac{BE_,}{BM} . HM = \frac{b\sqrt{x}}{a\sqrt{x_,}} \frac{a^2 - \frac{e^2}{a^2} x_,^2}{a_0}, \\ D_,Q &= \frac{CD_,}{CM} . HM = \frac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{x_,}} \frac{b^2 + \frac{e^2}{b^2} y_,^2}{a_0}, \\ JM &= \sqrt{HM^2 + FN^2} = \frac{\sqrt{\frac{y}{y_,} (b^2 + \frac{e^2}{b^2} y_,^2)}}{a_0} . a, \\ EF &= \sqrt{CM^2 + e^2} = \frac{b}{y_,} \sqrt{b^2 + \frac{e^2}{b^2} y_,^2}. \end{aligned} \right.$$

Die unter g) und h) gegebenen Gleichungen gestatten eine vollständige Untersuchung des vorliegenden Liniensystems in Bezug auf seine geometrischen Eigenschaften. Die hervorragendsten der resultirenden Sätze führe ich im folgenden Paragraphen und im Anschluss an den in 4. b. bereits erwähnten in einem Zusammenhange auf, der sich auch analytisch begründen lässt.

§. 8.

Satz 4. b. (Fig. 7.) Die Polare irgend eines Punktes, der auf einer gegebenen Geraden liegt, geht durch den Pol dieser Geraden; und der Pol irgend einer Geraden, die durch einen gegebenen Punkt geht, liegt auf der Polare dieses Punktes. Insbesondere:

$$4.\ \text{b.} \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} BM . x_, &= a^2 = B_,M . x, \\ CM . y_, &= b^2 = C_,M . y. \end{aligned} \right.$$

Satz 5. Fällt man aus beliebigen Punkten einer Parallelen zu einer der Hauptaxen Normalen auf die Polaren der betreffenden Punkte, so durchschneiden sie alle diese Normalen in demselben Punkte der conjugirten Hauptaxe; und fällt man aus den Polen beliebiger Geraden, die durch denselben Punkt auf einer der Hauptaxen gehen, Normalen auf die betreffenden Geraden, so

durchschneiden sie alle diese Normalen in einem Punkte jener Hauptaxe.

$$5. \ldots \quad \begin{cases} EM = \frac{e^2}{a^2}x; \quad E_{,}M = \frac{e^2}{a^2}.x_{,}; \\ DM = \frac{e^2}{b^2}y; \quad D_{,}M = \frac{e^2}{b^2}.y_{,}. \end{cases}$$

Satz 6. Die Polare irgend eines Punktes innerhalb oder ausserhalb der Ellipse theilt den von der Normale des zugeordneten Punktes auf einer der Hauptaxen bestimmten Abschnitt im quadratischen Verhältniss der resp. halben Hauptaxe zu dem der Polare parallelen Halbmesser.

$$6. \ldots \quad \begin{cases} \frac{BM}{BE} = \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{B_{,}M}{B_{,}E_{,}}, \\ \frac{CM}{CD} = \frac{b^2}{a_0^2} = \frac{C_{,}M}{C_{,}D_{,}}, \end{cases}$$

Satz 7. Das Rechteck aus der Senkrechten vom Mittelpunkt auf die Polare irgend eines Punktes in die Normale desselben Punktes ist constant gleich dem Quadrat des conjugirten Halbmessers derjenigen Hauptaxe, welche diese Normale begrenzt.

$$7. \ldots \quad \begin{cases} HM.D_{,}O_{,} = a^2 = H_{,}M.DO, \\ HM.E_{,}O_{,} = b^2 = H_{,}M.EO. \end{cases}$$

Satz 8. Das Rechteck aus der Projection der Entfernung irgend eines Punktes vom Mittelpunkt auf seine Polare in den Abschnitt einer der Hauptaxen von dieser Polare ist gleich der Differenz der Quadrate über dem der Polare parallelen Halbmesser und dem conjugirten Halbmesser der betreffenden Hauptaxe.

$$8. \ldots \quad \begin{cases} BO.H_{,}O_{,} = a_0^2 - b^2 = B_{,}O_{,}.HO, \\ CO.H_{,}O_{,} = a^2 - a_0^2 = C_{,}O_{,}.HO. \end{cases}$$

Satz 9. Das Rechteck aus den Abschnitten, welche die Polare eines Punktes und seine Normale in irgend einer der Hauptaxen bestimmen, ist constant gleich dem Quadrat der Excentricität der Ellipse.

$$9. \ldots \quad \begin{cases} BM.E_{,}M = e^2 = B_{,}M.EM, \\ CM.D_{,}M = e^2 = C_{,}M.DM. \end{cases}$$

Satz 10. Vermehrt man das Rechteck aus den Senkrechten vom Mittelpunkt auf die Polaren zweier zugeordneten Punkte um

... Excentricität auf diese Polaren, ... Quadrat über der halben ... man aber dasselbe Rechteck ... der Excentricität auf die Nor- ... Differenz constant gleich dem ... kleinen Axe der Ellipse.

... Senkrechten vom Mittel- ... Punktes in den Abschnitt der ... der Normale dieses Punktes ist ... Verbindungslinie des Mittelpunktes ... aus einem der Brennpunkte ... aus derselben Senkrechten in ... grossen Axe von der Normale ... dem Rechteck der Senkrechten aus den ...

$$\ldots a^2 = KM^2,$$

$$\ldots a^2 = K_1M^2,$$

$$\ldots b^2 = FJ.GK,$$

$$\ldots b^2 = FJ_1.GK_1.$$

... Brennpunkten Senkrechte auf ... ausserhalb der Ellipse liegenden. ... dem Abstande ihres Mittel- ... Senkrechten, vermehrt resp. ver- ... Abständen des Mittelpunktes ... Polare constant gleich ... Axe, aber das Rechteck ... resp. vermindert um das ... Mittelpunktes und des gege- ... constant gleich dem Qua- ...

$$12. \ldots \begin{cases} KM^2 + HM.O_,Q = a^2 = K_,M^2 - H_,M.OQ_,, \\ FJ.GK + HM.O_,Q = b^2 = FJ_,.GK_, - H_,M.OQ_,. \end{cases}$$

Satz 13. Für alle Punkte ein und desselben Durshmessers ist das Rechteck aus der Projection seiner Entfernung vom Mittelpunkt auf die Polare in die Projection der Entfernung seines zugeordneten Punktes auf die zugehörige Normale constant gleich dem Rechteck aus den Projectionen der Excentricität auf die Polare und ihre Normale.

$$13. \ldots \begin{cases} HM.H_,O_, = FN.MN = H_,M.HO, \\ \dfrac{x_, y}{a_0^2} = \dfrac{FN.MN}{e^2} = \dfrac{x y_,}{a_0^2}. \end{cases}$$

Satz 14. (Fig. 8.) Fällt man von einem Punkte innerhalb oder ausserhalb der Ellipse eine Senkrechte auf seine Polare, so ist die Summe der Leitstrahlen aus dem Fusspunkt dieser Senkrechten doppelt so gross als die Entfernung des Mittelpunktes vom Fusspunkt einer Senkrechten aus dem Brennpunkt auf dieselbe Polare; und das Product der Leitstrahlen gleich dem Product aus den Abschnitten der beiden Hauptaxen von der Polare und ihrer Normale.

Verbindet man aber den Durchschnittspunkt jener Senkrechten und der Grossen Axe mit den Durchschnittspunkten der Polare und den in den Brennpunkten auf der Grossen Axe errichteten Senkrechten, so ist die Summe dieser Nebenstrahlen doppelt so gross als die Entfernung des Durchschnittspunktes der Polare und Kleinen Axe von einem der Brennpunkte; und das Product derselben Strahlen gleich einem Rechteck aus dem von der Polare und Normale auf der Kleinen Axe bestimmten Abschnitt in die Senkrechte, welche man im Durchschnitt der Normale und Grossen Axe errichtet.

$$14. \ldots \begin{cases} FQ + GQ = 2\,\dfrac{\sqrt{\dfrac{y}{y_,}\left(b^2 + \dfrac{e^2}{b^2} y_,^2\right)}}{a_0}.\,a = 2JM, \\ E_,P + E_,R = 2\,\dfrac{b}{y_,}\sqrt{b^2 + \dfrac{e^2}{b^2} y_,^2} = 2CF; \\ FQ.\,GQ = \dfrac{\dfrac{y}{y_,}\left(b^2 + \dfrac{e^2}{b^2} y_,^2\right)\left(a^2 - \dfrac{e^2}{a^2} x_,^2\right)}{a_0^2} = BQ.CQ, \\ E_,P.E_,R = \dfrac{b^2}{a^2 y_,^2}\left(b^2 + \dfrac{e^2}{b^2} y_,^2\right)\left(a^2 - \dfrac{e^2}{a^2} x_,^2\right) = CD_,.E_,S. \end{cases}$$

Satz 15. Die Leitstrahlen des Fusspunktes der genannten Senkrechten bilden mit der Polare gleiche Winkel; und multiplicirt man den Sinus dieses Winkels mit dem von der Polare und Kleinen Axe bestimmten Abschnitt der Normale, so ist das Product gleich der Entfernung des Mittelpunktes vom Fusspunkt der Senkrechten aus einem Brennpunkt auf die Polare.

Die Nebenstrahlen aber bilden mit der Grossen Axe gleiche Winkel; und multiplicirt man deren Sinus mit dem Abschnitt der Polare und Normale von der Kleinen Axe, so ist das Product gleich der Entfernung des Durchschnittspunktes der Polare und Kleinen Axe von einem der Brennpunkte.

$$15. \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{BF}{BG} = \frac{FJ}{GK} = \frac{a^2 - ex_{,}}{a^2 + ex_{,}} = \frac{JQ}{KQ} = \frac{FQ}{GQ}, \\ \frac{BF}{BG} = \frac{FP}{GR} = \frac{a^2 - ex_{,}}{a^2 + ex_{,}} = \frac{E_{,}F}{E_{,}G} = \frac{E_{,}P}{E_{,}R}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} D_{,}Q \,.\, \sin\alpha = \frac{\sqrt{\frac{y}{y_{,}}\left(b^2 + \frac{e^2}{b^2} y_{,}^2\right)}}{a_0^2} \,.\, a = JM, \\ CD_{,} \,.\, \sin\beta = \frac{b}{y_{,}} \sqrt{b^2 + \frac{e^2}{b^2} y_{,}^2} = CF. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Satz 16. (Fig. 9.) Für jede durch den Endpunkt der Kleinen Axe gezogene Secante ist nicht nur die Summe der Nebenstrahlen constant gleich der Grossen Axe der Ellipse, sondern diese Nebenstrahlen sind auch einzeln gleich den Leitstrahlen des Berührungspunktes einer mit der Secante durch denselben Punkt der Grossen Axe gehenden Tangente, also ihr Product gleich dem Quadrat des der Tangente parallelen Halbmessers.

Die Winkel der Nebenstrahlen einer durch den Endpunkt der Kleinen Axe gezogenen Secante mit der Grossen Axe sind constant dieselben, so dass diese Strahlen stets den Verbindungslinien des Endpunktes der Kleinen Axe mit den Brennpunkten parallel laufen; und der Sinus dieses Winkels ist sowohl gleich dem Verhältniss der Kleinen zur Grossen Axe, als auch gleich dem Verhältniss der halben Grossen Axe zu dem constanten Abschnitt der gegebenen Secante und der Normale aus ihrem Pol von der Kleinen Axe.

$$16\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}E_{,}U+E_{,}V=2\frac{b}{y_{,}}\sqrt{b^2+\frac{e^2}{b^2}y_{,}^2}=2a,\\ \quad(y_{,}=b),\\ E_{,}U=a-\frac{e}{a}x_{,}=FT,\\ E_{,}V=a+\frac{e}{a}x_{,}=GT,\\ E_{,}U.E_{,}V=a^2-\frac{e^2}{a^2}x_{,}^2=c_0^2;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\frac{b}{a}=\frac{FU}{E_{,}U}=\sin\beta=\frac{FW}{WZ}=\frac{a}{WZ},\\ \quad(b.WZ=a^2).\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Diesem Satz lassen sich verschiedene Aufgaben anschliessen, welche ich hier nicht einzeln namhaft machen will, da sie sich gewissermassen von selber stellen. Es gründet sich darauf auch eine Construction der Ellipse aus ihren Axen, welche eine nicht unbeachtungswerthe Eigenthümlichkeit darbietet. Sucht man nämlich zu den Brennpunkten (FG) einer Ellipse irgend zwei zugeordnete harmonische Punkte ($BE_{,}$), verbindet den äusseren (B) mit dem Endpunkte (W) der Kleinen Axe und errichtet die Senkrechten (FU), (GV), so sind nicht nur die Nebenstrahlen ($E_{,}U$), ($E_{,}V$) der Secante (UV) Leitstrahlen eines Punktes (T) im Umfang der Ellipse, sondern die beiden Constructionspunkte ($BE_{,}$) sind gleichzeitig die Fusspunkte der demselben Peripheriepunkt (T) angehörigen Tangente und Normale.

St. Petersburg, den 6. December 1869.

XI.

Beweis des nach Fermat benannten geometrischen Satzes.

Von

Herrn *Tarquinio Fuortes.*

Mitgetheilt

durch den Herausgeber.

(Fig. s. Taf. V.)

Für den nach Fermat benannten geometrischen Satz sind im Archiv schon eine ziemliche Anzahl mehr oder weniger von einander verschiedener Beweise gegeben worden; dass solche Beweise meistens einiges Gemeinsame haben müssen, liegt in der Natur der Sache, und die Verschiedenheit liegt öfters bloss in der Darstellung. Auch der folgende Beweis des Herrn Tarquinio Fuortes, den ich aus dem trefflichen Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane. Vol. VII. 1869. p. 378, durch dessen Herausgabe Herr G. Battaglini in Neapel sich ein so grosses Verdienst erwirbt, hier mittheile, hat mit schon bekannten früheren Beweisen Manches gemein; seine Darstellung und Anordnung ist mir aber so einfach und zweckmässig erschienen, dass ich seine Mittheilung in dieser Zeitschrift für angemessen hielt.

Lehrsatz.

Wenn über einer geraden Linie AB als Durchmesser und Grundlinie auf verschiedenen Seiten

dieser Linie ein Halbkreis AMB und ein Rechteck $ABA''B''$, dessen einander gleiche Höhen AB'' und BA'' der Sehne der Hälfte des Halbkreises AMB gleich sind, beschrieben sind, und von dem beliebigen Punkte M des Halbkreises nach A'' und B'' die Linien MA'' und MB'' gezogen werden, welche die Linie AB in den Punkten A' und B' schneiden; so ist immer:

$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = \overline{AB}^2.$$

Beweis.

Man denke sich von dem Punkte M auf AB das Perpendikel MN gefällt, und ziehe die Linien MA, MB, welche, verlängert, die verlängerte Linie $A''B''$ in C, D schneiden.

Es ist:

$$\overline{CA''}^2 = (\overline{CB''} + \overline{A''B''})^2 = \overline{CB''}^2 + \overline{A''B''}^2 + 2.\overline{CB''}.\overline{A''B''},$$

$$\overline{DB''}^2 = (\overline{DA''} + \overline{A''B''})^2 = \overline{DA''}^2 + \overline{A''B''}^2 + 2.\overline{DA''}.\overline{A''B''};$$

also:

$$\overline{CA''}^2 + \overline{DB''}^2$$
$$= \overline{CB''}^2 + \overline{DA''}^2 + 2.\overline{A''B''}^2 + 2.\overline{CB''}.\overline{A''B''} + 2.\overline{DA''}.\overline{A''B''}.$$

Die Dreiecke $AB''C$, $BA''D$ sind offenbar beziehungsweise den Dreiecken AMN, BMN ähnlich, und da diese letzteren Dreiecke bekanntlich einander ähnlich sind, so sind auch die Dreiecke $AB''C$, $BA''D$ einander ähnlich. Folglich ist:

$$\overline{CB''} : \overline{AB''} = \overline{BA''} : \overline{DA''},$$

$$\overline{AB''}.\overline{BA''} = \overline{AB''}^2 = \overline{BA''}^2 = \overline{CB''}.\overline{DA''};$$

nach der Voraussetzung ist aber:

$$\overline{AB''}^2 = \overline{BA''}^2 = \tfrac{1}{2}.\overline{AB}^2,$$

also:

$$\overline{AB}^2 = \overline{A''B''}^2 = 2.\overline{AB''}^2 = 2.\overline{BA''}^2 = 2.\overline{CB''}.DA''.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$\overline{CA''}^2 + \overline{DB''}^2$$
$$= \overline{CB''}^2 + \overline{A''B''}^2 + \overline{DA''}^2 + 2.\overline{CB''}.\overline{A''B''} + 2.\overline{A''B''}.\overline{DA''} + 2.\overline{DA''}.\overline{CB''}$$
$$= (\overline{CB''} + \overline{A''B''} + \overline{DA''})^2 = \overline{CD}^2,$$

so dass man also die Gleichung

$$\overline{CA''}^2+\overline{DB''}^2=\overline{CD}^2$$

hat. Weil nun aber offenbar

$$\overline{CA''}:\overline{AA'}=\overline{A''B''}:\overline{A'B'},$$

$$\overline{DB''}:\overline{BB'}=\overline{A''B''}:\overline{A'B'},$$

$$\overline{CD}:\overline{AB}=\overline{A''B''}:\overline{A'B'};$$

also:

$$\overline{CA''}=\overline{AA'}.\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}},$$

$$\overline{DB''}=\overline{BB'}.\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}},$$

$$\overline{CD'}=\overline{AB}.\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden offenbar auch:

$$\overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2=\overline{AB}^2,$$

w. z. b. .w

XII.

Sehr einfacher Beweis des Satzes, dass die Mittelpunkte der drei Diagonalen jedes vollständigen Vierecks in einer geraden Linie liegen.

Von

Herrn ***Matthew Collins.***

Mitgetheilt

von dem Herausgeber.

(Figuren s. Taf. V.)

In der sehr zur Beachtung zu empfehlendeu kleinen Schrift:

Geometrical Miscellanies, by Matthew Collins, B. A. Senior Moderator in Mathematics and Physics, and Bishop Law's Mathematical Prizeman, Trin. Coll. Dublin. From the Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles of Bordeaux. Bordeaux. 1870. §. II.

hat Herr M. Collins einen sehr schönen ungemein einfachen Beweis des bekannten merkwürdigen Satzes gegeben: dass die Mittelpunkte der drei Diagonalen des vollständigen Vierecks jederzeit in einer geraden Linie liegen; welchen ich im Folgenden mittheilen werde.

Das vollständige Viereck sei $ABCDEF$ **(Fig. 1); seine drei Diagonalen sind** AC, BD, EF, **von denen nur die erste in der Figur wirklich gezogen ist. Mit den Seiten** AE **und** AF **des vollständigen Vierecks beschreibe man das Parallelogramm** $AEJF$,

und ziehe mit dessen Seiten durch die Punkte B, C, D Parallelen, wie die Figur zeigt. Dann ist:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Par. } AC = \text{Par. } CK \\ \text{Par. } AC = \text{Par. } CH\end{array}\right\} \text{als Ergänzungs-parallelogramme.}$$

also:

$$\text{Par. } CK = \text{Par. } CH,$$

und folglich, wenn man von diesen gleichen Parallelogrammen das Parallelogramm CM abzieht:

$$\text{Par. } LM = \text{Par. } GM.$$

Also muss der offenbar innerhalb des Parallelogramms LG liegende Punkt M in der Diagonale CJ des Parallelogramms LG liegen (s. unten Lemma I.), und es ist folglich CMJ eine gerade Linie.

Weil die Diagonalen eines jeden Parallelogramms sich gegenseitig halbiren, so ist der Mittelpunkt der Diagonale BD des vollständigen Vierecks der Mittelpunkt von AM, und der Mittelpunkt der Diagonale EF des vollständigen Vierecks ist der Mittelpunkt von AJ. Die Mittelpunkte der Diagonalen AC, BD, EF des vollständigen Vierecks fallen also mit den Mittelpunkten der Linien AC, AM, AJ zusammen. Dass aber die Mittelpunkte dieser drei Linien in einer mit der vorher als gerade Linie nachgewiesenen Linie CMJ parallelen Linie liegen, ist leicht zu beweisen (s. unten Lemma II.); also liegen auch die Mittelpunkte der drei Diagonalen des vollständigen Vierecks in einer geraden Linie, w. z. b. w.

Lemma I.

Wenn $ABCD$ (Fig. 2) ein Parallelogramm, E ein innerhalb dieses Parallelogramms liegender Punkt ist, durch E mit den Seiten des Parallelogramms $ABCD$ die Parallelen KN und JL gezogen sind, und die Parallelogramme BE und CE gleiche Flächenräume haben: so liegt der Punkt E in der Diagonale AD — (natürlich auch ebenso in der Diagonale BC) — des Parallelogramms $ABCD$.

Beweis.

Wenn der Punkt E nicht in der Diagonale AD läge, so möge dieselbe von den durch E mit den Seiten des Parallelogramms $ABCD$ gezogenen Parallelen KN und JL in den Punkten

G und H geschnitten werden. Nach dem Satze von den Ergänzungsparallelogrammen ist:

$$\text{Par. } CG = \text{Par. } BG = P,$$

$$\text{Par. } CH = \text{Par. } BH = Q.$$

Offenbar ist aber:

$$\text{Par. } CE < \text{Par. } CG \quad | \quad \text{Par. } CE < \text{Par. } CH$$

$$\text{Par. } BE > \text{Par. } BG \quad | \quad \text{Par. } BE > \text{Par. } BH;$$

folglich:

$$\text{Par. } CE < P < \text{Par. } BE \quad | \quad \text{Par. } CE < Q < \text{Par. } BE$$

also:

$$\text{Par. } BE > \text{Par. } CE.$$

Nach der Voraussetzung ist aber:

$$\text{Par. } BE = \text{Par. } CE,$$

und daher die Annahme falsch, dass der Punkt E nicht in der Diagonale AD liegen könne, so dass also E in der Diagonale AD liegen muss, w. z. b. w.

Lemma II.

Wenn D, E in Fig. 3. die Mittelpunkte der Seiten AB, AC des Dreiecks ABC sind, so ist die Linie DE der Seite BC dieses Dreiecks parallel.

Beweis.

Man ziehe die Linien BE und CD, so ist — als Dreiecke on gleichen Grundlinien und Höhen:

$$\Delta\, BDE = \Delta\, ADE,$$

$$\Delta\, CED = \Delta\, ADE;$$

lso:

$$\Delta\, BDE = \Delta\, CED.$$

a nun diese einander gleichen Dreiecke die gemeinschaft-:he Grundlinie DE haben, so müssen sie gleiche Höhen habe muss also DE parallel BC sein, w. z. b. w.

Zusatz.

[illegible] E, F, G (Fig. 4) der von dem [illegible] gezogenen Geraden AB, [illegible]

[illegible] ist EF parallel MN und [illegible] durch den gemeinschaft- [illegible] Geraden EF und FG [illegible] von den Punkten [illegible]

[illegible] Beweis des ganz elementaren [illegible] hierher gesetzt, um [illegible] des obigen schönen [illegible] in der Geometrie zweck- [illegible] mittelst der Pro- [illegible] des Flächen- [illegible]

[illegible] Herrn M. Collins sehr, [illegible] aufgenommen zu werden, [illegible] schöne Anwendung [illegible] Ergänzungsparal- [illegible] Aufgaben über die [illegible] in der Geome- [illegible] M. Collins scheint [illegible] dieses geome- [illegible] und verdient [illegible] beim Unter- [illegible]

[illegible]

möge [illegible]
gramm [illegible]

XIII.

Ueber die Entfernung des Schwerpunkts eines Dreiecks und des Mittelpunkts des in das Dreieck beschriebenen Kreises von einander.

Von

dem Herausgeber.

In der zwar nur kleinen, aber manches Bemerkenswerthe enthaltenden, Lehrern zur Beachtung zu empfehlenden Schrift (m. s. auch den vorigen Aufsatz):

Geometrical Miscellanies, by Matthew Collins, B. A. Senior Moderator in Mathematics and Physics, and Bishop Law's Mathematical Prizeman, Trin. Coll. Dublin. From the Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles of Bordeaux. Bordeaux. 1870. §. VIII.

hat der Herr Verfasser für die Entfernung des Schwerpunktes eines Dreiecks von dem Mittelpunkte des in das Dreieck beschriebenen Kreises eine durch die Seiten des Dreiecks ausgedrückte Formel gegeben.

In meiner Abhandlung:

Ueber die Entfernungen der merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von einander. Thl. XXXVI. S. 349.

habe ich für diese Entfernung, welche ich durch E bezeichnet habe, wenn R und r den Halbmesser des um und in da Dreieck beschriebenen Kreises und A, B, C die Winkel des

Dreiecks bezeichnen, die folgende sehr bemerkenswerthe Formel gefunden:

$$9E^2 = 6(R-r)^2 - 2(1-2\cos A\cos B\cos C)R^2.$$

In jener Abhandlung habe ich mich absichtlich aller weiteren Entwickelungen und namentlich der durchaus keiner Schwierigkeit unterliegenden Einführung der Seiten des Dreiecks in die in ziemlich grosser Anzahl von mir gefundenen merkwürdigen Formeln ganz enthalten, weil ich glaubte dieselbe den Lesern überlassen und zugleich auf weitere zur Aufnahme in das Archiv mir zu machende Mittheilungen über diesen interessanten Gegenstand hoffen zu dürfen. Da diese Hoffnung bisher nicht in Erfüllung gegangen ist, so will ich jetzt einmal — um zugleich die Schrift des Herrn M. Collins noch weiter zur Beachtung zu empfehlen — zeigen, wie sich seine Formel aus meiner obigen Formel ableiten lässt.

Bezeichnen wir wie gewöhnlich die Seiten des Dreiecks durch a, b, c und seinen Inhalt durch Δ, so ist nach allgemein bekannten Formeln:

$$R = \frac{abc}{4\Delta}, \qquad r = \frac{2\Delta}{a+b+c};$$

also:

$$R - r = \frac{abc}{4\Delta} - \frac{2\Delta}{a+b+c},$$

und folglich:

$$6(R-r)^2 = \frac{3a^2b^2c^2}{8\Delta^2} - \frac{6abc}{a+b+c} + \frac{24\Delta^2}{(a+b+c)^2}.$$

Ferner ist nach einer sehr bekannten Formel (Thl. XXXV. S. 354.):

$$\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 = 2(1+\cos A\cos B\cos C),$$

also:

$$1 - 2\cos A\cos B\cos C = 3 - \sin A^2 - \sin B^2 - \sin C^2.$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\sin A = \frac{2\Delta}{bc}, \qquad \sin B = \frac{2\Delta}{ca}, \qquad \sin C = \frac{2\Delta}{ab};$$

also:

$$1 - 2\cos A\cos B\cos C = 3 - \frac{4\Delta^2}{b^2c^2} - \frac{4\Delta^2}{c^2a^2} - \frac{4\Delta^2}{a^2b^2},$$

und folglich:

$$2(1-2\cos A\cos B\cos C)R^2$$
$$=2\left(3-\frac{4\Delta^2}{b^2c^2}-\frac{4\Delta^2}{c^2a^2}-\frac{4\Delta^2}{a^2b^2}\right).\frac{a^2b^2c^2}{16\Delta^2}=\frac{3a^2b^2c^2}{8\Delta^2}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Also ist nach meiner obigen Formel:

$$9E^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-\frac{6abc}{a+b+c}+\frac{24\Delta^2}{(a+b+c)^2}.$$

Bekanntlich ist:

$$\Delta^2=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{16},$$

also, wenn man dies in das dritte Glied des Ausdrucks von $9E^2$ einführt:

$$9E^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-\frac{6abc}{a+b+c}+\frac{3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2(a+b+c)},$$

oder:

$$9E^2=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-12abc+3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2(a+b+c)}.$$

Mittelst ganz elementarer Rechnung findet man:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$
$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-a^3-b^3-c^3-2abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-2a^3-2b^3-2c^3-2abc,$$

folglich:

$$9E^2=\frac{2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3a^3-3b^3-3c^3-9abc}{a+b+c}.$$

Wenn man mit $a+b+c$ in

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

dividirt, so findet man leicht, dass

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

ist; also ist:

$$2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3a^3-3b^3-3c^3-9abc$$
$$=2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)-18abc$$
$$=(a+b+c)(3ab+3bc+3ca-a^2-b^2-c^2)-18abc,$$

folglich:

$$9E^2 = \frac{(a+b+c)(3ab+3bc+3ca-a^2-b^2-c^2)-18abc}{a+b+c},$$

und daher:

$$E^2 = \frac{3ab+3bc+3ca-a^2-b^2-c^2}{9} - \frac{2abc}{a+b+c},$$

oder:

$$E^2 = \frac{ab+bc+ca}{3} - \frac{a^2+b^2+c^2}{9} - \frac{2abc}{a+b+c},$$

was ganz mit der von Herrn M. Collins a. a. O. gefundenen Formel übereinstimmt.

Weitere Mittheilungen über ähnliche Gegenstände, anzuschliessend an meine oben genannte Abhandlung, scheinen mir wünschenswerth zu sein.

XIV.

Le lieu du centre du cercle inscrit à un quadrilatère circonscriptible donné.

Par

Monsieur ***Fasbender***,

Professeur à Thorn.

Soit E le centre du cercle inscrit au quadrilatère circonscriptible $ABCD$, F le point de contact du côté AB, y le rayon. Désignons par a, b, c, $a+c-b$, respectivement les côtés DA, AB, BC, CD, la distance AF par x. On trouvera

$$\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{x}{y}, \quad \text{cotang}\,\tfrac{1}{2}B = \frac{b-x}{y}, \quad \text{cotang}\,\tfrac{1}{2}C = \frac{c-b+x}{y},$$

$$\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}D = \frac{a-x}{y}, \quad \text{cotang}\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}C) = \frac{x.(c-b+x)-y^2}{y.(c-b+2x)},$$

$$\text{cotang}(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}D) = \frac{(a-x).(b-x)-y^2}{y.(a+b-2x)}.$$

A cause de

$$\text{cotang}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}C) + \text{cotang}(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}D) = 0,$$

on a

$$\frac{x.(c-b+x)-y^2}{y.(c-b+2x)} + \frac{(a-x).(b-x)-y^2}{y.(a+b-2x)} = 0,$$

d'où il résulte

$$y^2 + \left(x - \frac{ab}{a+c}\right)^2 = \frac{a.b.c.(a+c-b)}{(a+c)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 1).$$

Les côtés du quadrilatère $ABCD$ étant seuls donnés, celui-ci n'est pas suffisamment determiné. On le pourra donc supposer variable de position dans son plan, le côté AB seul étant fixe. Parmi les différents quadrilatères obtenus de cette manière il s'en trouvera qui contiennent un angle plus grand que deux droits, et même égal à quatre droits. Quant à ceux-là, le cercle inscrit touche les prolongements des côtés de l'angle indiqué; les quatre côtés de ceux-ci coïncident en une seule ligne et le cercle inscrit se réduit à un point. Je m'abstiens de faire la distinction spéciale de ces différents cas, dont les éventualités sont liées avec les relations qui existent entre les valeurs des quantités a, b, c. Lorsqu'on suppose $a = b$, il y aura même un quadrilatère avec deux angles chacun égal à deux droits.

Soint A l'origine des coordonnées, AB l'axe des abscisses. Les quantités y et x seront les coordonnées de E. Ainsi, l'équation 1) indique que le centre E du cercle inscrit au quadrilatère circonscriptible $ABCD$, dont on suppose le côté AB fixe, est situé à la circonférence d'un cercle. Le centre de celui-ci se trouve dans le côté AB et le divise dans la proportion des côtés adjacents AD et BC. Le carré de son rayon est égal au produit des quatre côtés divisé par le carré de la moitié du perimètre du quadrilatère. Les points d'intersection du cercle 1) avec le côté AB indiquent chacun un cercle inscrit qui se réduit à un point.

L'ordonnée de E étant le rayon du cercle inscrit, celui-ci sera maximum, lorsque son rayon est égal à celui du cercle 1). Dans ce cas, le cercle inscrit à $ABCD$ touchera AB au centre de 1), et les trois autres côtés de $ABCD$ sont divisés d'une manière analogue aux points où ils sont touchés par le cercle inscrit. Quant au centre du cercle inscrit maximum, on a

$$y^2 = \frac{a.b.c.(a+c-b)}{(a+c)^2}, \quad x = \frac{ab}{a+c};$$

par conséquent

$$c-b+x = \frac{c.(a+c-b)}{a+c}.$$

On tire de là

$$x.(c-b+x) = y^2, \quad \text{cotang}(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}C) = 0, \quad A+C = 180^0;$$

ce qui indique que dans le cas du cercle inscrit maximum, le quadrilatère *ABCD* est inscriptible et maximum lui-même.

Thorn, 26. Mai 1870.

XV.

Miscellen.

Schreiben des Herrn Franz Unferdinger in Wien an den Herausgeber.

In meiner Abhandlung über die Reduction von Arc. $\text{tg}(\xi+i\eta)$ auf die Normalform $x+iy$, welche Sie in den 49. Theil Ihres Archives aufzunehmen die Güte hatten, wurde unter Anderem auf zweierlei Art nachgewiesen, dass die von Schlömilch in seinem Compendium der höheren Analysis, Bd. I, S. 269 abgeleitete Reduction:

$$\text{für } \eta^2 > 1, \quad \text{arc. tg } i\eta = \frac{i}{2}\, lg\, \frac{\eta+1}{\eta-1}$$

falsch ist, indem rechts vom Gleichheitszeichen noch $\frac{\pi}{2}$ als reeller Summand hinzugefügt werden muss, was allerdings aus Schlömilch's Ableitung nicht hervorgeht.

Erlauben Sie mir noch über einige andere Mängel in Schlömilch's Compendium, welche ich zu bemerken Gelegenheit hatte, in Kürze zu berichten, mit der Bitte, das Folgende so bald als möglich im „Archiv d. M. u. P." abdrucken zu lassen.

Im 1. Bd. seines Compendiums S. 334 beschäftiget sich Schlömilch mit der Bestimmung des bekannten allgemeinen Integrals:

$$(1) \ldots\ldots\ldots \int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}};$$

er findet dafür, wenn $a\beta - b\alpha > 0$:

$$-\frac{2}{\sqrt{a^2\beta^2-b^2\alpha^2}} \text{ arc. tg.} \sqrt{\frac{a\beta-b\alpha}{a\beta+b\alpha}\cdot\frac{\alpha-\beta x}{\alpha+\beta x}} + C$$

und wenn $a\beta - b\alpha < 0$:

$$-\frac{1}{\sqrt{b^2\alpha^2-a^2\beta^2}} \lg \frac{\sqrt{(b\alpha+a\beta)(\alpha+\beta x)}+\sqrt{(b\alpha-a\beta)(\alpha-\beta x)}}{\sqrt{(b\alpha+a\beta)(\alpha+\beta x)}-\sqrt{(b\alpha-a\beta)(\alpha-\beta x)}} + C.$$

Die Unterscheidung zweier Fälle ist allerdings nothwendig und hat den Zweck imaginäre Integralfunctionen zu vermeiden; aber bei der von Schlömilch getroffenen Unterscheidung wird dieser Zweck nicht erreicht; denn denkt man sich unter α, β, a positive Zahlen, so wird für grosse negative Werthe von b die erste Bedingung erfüllt, aber das entsprechende Integrale erscheint wegen des Factors vor arc. tg in imaginärer Form, die zweite Bedingung ist dann nicht erfüllt, aber das entsprechende Integrale erscheint in reeller Form.

Ebenso ist für α, β, b als positive Zahlen und für hinreichend grosse negative Werthe von a die erste Bedingung nicht erfüllt und das entsprechende Integrale erscheint in reeller Form, hingegen ist die zweite Bedingung erfüllt und das zugehörige Integrale erscheint in imaginärer Form.

Die Sache verhält sich anders und zwar so:

Das Integrale (1) wird rational gemacht durch die Substitution:

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1-y^2}{1+y^2},$$

in welcher y die neue Variabele bezeichnet, und eine einfache Rechnung ergibt:

$$\int \frac{dy}{1 + \frac{a\beta - b\alpha}{a\beta + b\alpha} y^2};$$

... sieht nun sogleich, dass hier jene zwei Fälle ... für welche

$$\frac{a\beta - b\alpha}{a\beta + b\alpha} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{a\beta - b\alpha}{a\beta + b\alpha} < 0,$$

... dieselbe ist, für welche

$$a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 > 0 \quad \text{und} \quad a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 < 0.$$

... That gibt die fernere Rechnung die beiden Resultate:

für $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 > 0$,

$$\int \frac{dx}{(a + bx)\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2\beta^2 - b^2\alpha^2}} \text{arc. tg} \sqrt{\frac{a\beta + b\alpha}{a\beta - b\alpha} \cdot \frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x}} + C;$$

für $b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 > 0$,

$$\int \frac{dx}{(a + bx)\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2\alpha^2 - a^2\beta^2}} \log \frac{\sqrt{(\ldots)(\alpha + \beta x)} - \sqrt{(b\alpha - a\beta)(\alpha - \beta x)}}{\sqrt{(\ldots)(\alpha + \beta x)} + \sqrt{(b\alpha - a\beta)(\alpha - \beta x)}} + C.$$

... dem angeregten Uebelstande fr...

... Schlömilch seine eb... Bestimmung des Integrals:

$$\int \frac{du}{a + b\cos u},$$

... übergeht mit $\alpha = \beta = 1$, und au... der Giltigkeit zu corrigiren, denn ...

für: $b^2 < a^2$.

$$\ldots = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{arc. tg} \left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u\right) + C;$$

für $b^2 > a^2$

$$\int \frac{du}{a+b\cos u} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \lg \frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}u}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}u} + C.$$

S. 412 des I. Bandes des Compendiums zeigt Schlömilch mit Hilfe eines Theorems der bestimmten Integrale, dass für θ als positiver echter Bruch:

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin x . x^{m-1}\, dx = \sin\frac{\theta\pi}{4}\cdot\frac{(\frac{1}{4}\pi)^m}{m}$$

und bemerkt dann hierzu:

> „. . . woraus u. A. folgt, dass der Werth des Integrals für unendlich wachsende m gegen die Null convergirt, was auf anderem Weg nicht so leicht zu finden sein würde.“

Dagegen ist zu bemerken:

Da die Function unter dem Integralzeichen für $m = \infty$ für alle Werthe von x zwischen den Integrationsgrenzen und für diese Grenzen selbst verschwindet wegen $\frac{1}{4}\pi < 1$ und da diese Grenzen endlich sind, so ist der Werth dieses Integrals für $m = \infty$ ohne Weiteres gleich Null, und um dieses zu erkennen bedarf es keines eigenen Theorems, noch ist es auf anderem Weg nicht leicht zu finden.

Dasselbe gilt von dem Integrale

$$\int_0^{\varrho} \frac{\sin y}{\sqrt{k\pi + y}}\, dy$$

für $k = \infty$, von welchem im II. Band von Schlömilch's Compendium S. 160 die Rede ist.

Im II. Band des Compendiums S. 35 gibt Schlömilch einen Beweis der geometrischen Bedeutung complexer Zahlen, welcher ebenfalls nicht überzeugend erscheint, erlauben Sie mir mein Bedenken darzulegen.

Nachdem der Verfasser die bekannte Bezeichnung $+r$, $-r$ für die entgegengesetzte Richtung der Strecke r, welche einer Drehung von 180° entspricht, eingeführt hat, sagt er weiter:

> „Bezeichnet man mit r_θ eine Gerade deren Länge r ist, und deren Richtung mit der Richtung der positiven x den Winkel θ einschliesst, so hat man nach dem Vorigen

$r_0 = r(+1)$, $r_\pi = r(-1)$ und man kann daher erwarten, dass im allgemeinen eine Gleichung von der Form stattfinden werde:

$$r_\theta = rf(\theta),$$

worin $f(\theta)$ eine noch unbekannte Function von θ ist, etc."

Aber gerade im Allgemeinen kann man das nicht erwarten, denn zwei specielle Werthe einer Function gestatten keinen weiteren Schluss auf die allgemeine Form derselben.

Im Allgemeinen kann man im vorliegenden Falle für r_θ nur eine solche Function von r und θ erwarten, welche für $\theta = 0$ in $+r$ und für $\theta = \pi$ in $-r$ übergeht.

Speciell und versuchsweise kann man für r_θ die besondere Form $r.f(\theta)$ in die Betrachtung einführen, mehr ist auch hier nicht geschehen und es ist zu bedauern, dass der zuletzt für r_θ gefundene Ausdruck $r.e^{i\theta}$ nur erprobt werden kann an den zwei speciellen Fällen, von welchen man ausgegangen ist.

Es wird in der That r_θ gleich $+r$ für $\theta = 0$ und gleich $-r$ für $\theta = \pi$, aber hundert andere Functionen haben dieselbe Eigenschaft.

Jedenfalls wäre die Schlömilch'sche Darstellung in ihrer Einleitung durch die Bemerkung zu rectificiren, dass so wie die speciellen Richtungsgrössen $+r$ und $-r$ der absoluten Länge r proportional sind, für $r = 0$ verschwinden, so soll auch die allgemeine Richtungsgrösse r_θ für ein constantes θ der absoluten Länge r proportional sein, also zugleich mit r zu Null werden.

Ein Mathematiker wie Schlömilch, welcher in seinen Lehrbüchern, und in seiner Zeitschrift, so oft die Strenge seiner Methoden betont, sollte eine so imperfecte Darstellung sorgfältig vermeiden *).

---

*) Die geringschätzende Sprache, welche sich Herr **Hofrath** Schlömilch wiederholt in seiner Zeitschrift über mich und meine wissenschaftlichen Arbeiten erlaubt, zu erwidern, finde ich mich durchaus nicht bewogen, aber wie wenig berechtiget derselbe hierzu ist, wollte ich an einigen Beispielen seines Compendiums erläutern.

Franz Unferdinger.

Wien, 1. Juni 1870.

XVI.

Discussion complète d'un système d'équations linéaires.

Par

Monsieur *J. Versluys,*

Professeur de Mathématiques à Groningue. (Pays-Bas).

---

1. Dans les pages suivantes se trouvent en premier lieu quelques théorèmes généraux regardant la solution, l'indétermination et l'incompatibilité d'un système d'équations linéaires; ensuite vient une discussion complète de 2, 3 et 4 équations linéaires avec autant d'inconnues.

Un usage continuel est fait du théorème suivant:

Quand le déterminant:

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,m} \end{matrix}\right\|$$

est tel qu'un déterminant mineur du degré p, par exemple

$$\left|\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{p,p} \end{matrix}\right| = P$$

est pas zéro, tandis que zéro sont les $(m-p)(n-p)$ terminants mineurs qui résultent de

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3p} & a_{3k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} & a_{pk} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} & a_{ik} \end{vmatrix} = a_{1k}b_{1k} + a_{2k}b_{2k} + \ldots + a_{pk}b_{pk} +$$

quand on prend pour k tous les nombres de $p+1$ i
pour i tous les nombres de $p+1$ à n, alors tous l
terminants mineurs du degré $p+1$ sont zéro.

Quand les nombres m et n sont égaux, ce théorème es
tique avec celui qui se trouve dans „Baltzer, Theori
Anwendung der Determinanten §. 4., 7.“, et qui à ét
muniqué à M. Baltzer par M. Kronecker en Mars 1864.
m et n sont inégaux, on peut donner du théorème la dém
tion suivante tout-a-fait analogue à celle de Baltzer.

Désignons par $f, g, h, \ldots p+1$ nombres pris arbitrai
dans la série $1, 2, 3, \ldots n$, et par $s, t, u, \ldots p+1$ nombres p
bitrairement dans la série $1, 2, 3, \ldots m$ alors

$$Q = \begin{vmatrix} a_{fs} & a_{ft} & a_{fu} & \ldots \\ a_{gs} & a_{gt} & a_{gu} & \ldots \\ a_{hs} & a_{ht} & a_{hu} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

est un déterminant mineur quelconque du degré $p+1$.
démontrer que Q est zéro on le transforme en un déte
Q_1 du degré $2p+1$, en y ajoutant p colonnes, chacune d
zéros, et p lignes, chacune de $2p+1$ éléments

$$\begin{matrix} a_{1s} & a_{1t} & a_{1u} & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_{2s} & a_{2t} & a_{2u} & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ a_{3s} & a_{3t} & a_{3u} & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Multipliant la première ligne de Q_1 par P, et y ajout
p dernières lignes multipliées respectivement par $b_{1,f}, b_{2,f},$
on obtient dans la première ligne de PQ_1

$$0, \ 0, \ 0, \ldots \ b_{1f}, \ b_{2f}, \ b_{3f} \ldots . b_{pf}.$$

Cela résulte de

$$Pa_{fs} + b_{1f}a_{1s} + b_{2f}a_{2s} + \ldots . b_{pf}a_{ps} = 0.$$

Cette équation est satisfaite d'après la supposition, quand f est un nombre de la série $p+1$, $p+2, \ldots n$, et qu'en même temps s est un nombre de la série $p+1$, $p+2, \ldots\ldots m$; quand f et s ou l'un des deux sont plus petits que $p+1$, le premier membre de l'équation précédente est zéro, puisqu'un déterminant s'évanouit, quand deux de ses lignes ou deux de ses colonnes sont identiques. Effectuant la même transformation à l'égard de la deuxième ligne, à l'égard de la troisième,.... à l'égard de la $p+1^{\text{ième}}$, on trouve

$$P^{m+1}P_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{1f} & b_{2f} & b_{3f} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{1g} & b_{2g} & b_{3g} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{1h} & b_{2h} & b_{3h} & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots \\ a_{1s} & a_{1t} & a_{1u} & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_{2s} & a_{2t} & a_{2u} & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ a_{3s} & a_{3t} & a_{3u} & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}$$

Dans ce déterminant du degré $2p+1$ sont zéro tous les éléments qui sont communs à $p+1$ lignes et à $p+1$ colonnes, et $p+1+p+1 = 2p+2$ étant plus grand que le nombre qui indique l'ordre du déterminant, il s'ensuit que le déterminant précédent ou $P^{m+1}P_1$ est zéro, et comme P n'est pas zéro, il faut que P_1 soit zéro. c. q. f. d.

2. Soit donné le système

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1v + \ldots\ldots &= p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2v + \ldots\ldots &= p_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3v + \ldots\ldots &= p_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

de n équations à n inconnues, et supposons que la résultante de ce système ne soit pas zéro. Alors, d'après une propriété des déterminants, tous les déterminants mineurs qui sont les coefficients des éléments d'une même colonne ne sont pas zéro à la fois. Désignons par A_1 le coefficient de a_1, par A_2 le coefficient de a_2, etc. Multiplions la première équation par A_1, la deuxième par A_2, la troisième par A_3, etc., et faisons ensuite l'addition de tous les équations. Le coefficient de x dans la somme est $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + \ldots\ldots$, ou la résultante du système. Le

coefficient de y est $b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + \dots$, ou le déterminant que l'on obtient, en remplaçant dans la résultante les coefficients de x par ceux de y. Mais on obtient de la sorte un déterminant dont deux colonnes sont identiques, et un tel déterminant est zéro; donc le coefficient de y dans la somme est zéro. De même le coefficient de z est zéro, celui de v, etc. La somme nous donne ainsi

$$x = \frac{p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 + p_4 A_4 + \dots}{R},$$

où R désigne la résultante du système.

De la même manière on trouve

$$y = \frac{p_1 B_1 + p_2 B_2 + p_3 B_3 + p_4 B_4 + \dots}{R},$$

$$z = \frac{p_1 C_1 + p_2 C_2 + p_3 C_3 + p_4 C_4 + \dots}{R}, \text{ etc.}$$

Quand on substitue les valeurs de $x, y, z, v, \dots$ dans la première des équations données, on trouve

$$\frac{a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + \dots}{R} p_1 + \frac{a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 + \dots}{R} p_2 + \dots = p_1.$$

La valeur de la première de ces fractions est 1; toutes les autres valeurs sont zéro; ainsi la substitution que nous avons effectuée donne $p_1 = p_1$. Les valeurs trouvées pour $x, y, z, \dots$ vérifient la première des équations données. De la même manière on peut démontrer qu'elles vérifient la deuxième équation, etc. ...

Dans ce qui précède est démontré le théorème:

Quand la résultante de n équations linéaires à n inconnues est différente de zéro, il y a toujours un système de valeurs des inconnues qui vérifient les équations, et ce système est unique.

3. Supposons en second lieu que la résultante du système soit zéro, tandis que l'un des déterminants qui s'obtient, quand on remplace dans la résultante les coefficients de l'une des inconnues par les termes connus ne soit pas zéro.

Que le déterminant, qui n'est pas zéro, soit celui qui résulte de R, quand on remplace a_1 par p_1, a_2 par p_2, etc., ou

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 + \dots \gtrless 0.$$

Multiplions la première équation par A_1, la deuxième par A_2, la troisième par A_3.... et ajoutons tous ces produits; alors on a

$$Rx = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 + \ldots .$$

Or, d'après la supposition, le premier membre est zéro et le second diffère de zéro, d'où suit que le système est incompatible, quand les conditions mentionnées sont satisfaites.

4. Supposons en troisième lieu que la résultante du système soit zéro, en même temps que l'un des déterminants que l'on obtient, en remplaçant dans la résultante les coefficients de l'une des inconnues par les termes connus, tandis que les coefficients des termes connus dans ce déterminant ne soient pas tous zéro.

Multipliant et additionnant comme dans le numéro précédent on trouve une équation, dont les deux membres s'évanouissent d'après la supposition. De cela s'ensuit que l'une des équations peut être déduite des autres ou que le système est indéterminé.

Remarque. De la supposition résulte d'aprés 1. que zéro est un déterminant quelconque qui se forme, quand on remplace dans R les coefficients d'une des inconnues par les termes connus.

5. Soit donné un système de n équations à $n+r$ inconnues:

$$\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 v + \ldots + k_1 w &= p_1, \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 v + \ldots + k_2 w &= p_2, \\
a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 v + \ldots + k_3 w &= p_3, \\
\cdots & \cdots \\
a_n x + b_n y + c_n z + d_n v + \ldots + k_n w &= p_n.
\end{aligned}$$

Supposons que les déterminants formés de n colonnes quelconques de

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & k_n \end{matrix} \right\|$$

ne soient pas tous zéro. Choisissons r des inconnues de la sorte que le déterminant formé des coefficients des autres inconnues soit un déterminant, dont on sait qu'il n'est pas zéro. Regardons ces r variables comme connues, alors on a un système

de n équations à n inconnues, dont la résultante n'est pas zéro. On peut donc exprimer ces n inconnues en fonctions linéaires des r variables, et le système des n équations ne peut pas se réduire à un système de $n-1$ équations; aussi le système n'est pas incompatible.

6. Soit donné le système d'équations du numéro précédent et supposons que les déterminants formés de n colonnes quelconques de

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \dots & k_n \end{matrix} \right\|$$

soient zéro, et que le déterminant qui s'obtient, quand on remplace dans un de ces déterminants les coefficients d'une inconnue par les termes connues, ne soit pas zéro.

Quand on sait que

$$\left| \begin{matrix} p_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ p_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ p_n & b_n & c_n & \dots \end{matrix} \right| = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 + \dots \gtrless 0,$$

on multiplie la première des équations données par A_1, la deuxième par A_2, etc. Ajoutant tous ces produits on obtient

$$(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \dots) x + (b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + \dots) y + \dots = p_1 A_1 + p_2 A_2 + \dots.$$

Dans cette équation les coefficients de tous les variables sont zéro; quelques-uns d'après la supposition, les autres puisqu'ils forment des déterminants dont deux colonnes sont identiques. Le second membre de l'équation précédente diffère de zéro d'après la supposition, en sorte que cette équation prend la forme

$$0 = C,$$

ce qui indique que le système est incompatible.

7. Regardons encore le système d'équations des deux numéros précédents. Supposons que les déterminants formés de n colonnes quelconques de

$$\left\|\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & k_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & k_2 & p_2 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & k_n & p_n \end{array}\right\|$$

soient zéro, tandis que dans un de ces déterminants les coefficients des éléments d'une même colonne ne soient pas tous zéro. Multipliant et additionnant comme dans le numéro précédent, on trouve une équation qui se réduit à l'égalité

$$0 = 0;$$

ce qui indique que l'une des équations du système peut se déduire des autres, ou, en d'autres mots, que les n équations se réduisent à $n-1$.

8. Théorèmes réciproques des précédents.

Pour qu'un système de n équations linéaires à n inconnues ne soit pas incompatible et ne puisse pas se réduire à un plus petit nombre d'équations, il faut que la résultante du système soit différente de zéro.

Si la résultante était zéro, sans que tous ces déterminants mineurs du degré $n-1$ fussent zéro, le système serait incompatible d'après 3., ou il pourrait se réduire à un système de $n-1$ équations d'après 4. Si non seulement la résultante etait zéro mais aussi tous ses déterminants du degré $n-1$ tandis que les déterminants mineurs du degré $n-2$ n'étaient pas tous zéro, on aurait $n-1$ équations qui seraient incompatibles d'après 6., ou qui pourraient se réduire à $n-2$ équations d'après 7.; par conséquent le système serait incompatible, ou il pourrait se réduire à un plus petit nombre d'équations. De la même manière on démontre généralement qu'il est impossible que le dégré du premier déterminant mineur qui ne s'évanouit pas, soit $n-r$. Car alors il y aurait un système de $n-r+1$ équations qui seraient incompatibles, ou qui pourraient se réduire à un plus petit nombre d'équations. Cela est vrai pour toutes les valeurs de r de $r=2$ à $r=n-1$, c'est-à-dire dans tous les cas possibles. Dans le cas $r=n-1$ les déterminants mineurs du degré $n-r$ sont les coefficients des inconnues dans les équations données, et comme ces coefficients ne sont pas tous zéro, il est démontré généralement que la résultante ne peut être zéro.

9. Pour qu'un système de n équations linéaires à

$n+r$ inconnues ne soit pas incompatible et qu'il ne puisse se réduire à un plus petit nombre d'équations, il faut que les déterminants du degré n formés des coefficients des variables ne soient pas tous zéro.

Si tous ces déterminants étaient zéro sans que leurs déterminants mineurs du degré $n-1$ fussent tous zéro le système serait incompatible d'après 6., ou il pourrait se réduire à un système de $n-1$ équations d'après 7. Si tous les déterminants étaient zéro, tandis que le premier de leurs déterminants mineurs ne s'évanouissant pas fut du degré $n-p$, il y aurait $n-p+1$ équations qui seraient incompatibles ou qui pourraient se réduire à $n-p$ équations. Dans tous les cas il faut donc que les déterminants du degré n formés des coefficients des variables ne soient pas tous zéro.

10. **Pour qu'un système de n équations à $n+r$ variables soit incompatible, tandis que $n-1$ de ces équations prises arbitrairement ne sont pas incompatibles et ne peuvent pas se réduire à $n-2$ équations, il faut que tous les déterminants du degré n formés des coefficients des variables soient zéro, et que les déterminants du degré n formés des termes connus et des coefficients de $n-1$ variables ne soient pas tous zéro.**

Si tous les déterminants du degré n formés des coefficients des variables n'étaient pas zéro, le système ne serait pas incompatible d'après 5.; il faut donc que ces déterminants soient tous zéro. Si tous les déterminants formés des termes connus et des coefficients de $n-1$ variables étaient zéro, il s'ensuivrait d'après 7. que les n équations pourraient se réduire à $n-1$ équations, à l'aide de la propriété que les déterminants mineurs du degré $n-1$ formés des coefficients des variables ne sont pas tous zéro, propriété qui résulte de la supposition que $n-1$ des équations ne sont pas incompatibles et ne peuvent pas se réduire à $n-2$ équations. Le théorème proposé est donc démontré.

Remarque. Avec de légères modifications la démonstration précédente s'applique au cas $r=0$, en sorte qu'on a:

Pour qu'un système de n équations à n inconnues soit incompatible, tandis que $n-1$ de ces équations prises arbitrairement ne sont pas incompatibles et qu'ils ne peuvent pas se réduire à $n-2$ équations, il faut que tous les déterminants du degré n formés des coefficients des inconnues soient zéro, et que les

déterminants formés des termes connus et des coefficients de $n-1$ variables ne soient pas tous zéro.

11. **Pour qu'un système de n équations à $n+r$ variables puisse se réduire à $n-1$ équations, tandis que $n-1$ des n équations prises arbitrairement ne sont pas incompatibles et ne peuvent pas se réduire à $n-2$ équations, il faut que tous les déterminants du degré n formés des coefficients des variables et des termes connus soient zèro.**

Cas si tous ces déterminants n'étaient pas zéro, le système serait incompatible d'après 6., ou il ne pourrait par se réduire à $n-1$ équations d'après 5. De la même manière, quand r est zéro.

C'est sur les théorèmes précédents que sont basées les discussions suivantes.

12. **Deux équations linéaires à deux inconnues.**

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2.$$

Les cas suivants peuvent se présenter:

1. Le système est déterminé.
2. Le système est incompatible.
3. Le système est indéterminé.

Dans le premier cas on a d'après 8

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dans la deuxième cas on a d'après 10

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dans le troisième cas on a d'après 11

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Remarques. Dans les deux équations données a_1 et a_2 ne sont pas zéro en même temps, ni b_1 et b_2, car alors on aurait deux équations à une seule inconnue. a_1 et a_2, b_1 et b_2 sont les déterminants mineurs dont il est parlé dans les numéros 10 et 11.

Dans le deuxième cas on aurait pu poser les conditions

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

qui sont identiques avec les conditions posées.

13. Trois équations linéaires à trois inconnues.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = p_1,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = p_2,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = p_3.$$

Les cas suivants sont à distinguer:

1. Le système est déterminé.
2. Chacune des équations est incompatible avec les deux autres.
3. Les trois équations peuvent se réduire à deux équations.
4. Deux des trois équations sont incompatibles.
5. Deux des trois équations peuvent se réduire à une seule.
6. Chacune des équations est incompatible avec les autres prises séparément.
7. Deux des équations peuvent se réduire à une seule, et ils sont incompatibles avec la troisième équation.
8. Les trois équations peuvent se réduire à une seule équation.

Le premier cas se distingue de tous les autres par

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dans tous les autres cas on a $R = 0$.

Dans le deuxième cas on a

$$R = 0, \quad A_1, \quad A_2 \quad \text{et} \quad A_3$$

ne sont pas tous zéro et

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 \gtrless 0,$$

ou, quand A_1, A_2, A_3 sont zéro tous les trois, $R=0$, B_1, B_2 et B_3 ne sont pas tous zéro, et

$$p_1B_1+p_2B_2+p_3B_3 \gtrless 0.$$

Remarque. Si B_1, B_2, B_3 étaient zéro, en même temps que A_1, A_2, A_3. il s'ensuivrait que C_1, C_2, C_3 seraient zéro aussi, et l'on aurait alors un des cas 6, 7, 8.

Dans le troisième cas on a $R=0$, A_1, A_2, A_3 ne sont pas tous zéro, et

$$p_1A_1+p_2A_2+p_3A_3=0,$$

ou, quand A_1, A_2, A_3 sont zéro à la fois, il faut que B_1, B_2, B_3 ne soient pas tous zéro, et que

$$p_1B_1+p_2B_2+p_3B_3=0, \quad \text{avec} \quad R=0.$$

Dans le quatrième cas on a, quand ce sont la première équation et la deuxième qui sont incompatibles,

$$\left\Vert \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\Vert = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

quand a_1 et a_2 ne sont pas zéro tous les deux. Si bien, au lieu de l'inégalité précédente on devrait avoir

$$\begin{vmatrix} b_1 & p_1 \\ b_2 & p_2 \end{vmatrix} \gtrless 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} c_1 & p_1 \\ c_2 & p_2 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dans le cinquième cas on a, quand ce sont la première et la deuxième équation qui peuvent se réduire à une seule,

$$\left\Vert \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & p_2 \end{matrix} \right\Vert = 0.$$

Dans le sixième cas tous les déterminants mineurs du second degré de

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

doivent être zéro et

$$\begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{vmatrix} \gtrless 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_3 & p_3 \end{vmatrix} \gtrless 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 & p_2 \\ a_3 & p_3 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Pour que les déterminants mineurs du degré 2 de R soient

tous zéro, il suffit d'après 1 que 4 de ces déterminants mineurs, qui ont un élément de commun, soient zéro.

Remarque. Si dans les inégalités précédentes deux a^s pouvaient être zéro, on devrait les remplacer dans ce cas par deux b^s ou par deux c^s. Mais nous allons démontrer plus tard que dans trois équations, incompatibles deux à deux, un coefficient d'une des inconnues ne saurait être zéro.

Dans le septième cas, quand ce sont la première et la deuxième des équations qui peuvent se réduire à une seule, tous les déterminants mineurs du second degré de

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

doivent être zéro, et

$$\begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_3 & p_3 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dans le huitième cas tous les déterminants mineurs du second degré de

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & p_3 \end{Vmatrix}$$

doivent être zéro. Il suffit pour cela d'après 1 que 6 de ces déterminants mineurs qui ont un élément de commun soient zéro.

14. A l'égard de la discussion précédente, il est intéressant de remarquer la propriété suivante:

Dans les cas 6, 7, 8 un coefficient d'une des inconnues ne saurait être zéro.

Si a_1, par exemple, etait zéro dans un de ces cas, puisque b_1 et c_1 ne sont pas zéro en même temps que a_1, de

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou $a_2 b_1 = a_2 c_1 = 0$, suivrait $a_2 = 0$. De la même manière, de

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

suivrait $a_3 = 0$. Mais si l'on avait $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, on n'aurait

pas trois équations à trois inconnues; il est donc impossible que a_1 soit zéro.

De ce qui précède on voit en même temps que, si deux équations d'un système sont incompatibles ou qu'elles peuvent se réduire à une seule, le coefficient d'une inconnue dans l'une de ces équations ne saurait être zéro, sans que le coefficient de cette inconnue dans l'autre équation soit zéro en même temps.

Ainsi le système

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= p, \\ dx + ey &= q, \\ fx + gz &= r, \end{aligned}$$

où a, b, c, d, e, f, g sont tous différents de zéro, rentre dans un des cas 1, 2 ou 3.

15. Quand les trois équations se réduisent à deux, 3me cas, il peut arriver que l'une des inconnues soit déterminée. Si nous avons $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, comme dans le système

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 4, \\ x + 2y + 4z &= 7, \\ 3x + 4y + 8z &= 15, \end{aligned}$$

on peut écrire les équations

$$\begin{aligned} x + (y + 2z) &= 4, \\ x + 2(y + 2z) &= 7, \\ 3x + 4(y + 2z) &= 15; \end{aligned}$$

et, régardant x et $y + 2z$ comme les inconnues qu'on veut déterminer, on trouve $x = 1$, $y + 2z = 3$, d'où l'on voit que x est déterminé.

16. **Quatre équations linéaires à quatre inconnues.**

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1v &= p_1, \\ a_2x + b_3y + c_2z + d_2v &= p_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3v &= p_3, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4v &= p_4. \end{aligned}$$

Les cas suivants sont à distinguer.

1. Le système est déterminé.
2. Les quatre équations sont incompatibles.
3. Les quatre équations peuvent se réduire à trois équations.
4. Des quatre équations trois sont incompatibles.
5. Trois des quatre équations peuvent se réduire à deux.
6. Deux équations sont incompatibles.
7. Deux équations peuvent se réduire à une seule.
8. Deux équations sont incompatibles avec chacune des autres.
9. Trois équations peuvent se réduire à deux qui sont incompatibles avec la quatrième.
10. Trois équations sont incompatibles, et la quatrième est incompatible avec l'une des trois.
11. Chaque troisaine d'équations peut se réduire à deux.
12. Trois équations peuvent se réduire à deux, et la quatrième est incompatibles avec l'une des trois.
13. Trois équations sont incompatibles, et la quatrième est identique avec l'une des trois.
14. Trois équations prises deux à deux sont incompatibles.
15. Les quatre équations forment deux paires d'équations incompatibles.
16. Trois équations peuvent se réduire à deux, et la quatrième est identique avec l'une des trois.
17. Deux équations peuvent se réduire à une seule qui est incompatible avec l'une des autres.
18. Deux équations peuvent se réduire à une seule, et les autres sont incompatibles.
19. Les quatre équations forment deux paires d'équations identiques.
20. Trois équations se réduisent à une seule.
21. Les quatre équations prises deux à deux sont incompatibles.
22. Deux équations se réduisent à une seule qui est incompatible avec chacune des autres.

23. Les quatre équations forment deux paires d'équations identiques, et chaque équation de la première paire est incompatible avec chaque équation de l'autre paire.

24. Trois équations se réduisent à une seule qui est incompatible avec la quatrième.

25. Les quatre équations se réduisent à une seule.

Le premier cas se distingue de tous les autres par

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dans tous les autres cas on a $R = 0$.

Dans le deuxième cas on a $R = 0$ et

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 + p_4 A_4 \gtrless 0,$$

quand A_1, A_2, A_3, A_4 ne sont pas tous zéro. Si bien on doit les remplacer par B_1, B_2, B_3, B_4.

Dans le troisième cas on a, quand A_1, A_2, A_3, A_4 ne sont pas tous zéro,

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 + p_4 A_4 = 0.$$

Dans le quatrième cas on a, quand ce sont les trois premières équations qui sont incompatibles,

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \right\| = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

si l'on n'a pas $\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| = 0$. Si bien on doit remplacer dans l'inégalité les b^s par des c^s ou par des d^s.

Dans le cinquième cas on a, quand ce sont les trois premières équations qui peuvent se réduire à deux,

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & p_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Dans le sixième cas on a, quand ce sont la première et la deuxième équation qui peuvent se réduire à une seule,

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

si a_1 et a_2 ne sont pas zéro. Si bien, on doit les remplacer dans l'inégalité par deux coefficients correspondants qui ne sont pas zéro.

Dans le septième cas on a

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & p_2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Dans le huitième cas tous les determinants mineurs du troisième degré de R sont zéro. Il suffit pour cela, quand $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \gtrless 0$, que les quatre déterminants mineurs du troisième degré, où se trouve le déterminant précédent, soit zéro.

Dans le neuvième cas, quand ce sont les trois premières équations qui peuvent se réduire à deux, tous les déterminants mineurs du troisième degré de R doivent être zéro, en même temps que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_4 & b_4 & p_4 \end{vmatrix} \gtrless 0, \text{ où l'on}$$

$$\text{suppose } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dans le dixième cas, quand les trois premières équations sont incompatibles, et que la première équation est incompatible avec la quatrième, on a

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix} \gtrless 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_4 & p_4 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dans le onzième cas tous les déterminants mineurs du troisième degré de

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & p_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & p_4 \end{matrix} \right\| \text{ sont zéro.}$$

Dans le douzième cas on a, quand les trois premières uations peuvent se réduire à deux, et que la première equation : incompatible avec la quatrième,

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & p_3 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left| \begin{matrix} a_1 & p_1 \\ a_4 & p_4 \end{matrix} \right| \gtrless 0.$$

Dans le treizième cas on a

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & p_4 \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\left| \begin{matrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_4 & b_4 & p_4 \end{matrix} \right| \gtrless 0.$$

Dans le quatorzième cas tous les déterminants mineurs ı second degré de

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \right\| \text{ sont zéro et } \left| \begin{matrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{matrix} \right| \gtrless 0,$$

$$\left| \begin{matrix} a_1 & p_1 \\ a_3 & p_3 \end{matrix} \right| \gtrless 0.$$

Dans le quinzième cas on a

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\left| \begin{matrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{matrix} \right| \gtrless 0, \quad \left| \begin{matrix} a_3 & p_3 \\ a_4 & p_4 \end{matrix} \right| \gtrless 0.$$

Dans le seizième cas on a

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & p_3 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & p_4 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Dans le d i x - s e p t i è m e c a s , quand la première et la deuxième équation se réduisent à une seule qui est incompatible avec la troisième, on a

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & p_2 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left| \begin{matrix} a_1 & p_1 \\ a_3 & p_3 \end{matrix} \right| \gtrless 0.$$

Dans le d i x - h u i t i è m e c a s on a, quand la première équation et la deuxième se réduisent à une seule, et que la troisième équation est incompatible avec la quatrième,

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & p_2 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left| \begin{matrix} a_3 & p_3 \\ a_4 & p_4 \end{matrix} \right| \gtrless 0.$$

Dans le d i x - n e u v i è m e c a s on a

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & p_2 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & p_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & p_4 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Dans le v i n g t i è m e c a s tous les déterminants mineurs d second degré de

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & p_3 \end{matrix} \right\| \text{ sont zéro.}$$

Il suffit pour cela que huit de ces déterminants mineurs, qui o un élement de commun, soient zéro.

Dans le v i n g t - e t - u n i è m e c a s tous les déterminants mineu du second degré de R sont zéro, tandis qu'on a

$$\left| \begin{matrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{matrix} \right| \gtrless 0, \quad \left| \begin{matrix} a_1 & p_1 \\ a_3 & p_3 \end{matrix} \right| \gtrless 0, \quad \left| \begin{matrix} a_1 & p_1 \\ a_4 & p_4 \end{matrix} \right| \gtrless 0,$$

$$\left| \begin{matrix} a_2 & p_2 \\ a_3 & p_3 \end{matrix} \right| \gtrless 0, \quad \left| \begin{matrix} a_2 & p_2 \\ a_4 & p_4 \end{matrix} \right| \gtrless 0, \quad \left| \begin{matrix} a_3 & p_3 \\ a_4 & p_4 \end{matrix} \right| \gtrless 0.$$

Dans le v i n g t - d e u x i è m e c a s , quand ce sont la premiè et la deuxième équation qui se réduisent à une seule, tous l déterminants mineurs du second degré de R sont zéro, et outre on a

$$\left| \begin{matrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{matrix} \right| = 0, \quad \left| \begin{matrix} a_1 & p_1 \\ a_3 & p_3 \end{matrix} \right| \gtrless 0, \quad \left| \begin{matrix} a_1 & p_1 \\ a_4 & p_4 \end{matrix} \right| \gtrless 0,$$

$$\left| \begin{matrix} a_2 & p_2 \\ a_3 & p_3 \end{matrix} \right| \gtrless 0, \quad \left| \begin{matrix} a_2 & p_2 \\ a_4 & p_4 \end{matrix} \right| \gtrless 0, \quad \left| \begin{matrix} a_3 & p_3 \\ a_4 & p_4 \end{matrix} \right| \gtrless 0.$$

Dans le vingt-troisième cas tous les déterminants mineurs du second degré de R sont zéro, et en outre on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & p_3 \\ a_4 & p_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_3 & p_3 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dans le vingt-quatrième cas tous les déterminants mineurs du second degré de R sont zéro, et

$$\begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_4 & p_4 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dans le vingt-cinquième cas tous les déterminants mineurs du second degré de

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & p_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & p_4 \end{Vmatrix}$$

sont zéro. Il suffit pour cela, d'après 1, que douze de ces déterminants mineurs qui ont un élément de commun soient zéro.

Remarque. A l'égard de tous les déterminants qui se trouvent dans la discussion précédente, on suppose que les déterminants mineurs qui sont les coefficients des éléments d'une même rangée ne sont pas tous zéro, tant que le contraire n'est pas enoncé.

17. De la même manière que dans le numéro 14, on démontre que dans les cas de 21 à 25 un coefficient d'une inconnue ne saurait être zéro. Et en général, dans un système d'équations linéaires qui, prises deux à deux, sont incompatibles ou peuvent se réduire à une seule équation, il est impossible que le coefficient d'une inconnue soit zéro.

Aussi dans un système de 4 ou d'un nombre quelconque d'équations le coefficient d'une inconnue dans l'une de deux équations identiques ou incompatibles ne peut être zéro, sans que le coefficient de cette inconnue dans l'autre équation soit zéro.

18. Quand les quatre équations peuvent se réduire à trois, il peut arriver que deux des inconnues soient déterminées. Par exemple, le système

$$\begin{aligned} x + y + 2z + v &= 5 \\ 2x + 3y + 2z + v &= 8 \\ 3x - y + 4z + 2v &= 8 \\ 6x - y - 2z - v &= 2 \end{aligned}$$

peut s'écrire

$$\begin{aligned} x+\ y+\ (2z+v)&=5\\ 2x+3y+\ (2z+v)&=8\\ 3x-\ y+2(2z+v)&=8\\ 6x-\ y-\ (2z+v)&=2, \end{aligned}$$

et, regardant comme inconnues x, y et $2z+v$, on trouve

$$x=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1\\ 8 & 3 & 1\\ 8 & -1 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$y=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1\\ 2 & 8 & 1\\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$2z+v=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 8\\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Quand les quatre équations sont telles que chaque trois d'équations peut se réduire à deux, il peut arriver que l des inconnues soit déterminée par le système. Par exemple système

$$\begin{aligned} x+\ y+2z+3v&=\ 7\\ 3x+2y+4z+6v&=\ 15\\ x-\ y-2z-3v&=-5\\ 5x+3y+6z+9v&=\ 23 \end{aligned}$$

on tire

$$x=1,\quad y+2z+3v=6.$$

De ce qui précède et de ce qui est dit dans le nu 15 suit que de l'indétermination d'un système d'é tions à 3 ou plus d'inconnues on ne saurait concl à l'indétermination de chacune des inconnues.

Cela est différent de ce qui arrive dans le cas de équations linéaires à deux inconnues. Alors l'une des incon ne saurait être indéterminée sans que l'autre le soit en même te

19. Nombre des équations qui doivent être vérifiées dans chacun des cas, dont il est parlé dans les numéros 12, 13 et 16.

Deux équations à deux inconnues.

0 dans le 1ier cas; 1 dans le 2ième cas; 2 dans le 3ième cas.

Trois équations à trois inconnues.

0 dans le 1ier cas;
1 dans le 2ième cas;
2 dans les cas 3 et 4;
3 dans le 5ième cas;
4 dans le 6ième cas;
5 dans le 7ième cas;
6 dans le 8ième cas.

Quatre équations à quatre inconnues.

0 dans le 1ier cas;
1 dans le 2ième cas;
2 dans les cas 3 et 4;
3 dans les cas 5 et 6;
4 dans les cas 7 et 8;
5 dans les cas 9 et 10;
6 dans les cas 11 à 15;
7 dans les cas 16 à 18;
8 dans les cas 19 et 20;
9 dans le 21ième cas;
10 dans le 22ième cas;
11 dans les cas 23 et 24;
12 dans le 25ième cas.

XVII.

Discussion de l'équation du second degré en coordonnées planaires.

Par

Monsieur *J. Versluys*,

Professeur de Mathématiques à Groningue. (Pays-Bas).

---

§. 1.

Soit l'équation générale du second degré en coordonnées planaires $F(\lambda, \mu, \nu, \varrho) = 0$, ou

$$a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 + d\varrho^2 + 2l\mu\nu + 2m\nu\lambda + 2n\lambda\mu + 2p\lambda\varrho + 2q\mu\varrho + 2r\nu\varrho = 0.$$

Désignons par

$$A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu + D_1\varrho = 0,$$

et

$$A_2\lambda + B_2\mu + C_2\nu + D_2\varrho = 0$$

deux points quelconques.

De la propriété que j'ai démontrée dans le tome L page 157 suit immédiatement que les deux plans qui passent par les points donnés, et qui touchent à la surface coïncident, quand

$$R = \begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A_2 \\ n & b & l & q & B_1 & B_2 \\ m & l & c & r & C_1 & C_2 \\ p & q & r & d & D_1 & D_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & \end{vmatrix}$$

est zéro; que ces plans tangents sont réels et distincts, quand R est négatif; et que ces plans tangents sont imaginaires quand R est positif.

§. 2.

Dans ce qui suit nous ferons quelquesfois usage du théorème suivant: Quand l'équation

$$a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 + d\varrho^2 + 2l\mu\nu + 2m\nu\lambda + 2n\lambda\mu + 2p\lambda\varrho + 2q\mu\varrho + 2r\nu\varrho = 0$$

peut se mettre sous la forme d'une somme de 3 carrés positifs ou négatifs

$$(a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + d_1\varrho)^2 \pm (a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\varrho)^2 \pm (a_3\lambda + b_3\mu + c_3\nu + d_3\varrho)^2 = 0$$

le discriminant H est zéro.

Pour démontrer cela, remarquons que le discriminant H est un invariant qui déduit de la seconde équation se présente sous la forme

$$\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+a_3^2 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & b_1^2+b_2^2+b_3^2 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3 \\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & c_1^2+c_2^2+c_3^2 & c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3 \\ a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 & b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3 & c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3 & d_1^2+d_2^2+d_3^2 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est égal à une somme de déterminants de la forme

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2b_2 & a_3c_3 & . \\ a_1b_1 & b_2^2 & b_3c_3 & . \\ a_1c_1 & b_2c_2 & c_3^2 & . \\ a_1d_1 & b_2d_2 & c_3d_3 & . \end{vmatrix}$$

Mais dans tous ces déterminants deux colonnes sont identiques, à un coefficient près; donc H est zéro.

De la même manière on démontre

1°. Quand l'équation homogène du second degré peut se mettre sous la forme d'une somme de deux carrés positifs ou négatifs, tous les déterminants mineurs du 3me degré de H sont zéro.

2°. Quand l'équation homogène du second degré peut se mettre sous la forme d'un carré, tous les déterminants mineurs du 2^{d} degré de H sont zéro.

§. 3.

Désignons par H l'hessien de l'équation générale en coordonnées planaires

$$H = \begin{vmatrix} a & n & m & p \\ n & b & l & q \\ m & l & c & r \\ p & q & r & d \end{vmatrix}$$

Si $H = 0$, l'équation représente une courbe plane; voyez Théorie des déterminants, par M. Brioschi, traduit par M. Combescure, page 141.

Quand $A_1 \lambda + B_1 \mu + C_1 \nu + D_1 \varrho = 0$ est un point de la surface du second degré, on a

$$Q = \begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ p & q & r & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \end{vmatrix} = 0.$$

Ce théorème se démontre d'une maniere tout-à-fait analogue au théorème correspondant en coordonnées quadriplanaires.

Quand la surface n'est pas réglée, il n'y a qu'un seul plan qui passe par le point et qui touche à la surface. Quand la surface est gauche, tout plan qui passe par l'une des deux droites de la surface qui s'entrecoupent dans le point donné est un plan tangent.

Dans le premier cas sont imaginaires les deux plans tangents qui passent par le point de la surface et un point situé hors du plan qui est tangent à la surface dans le point donné.

Dans le second cas ces deux plans tangents sont réels et distincts.

Actuellement, supposons que

$$A_1 \lambda + B_1 \mu + C_1 \nu + D_1 \varrho = 0,$$

soit un point de la surface du second degré, et que

$$A_2 \lambda + B_2 \mu + C_2 \nu + D_2 \varrho = 0$$

soit un point situé hors du plan qui est tangent à la surface dans le premier point. Alors pour une surface qui n'est pas réglée

$$R = \begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A_2 \\ n & b & l & q & B_1 & B_2 \\ m & l & c & r & C_1 & C_2 \\ p & q & r & d & D_1 & D_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & \end{vmatrix}$$

doit être positif, et pour une surface gauche R doit être négatif. Or

$$Q = \begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ p & q & r & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \end{vmatrix}$$

étant zéro, R a le signe contraire de H, et nous avons donc la propriété suivante:

Pour les surfaces gauches du second degré H est positif, et pour les surfaces qui ne sont pas réglées H est négatif.

§. 4.

Si $A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu + D_1\varrho = 0$ n'est pas un point de la surface, les plans qui passent par ce point et qui sont tangents à la surface enveloppent un cône. Ce cône est réprésenté par l'équation précédente et l'équation de la surface. Cherchons les caractères qui nous apprennent, si ce cône est réel ou imaginaire.

Eliminant ϱ entre les deux équations du cône, on obtient une équation entre les λ, μ, ν du cône. L'équation résultante est du second degré; et quand il y a des valeurs réelles de λ, μ, ν qui vérifient cette équation, l'équation du point nous donne une valeur correspondante de ϱ qui est réelle; alors il y a des plans tangents réels, et en même temps le cône est réel. Quand il est impossible de trouver des valeurs réelles qui vérifient cette équation du second degré, le cône doit être imaginaire.

L'équation résultante de l'élimination est de la forme

$$a_1 \lambda^2 + b_1 \mu^2 + c_1 \nu^2 + 2f_1 \mu\nu + 2g_1 \lambda\nu + 2h_1 \lambda\mu = 0,$$

et peut se mettre, par des substitutions linéaires, sous la forme

$$a_2 x^2 + b_2 y^2 + c_2 z^2 = 0,$$

où x, y, z sont des fonctions linéaires de λ, μ, ν. Quand a_2, b_2, c_2 ont même signe, il résulte de ce qui précède que le cône est imaginaire. Quand a_2, b_2, c_2 n'ont pas même signe, le lieu est réel.

D'après une propriété des substitutions linéaires, a_2, b_2, c_2 ont même signe, quand la série

$$1 \qquad a_1 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ h_1 & b_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & g_1 \\ h_1 & b_1 & f_1 \\ g_1 & f_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

offre trois variations de signe ou n'en offre aucune. a_2, b_2, c_2 n'ont pas même signe, quand la série précédente offre une ou deux variations de signe.

Pour obtenir la série précédente, on pourrait effectuer l'élimination; mais les raisonnements du page 164, tome L, nous ont appris que les termes de cette série peuvent se former immédiatement des coefficients des équations données. On trouve de la sorte:

Le cône est imaginaire, quand la série

$$1 \quad -\begin{vmatrix} a & p & A_1 \\ p & d & D_1 \\ A_1 & D_1 & \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a & n & p & A_1 \\ n & b & q & B_1 \\ p & q & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & D_1 & \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ p & q & r & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \end{vmatrix}$$

offre trois variations de signe ou n'en offre aucune; le cône est réel, quand il y a une ou deux variations de signe dans cette série.

§. 5.

Si au lieu du point $\qquad A_1 \lambda + B_1 \mu + C_1 \nu + D_1 \varrho = 0$
on prend $\qquad \varrho = 0,$

on doit substituer dans la série du § précédent

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0,\ D = 1,$$

de sorte que cette série devient

$$1 \quad a \quad \begin{vmatrix} a & n \\ n & b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} \qquad \text{(a)}$$

§. 6.

L'équation du pôle du plan à distance infinie ou l'équation du centre de la surface est

$$\begin{aligned}&(aA+nB+mC+pD)\lambda+(nA+bB+lC+qD)\mu\\ &+(mA+lB+cC+rD)\nu+(pA+qB+rC+dD)\varrho=0.\end{aligned}$$

Le cône qui a son sommet dans ce point, et qui enveloppe la surface est le cône asymptotique.

On a donc à l'aide du § 4:

Quand la série

$$\text{(c)}\ 1 \ -\begin{vmatrix} a & p & A_1 \\ p & d & D_1 \\ A_1 & D_1 & \end{vmatrix} \ -\begin{vmatrix} a & n & p & A_1 \\ n & b & q & B_1 \\ p & q & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & D_1 & \end{vmatrix} \ -\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ p & q & r & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \end{vmatrix}$$

où l'on a $A_1 = aA+nB+mC+pD$, $B_1 = nA+bB+lC+qD$, $C_1 = mA+lB+cC+rD$, $D_1 = pA+qB+rC+dD$, offre 3 variations de signe ou n'en offre aucune, le cône asymptotique est imaginaire; quand cette série offre 1 ou 2 variations de signe, le cône asymptotique est réel.

Remarque. Le dernier terme de la série précédente peut être transformé de la manière suivante: Aux termes de la dernière colonne ajoutant ceux de la première multipliés par $-A$, ceux de la deuxième colonne multipliés par $-B$, ceux de la troisième colonne multipliés par $-C$, ceux de la quatrième colonne multipliés par $-D$, on trouve



$$-\begin{vmatrix} a & n & m & p & 0 \\ n & b & l & q & 0 \\ m & l & c & r & 0 \\ p & q & r & d & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & -F(ABCD) \end{vmatrix} = +H \times F(ABCD)$$

§. 7.

L'équation générale du second degré en coordonnées planai peut représenter

1. Un hyperboloïde à une nappe.
2. Un hyperboloïde à deux nappes.
3. Un ellipsoïde.
4. Un paraboloïde hyperbolique.
5. Un paraboloïde elliptique.
6. Une courbe plane.
7. Un plan à distance finie.
8. Un plan à distance infinie.
9. Une surface imaginaire.
10. Une droite à distance finie.
11. Une droite à distance infinie.
12. Deux points distincts à distance finie.
13. Deux points distincts dont un au moins se trouve distance infinie.
14. Deux points coïncidents à distance finie.
15. Deux points coïncidents à distance infinie.

Les caractères de ces cas sont les suivants.

1. L'hyperboloïde à une nappe est une surface gauche ce qui exige

$$H > 0.$$

Et comme la surface n'est pas tangente au plan à distan infinie, on doit avoir

$$F(A, B, C, D) \gtrless 0.$$

2 et 3. L'hyperboloïde à deux nappes, de même que l'ellipsoïde, n'est pas une surface réglée, de sorte qu'on doit avoir dans les deux cas

$$H < 0.$$

Les deux surfaces n'étant pas tangentes au plan à distance infinie, on a encore

$$F(A, B, C, D) \gtrless 0.$$

Pour discerner l'ellipsoïde d'avec l'hyperboloïde à deux nappes, remarquons que pour la première surface le cône asymptotique est imaginaire, et que le cône asymptotique est réel pour l'autre surface. On a donc pour un ellipsoïde dans la série (c) trois variations de signe ou aucune; pour l'hyperboloïde à deux nappes on a 1 ou 2 variations de signe dans la série (c).

4. Le paraboloïde hyperbolique est une surface gauche tangente au plan à distance infinie, ce qui exige

$$H > 0, \qquad F(A, B, C, D) = 0.$$

5. Le paraboloïde elliptique n'est pas une surface réglée, et il est tangent au plan à distance infinie, ce qui exige

$$H < 0, \qquad F(A, B, C, D) = 0.$$

6, 7 et 8. Pour une courbe plane on a comme pour un plan

$$H = 0.$$

Pour discerner la courbe plane d'avec le plan, remarquons que, dans le cas d'une courbe plane, le cône est réel qui a son sommet dans un point arbitraire et qui enveloppe la surface. Dans le cas d'un plan ce cône est imaginaire. On a donc, d'après le § 5, 1 ou 2 variations de signe dans la série (a) dans le cas d'une courbe plane. On a, d'après ce §, 0 ou 3 variations de signe dans la serie (a), dans le cas d'un cône.

En outre, pour un plan à distance finie on a

$$F(A, B, C, D) \gtrless 0;$$

pour un plan à distance infinie on a

$$F(A, B, C, D) = 0.$$

Exemple. L'équation

$$(a\lambda + b\mu + c\nu + d\varrho)^2 + (a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + d_1\varrho)^2 + (a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\varrho)^2 = 0$$

ne peut être satisfaite qu'en prenant à la fois

$$a\lambda + b\mu + c\nu + d\varrho = 0,$$
$$a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + d_1\varrho = 0,$$
$$a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\varrho = 0.$$

L'équation donnée représente donc un plan passant par les trois points précédents.

Si ces trois points ne sont pas tous situés à distance infinie, les trois carrés ne sont pas zéro, quand on remplace λ, μ, ν, ϱ par A, B, C, D. On a donc pour un plan passant par ces points ou un plan à distance finie

$$F(A, B, C, D) \gtrless 0.$$

Si les trois points sont tous situés à distance infinie, le plan qui passe par les points est le plan à distance infinie. Dans ce cas les trois carrés sont zéro, quand on remplace λ, μ, ν, ϱ par A, B, C, D, de sorte qu'on a

$$F(A, B, C, D) = 0.$$

9. Un lieu imaginaire. L'équation de la surface du second degré peut, par une substitution linéaire et réelle, être réduite à la forme

$$a_1\lambda^2 + b_1\mu^2 + c_1\nu^2 + d_1\varrho^2 = 0,$$

quand aucun des déterminants suivants ne s'annule

$$1 \qquad a \qquad \begin{vmatrix} a & n \\ n & b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} \qquad H. \qquad \text{(b)}.$$

Le nombre des carrés négatifs dans l'équation réduite égale le nombre des variations de signe qu'offrent les cinq quantités précédentes. Si ces quantités n'offrent que des variations de signe, tous les carrés sont négatifs, et le lieu est imaginaire. Si les mêmes quantités sont toutes positives, il y a quatre carrés positifs, et le lieu est encore imaginaire. Dans ces deux cas H est positif.

Pour un hyperboloïde à une nappe on a $H > 0$, comme pour un lieu imaginaire; mais dans le premier cas le nombre des variations de signe dans le série (b) doit être 2, tandis que ce nombre est 0 ou 4 pour une surface imaginaire.

10, 11, 12 et 13. Il faut dans le cas de deux points que l'équation puisse se mettre sous la forme

$$(a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + d_1\varrho)^2 \pm (a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\varrho)^2 = 0.$$

D'apres le § 2 tous les déterminants mineurs du troisième degré de H sont zéro.

Quand les deux points sont réels, les deux carrés ont des signes différents. Quand les deux points sont imaginaires, ou quand la surface est une droite, les deux carrés ont même signe.

Pour une droite à distance finie les points

$$a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + d_1\varrho = 0,$$
$$a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\varrho = 0$$

ne sont pas situés tous les deux dans le plan A, B, C, D; de sorte qu'on a

$$(a_1A + b_1B + c_1C + d_1D)^2 + (a_2A + b_2B + c_2C + d_2D)^2 > 0,$$

ou
$$F(A, B, C, D) > 0.$$

Dans le cas d'une droite à distance infinie ces deux points sont situés dans le plan à distance infinie, de sorte qu'on a

$$a_1A + b_1B + c_1C + d_1D = 0,$$
$$a_2A + b_2B + c_2C + d_2D = 0,$$

d'où suit

$$(a_1A + b_1B + c_1C + d_1D)^2 + (a_2A + b_2B + c_2C + d_2D)^2 = 0,$$

ou
$$F(A, B, C, D) = 0.$$

Si les deux points sont réels, l'équation peut se mettre sous la forme

$$(a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + d_1\beta)\ (a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\varrho) = 0.$$

Quand les deux points sont situés à distance finie, les deux facteurs du produit précédent sont différents de zéro, quand on remplace $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ respectivement par A, B, C, D; de sorte qu'on a pour deux points réels à distance finie

$$(a_1 A + b_1 B + c_1 C + d_1 D)\,(a_2 A + b_2 B + c_2 C + d_2 D) \gtrless 0,$$

ou

$$F(A,\ B,\ C,\ D) \gtrless 0.$$

Si l'un des deux points ou tous les deux sont situés à distance infinie, l'un des deux facteurs ou tous les deux sont zéro; de sorte qu'on a dans ce cas

$$F(A,\ B,\ C,\ D) = 0.$$

Pour discerner deux points réels d'avec deux points imaginaires, remarquons que les deux équations

$$(a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + d_1\varrho)^2 - (a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\varrho)^2 = 0$$

et

$$(a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + d_1\varrho)^2 + (a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\varrho)^2 = 0$$

deviennent, quand on suppose $\varrho = 0$,

$$(a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu)^2 - (a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu)^2 = 0$$

et

$$(a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu)^2 + (a_2\lambda + b_2\mu + c^2\nu)^2 = 0.$$

De même, quand on suppose $\mu = 0,\ \nu = 0,\ \lambda = 0$. Ces deux cas se distinguent d'après Tome LI page 53 par les caractères algébriques suivants:

Dans le cas de deux carrés de signes différents ou de deux points réels, un des déterminants mineurs symétriques du second degré de H est négatif.

Dans le cas de deux carrés de même signe ou de deux points imaginaires, un des déterminants mineurs symétriques du second degré de H est positif.

Remarque. Puisque tous les déterminants mineurs du 3me degré de H sont zéro, tous les déterminants mineurs symétriques du 2^d^ degré de H ont même signe.

14 et 15. Dans ces deux cas l'équation générale peut se réduire à la forme

$$\pm (a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + d_1\varrho)^2 = 0,$$

d'ou suit, d'après le § 2, que tous les déterminants mineurs du second degré de H sont zéro.

Si les points sont situés à distance finie, on a

$$a_1 A + b_1 B + c_1 C + d_1 D \gtrless 0,$$

et par conséquent

$$\pm (a_1 A + b_1 B + c_1 C + d_1 D)^2 \gtrless 0,$$

ou

$$F(A, B, C, D) \gtrless 0.$$

Si les deux points sont situés à distance infinie, on a

$$a_1 A + b_1 B + c_1 C + d_1 D = 0,$$

$$(a_1 A + b_1 B + c_1 C + d_1 D)^2 = 0,$$

ou

$$F(A, B, C, D) = 0.$$

§. 8.

En résumant ce qui précède, l'on a à l'aide de H, de $F(A, B, C, D)$ et des séries

$$1 \quad a \quad \begin{vmatrix} a & n \\ n & b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} \qquad \text{(a)}$$

$$1 \quad a \quad \begin{vmatrix} a & n \\ n & b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} \quad H \qquad \text{(b)}$$

$$1 \quad -\begin{vmatrix} a & p & A_1 \\ p & d & D_1 \\ A_1 & D_1 & \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a & n & p & A_1 \\ n & b & q & B_1 \\ p & q & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & D_1 & \end{vmatrix} \quad H \times F(A, B, C, D) \qquad \text{(c)}$$

les caractères suivants.

Hyperboloïde à une nappe.

$H > 0$; $F(A, B, C, D) \gtrless 0$; 2 variations de signe dans la série (b).

Hyperboloïde à deux nappes.

$H < 0$; $F(A, B, C, D) \gtrless 0$; 1 ou 2 variations de signe dans la série (c).

Ellipsoïde.

$H < 0$; $F(A, B, C, D) \gtrless 0$; 0 ou 3 variations de signe dans la série (c).

Paraboloïde hyperbolique.

$H > 0$; $F(A, B, C, D) = 0$.

Paraboloïde elliptique.

$H < 0$; $F(A, B, C, D) = 0$.

Courbe plane.

$H = 0$; 1 ou 2 variations de signe dans la série (a).

Plan à distance finie.

$H = 0$; $F(A, B, C, D) \gtrless 0$; 0 ou 3 variations de signe dans la série (a).

Plan à distance infinie.

$H = 0$; $F(A, B, C, D) = 0$; 0 ou 3 variations de signe dans la série (a).

Surface imaginaire.

$H > 0$; $F(A, B, C, D) \gtrless 0$; 0 ou 4 variations de signe dans la série (b).

Droite à distance finie.

$H = 0$; $F(A, B, C, D) \gtrless 0$; tous les déterminants mineurs du troisième degré de H sont zéro; un déterminant mineur symétrique du second degré de H est positif.

Droite à distance infinie.

$H = 0$; $F(A, B, C, D) = 0$; tous les déterminants mineurs du 3me degré de H sont zéro; un déterminant mineur symétrique du 2^d^ degré de H est positif.

Deux points distincts à distance finie.

$H = 0$; $F(A, B, C, D) \gtrless 0$; tous les déterminants mineurs du 3me degré de H sont zéro; un déterminant mineur symétrique du 2^d^ degré de H est négatif.

Deux points distincts, dont un au moins se trouve à distance infinie.

$H = 0$; $F(A, B, C, D) = 0$; tous les déterminants mineurs

du 3me degré de H sont zéro; un déterminant mineur symétrique du 2^d degré de H est négatif.

Deux points coïncidents à distance finie.

$H = 0$; $F(A, B, C, D) \gtrless 0$; tous les déterminants mineurs du 2^d degré de H sont zéro.

Deux points coïncidents à distance infinie.

$H = 0$; $F(A, B, C, D) = 0$, tous les déterminants mineurs du 2^d degré de H sont zéro.

§. 9.

En discernant une surface imaginaire d'avec un hyperboloïde à une nappe, nous avons supposé que tous les déterminants mineurs symétriques du premier degré de H ne sont pas zéro à la fois; de même ceux du 2me degré, et ceux du 3me degré.

Si l'on avait $a = b = c = d = 0$, l'équation

$$l\mu\nu + m\nu\lambda + n\lambda\mu + p\lambda\varrho + q\mu\varrho + r\nu\varrho = 0$$

serait satisfaite par $\mu = \nu = \varrho = 0$,
par $\nu = \varrho = \lambda = 0$,
par $\varrho = \lambda = \mu = 0$,
par $\lambda = \mu = \nu = 0$.

La surface ne serait pas imaginaire alors, en sorte qu'on a un hyperboloïde à une nappe dans le cas $H > 0$, $F(A, B, C, D) \gtrless 0$, $a = b = c = d = 0$.

Si tous les déterminants mineurs symétriques du second degré de H étaient zéro, a, b, c, d auraient même signe. Supposons qu'ils soient tous positifs. De

$$\begin{vmatrix} b & l \\ l & c \end{vmatrix} = 0 \text{ suit } l = \pm\sqrt{bc},$$

de

$$\begin{vmatrix} a & m \\ m & c \end{vmatrix} = 0 \text{ suit } m = \pm\sqrt{ac},$$

de même $n = \pm\sqrt{ab}$, $p = \pm\sqrt{ad}$, $q = \pm\sqrt{bd}$, $r = \pm\sqrt{cd}$.

L'équation de la surface peut donc s'écrire

$$a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2+d\varrho^2 \pm 2\mu\nu\sqrt{bc} \pm 2\nu\lambda\sqrt{ac} \pm 2\lambda\mu\sqrt{ab} \pm 2\lambda\varrho\sqrt{ad}$$
$$\pm 2\mu\varrho\sqrt{bd} \pm 2\nu\varrho\sqrt{cd} = 0.$$

H étant différent de zéro, tous les termes de cette équation ne peuvent avoir même signe, car alors l'équation pourrait s'écrire

$$(\lambda\sqrt{a}+\mu\sqrt{b}+\nu\sqrt{c}+\varrho\sqrt{d})^2=0,$$

ce qui exige $H=0$.

De la même manière on ne saurait avoir

$$a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2+d\varrho^2+2\mu\nu\sqrt{bc}+2\nu\lambda\sqrt{ac}+2\lambda\mu\sqrt{ab}-2\lambda\varrho\sqrt{ad}$$
$$-2\mu\varrho\sqrt{bd}-2\nu\varrho\sqrt{cd}=0,$$

ou $$(\lambda\sqrt{a}+\mu\sqrt{b}+\nu\sqrt{c}-\varrho\sqrt{d})^2=0.$$

De même quelques autres combinaisons de signes ne peuvent se présenter.

Quand le premier membre de l'équation n'est pas un carré, comme dans le cas

$$a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2+d\varrho^2-2\mu\nu\sqrt{bc}-2\nu\lambda\sqrt{ac}-2\lambda\mu\sqrt{ab}+2\lambda\varrho\sqrt{ad}$$
$$+2\mu\varrho\sqrt{bd}+2\nu\varrho\sqrt{cd}=0,$$

remarquons que l'on peut écrire cette équation

$$(\lambda\sqrt{a}+\mu\sqrt{b}+\nu\sqrt{c}+\varrho\sqrt{d})^2-4\mu\nu\sqrt{bc}-4\nu\lambda\sqrt{ac}-4\lambda\mu\sqrt{ab}=0.$$

Mais celle-ci est satisfaite, quand on substitue

$$\lambda=\mu=0,\ \nu\sqrt{c}+\varrho\sqrt{d}=0,$$

de sorte que la surface n'est pas imaginaire alors.

De même dans tous les autres cas, où le premier membre de l'équation n'est pas un carré par rapport aux variables.

Nous avons donc le théorème:

Quand $H>0$, $F(A, B, C, D) \gtrless 0$, et que tous les déterminants mineurs symétriques du second degré de H sont zéro, la surface est un hyperboloïde à une nappe.

Si tous les déterminants mineurs symétriques du 3me degré de H sont zéro, considérons l'équation de la surface en coordonnées quadriplanaires.

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & \alpha \\ n & b & l & q & \beta \\ m & l & c & r & \gamma \\ p & q & r & d & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \end{vmatrix} = 0.$$

Le coefficient de α^2 dans cette équation est $\frac{dH}{da}$, ce qui est égal à zéro, d'après la supposition. De même le coefficient de β^2, celui de γ^2, et celui de δ^2 sont zéro. Mais alors l'équation en coordonnées quadriplanaires est satisfaite

$$\begin{aligned} &\text{par} \quad \beta = \gamma = \delta = 0, \\ &\text{par} \quad \gamma = \delta = \alpha = 0, \\ &\text{par} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

La surface est donc réelle, de sorte qu'on peut dire:

Quand $H > 0$, $F(A, B, C, D) \gtrless 0$, et que tous les déterminants mineurs symétriques du 3me degré de H sont zéro, la surface est un hyperboloïde à une nappe.

Remarque. Ce qui précède nous apprend en même temps à discerner dans le cas exceptionnel de numéro 8, page 167, Tome L.

Groningue, Mai 1870.

XVIII.

Ueber die Ermittlung der Winkelsumme ebener Poligone.

Von

Herrn *Anton Steinhauser*,

Professor der Mathematik an der Landesoberrealschule in Wiener-Neustadt.

(Figuren s. Taf. VI.)

Der Wunsch die Winkelsumme eines allgemeinen Poligones (Poligones mit Kreuzungs- oder Doppelpunkten) auf eine bequemere Weise ermitteln zu können als dies nach den bis jetzt bekannten Methoden der Fall ist, gab die Anregung zur vorliegenden Arbeit. Dieselbe entwickelt mit Hilfe von theils bekannten, theils neuen Definitionen und Sätzen, welche der Abgeschlossenheit des Ganzen wegen im Eingange sämmtlich angegeben werden, ein Verfahren, nach welchem die Winkelsumme eines jeden allgemeinen Poligones möglichst einfach gefunden werden kann.

§. 1.

Unter einem Poligone, versteht man jenes geometrische Gebilde, welches durch eine geschlossene Aufeinanderfolge von geradlinigen Strecken (Seiten des Poligones) entsteht.

§. 2.

Geht man von irgend einem Punkte des Poligonumfanges aus, und durchschreitet man denselben stetig ganz, jedoch so,

dass jedes Element desselben als einer bestimmten Seite angehörig, nur Einmal durchschritten wird, so sagt man, man habe sich im Poligonumfange nach einerlei Richtung bewegt.

§. 3.

Der Umfang eines jeden Poligones kann nach „einerlei Richtung“ immer auf zweifache Weise durchschritten werden. Die hierbei auftretenden zwei verschiedenen Bewegungsrichtungen sind einander entgegengesetzt.

§. 4.

Je zwei Seiten des Poligones, welche bei der Durchschreitung desselben nach einerlei Richtung, unmittelbar nach einander durchschritten werden, werden aufeinanderfolgende genannt. Eine derselben ist in Beziehung auf die andere entweder eine vorhergehende oder folgende.

§. 5.

Ist eine Seite bei angenommener Bewegungsrichtung die $\left\{\begin{matrix}\text{folgende}\\ \text{vorhergehende}\end{matrix}\right\}$ einer anderen, so ist sie unter Annahme der entgegengesetzten Bewegungsrichtung die $\left\{\begin{matrix}\text{vorhergehende}\\ \text{folgende}\end{matrix}\right\}$ derselben.

§. 6.

Je zwei aufeinander folgende Seiten schneiden sich in einem Punkte, einer Ecke des Poligones, und bilden an derselben als Scheitel, immer einen hohlen und einen erhabenen Winkel.

§. 7.

Nachdem jede der n Seiten eines Poligones einen Anfangs- und einen Endpunkt, das Poligon selbst somit $2n$ solcher Punkte enthält, je zwei derselben, nämlich der $\left\{\begin{matrix}\text{Endpunkt}\\ \text{Anfangspunkt}\end{matrix}\right\}$ einer Seite und der $\left\{\begin{matrix}\text{Anfangspunkt}\\ \text{Endpunkt}\end{matrix}\right\}$ der folgenden, aber in je einer Ecke zusammenfallen, so folgt hieraus, dass jedes $n$seitige Poligon auch immer $\frac{2n}{2}$, also n Ecken besitzen müsse.

§. 8.

Von den zwei einander entgegengesetzten Richtungen (§ 3), in denen die Periferie eines Kreises von einem Punkte durchlaufen werden kann, nenne man jene positiv, welche mit der Bewegung eines Uhrzeigers übereinstimmt.

Denkt man sich nun die Ecken eines Poligones durch Kreisbögen abgerundet, wie dies in Fig. 1. der Fall ist, und durchschreitet man das Poligon nach einerlei Richtung, so wird man im Allgemeinen finden, dass die Bögen an den Ecken oder diese selbst (wenn man den Radius der Bögen unendlich klein denkt) nicht zugleich sämmtlich in positiver oder negativer Richtung durchschritten werden.

Die Art und Weise, in der nun eine Ecke in Vergleich zur Bewegung eines Punktes auf einer Kreisperiferie durchlaufen wird, heisse man den Sinn der Bewegung in der Ecke.

Man kann nun sagen:

1) Trotz einerlei Bewegungsrichtung kann der Sinn der Bewegung in den Ecken ein verschiedener sein.

2) Durch die Annahme einer Bewegungsrichtung wird der Sinn der Bewegung in den Ecken fixirt.

In Figur 1 ist unter Annahme der Bewegungsrichtung (1, 2) der Sinn der Bewegung in 1 und 2 positiv, in 3 und 4 negativ.

§. 9.

Bei der Aenderung der Bewegungsrichtung in die entgegengesetzte ändern sich die Zeichen der Bewegungssinne in den Ecken.

§. 10.

Jede Seite eines Poligones kann über jede der in ihr liegenden zwei Ecken hinaus, also auf zweierlei Art verlängert werden. Bei einem nEcke sind daher $2n$ solcher Verlängerungen möglich, von denen je n zusammengehören, und zwar jene, die bei einerlei Bewegungsrichtung erhalten werden. So sind in Fig. 2 — (1, a), (2, c), (3, e), (4, g) die bei der Bewegungsrichtung (1, 2) — und (1, b), (2, d), (3, f), (4, h) die bei der Bewegungsrichtung (2, 1) erhaltenen, zusammengehörigen Seitenverlängerungen.

§. 11.

Durch die Verlängerung einer Seite über Eine der Ecken wird die Bewegungsrichtung, somit nach § 8, auch der Sinn der Bewegung in den Ecken bestimmt.

§. 12.

Beschreibt man (Fig. 2) aus einer Ecke des Poligones als Mittelpunkt einen vollen Kreis, und geht man vom Schnittpunkte desselben mit einer, der über diese Ecke ragenden Seitenverlängerungen entweder im positiven oder negativen Sinne längs des Kreisbogens fort, bis zu dessen Schnittpunkt mit der folgenden Seite, so erhält man einen, dem hierbei beschriebenen Bogen entsprechenden äusseren Winkel (Aussenwinkel) des Poligones. (Diese Definition weicht von der üblichen ab.). An jeder Ecke des Poligones können, jenachdem man die Seiten nach der einen oder anderen Richtung verlängert, — die Bögen in positivem oder negativem Sinne beschreibt — vier Aussenwinkel construirt werden, von denen jedoch je zwei, als Scheitelwinkel, der Grösse nach übereinstimmen. Es gibt daher an jeder Ecke nur zwei — beim n Ecke $2n$, der Grösse nach verschiedene Aussenwinkel.

§. 13.

Von den $2n$ Aussenwinkeln eines n Eckes sind jene **hohl**, bei denen der Sinn der Bewegung in ihrer Ecke mit dem Sinne, in welchem ihre Bögen beschrieben wurden, übereinstimmt, während die übrigen **erhaben** sind.

§. 14.

Zusammengehörig nennt man jene Aussenwinkel eines Poligones, bei denen die Seitenverlängerungen unter einerlei Bewegungsrichtung gezeichnet, — und die Bögen im gleichen Sinne beschrieben wurden.

§. 15.

Beschreibt man (Fig. 2) aus einer Ecke des Poligones als Mittelpunkt einen vollen Kreis, und geht man vom Schnittpunkte desselben mit einer an dieser Ecke liegenden Seite, entweder im positiven oder negativen Sinne längs des Kreisbogens fort, bis zu

dessen Schnittpunkt mit der an derselben Ecke liegenden zweiten Seite, so erhält man einen, dem hierbei beschriebenen Bogen entsprechenden inneren Winkel des Poligones (Poligonwinkel).

An jeder Ecke des Poligones können, jenachdem man die Bögen im positiven oder negativen Sinne beschreibt, zwei Poligonwinkel construirt werden, von denen immer einer hohl der andere erhaben ist. Ein nEck besitzt daher n hohle und n erhabene, im Ganzen $2n$ Poligonwinkel.

§. 16.

Zusammengehörig nennt man jene Poligonwinkel, bei denen unter Einhaltung einerlei Bewegungsrichtung die Bögen im gleichen Sinne, sämmtlich von einer $\left\{\begin{matrix}\text{folgenden}\\ \text{vorhergehenden}\end{matrix}\right\}$ zur $\left\{\begin{matrix}\text{vorhergehenden}\\ \text{folgenden}\end{matrix}\right\}$ Seite beschrieben wurden.

§. 17.

Einem Aussenwinkel zugehörig nennt man jenen der zwei mit ersterem an derselben Ecke liegenden Poligonwinkel, welcher im $\left\{\begin{matrix}\text{gleichen}\\ \text{entgegengesetzten}\end{matrix}\right\}$ Sinne mit diesem, von einer $\left\{\begin{matrix}\text{folgenden}\\ \text{vorhergehenden}\end{matrix}\right\}$ zur $\left\{\begin{matrix}\text{vorhergehenden}\\ \text{folgenden}\end{matrix}\right\}$ Seite beschrieben wird.

§. 18.

Einem $\left\{\begin{matrix}\text{hohlen}\\ \text{erhabenen}\end{matrix}\right\}$ Aussenwinkel kann nur ein $\left\{\begin{matrix}\text{hohler}\\ \text{erhabener}\end{matrix}\right\}$ Poligonwinkel zugehören.

§. 19.

Den in den §§ 12, 14, 15, 16 und 17 angeführten Definitionen gemäss sind in Figur 3:

1) (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) u. (α_4, β_4) die bezüglich an den Ecken 1, 2, 3 und 4 liegenden Paare von Aussenwinkel, welche der Bewegungsrichtung (1, 2) entsprechen.

2) (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3) u. (p_4, q_4) die bezüglich an den Ecken 1, 2, 3 und 4 liegenden Paare der Poligonwinkel

3) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ u. $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ die zwei Sisteme zusammengehöriger Aussenwinkel.

4) (p_1, p_2, p_3, p_4) u. (q_1, q_2, q_3, q_4) die zwei Sisteme zusammengehöriger Poligonwinkel.

5) $[(\alpha_1$ u. $p_1), (\alpha_2$ u. $p_2), (\alpha_3$ u. $p_3), (\alpha_4$ u. $p_4)]$ u. $[(\beta_1$ u. $q_1), (\beta_2$ u. $q_2), (\beta_3$ u. $q_3), (\beta_4$ u. $q_4)]$ die zwei Sisteme der Paare zusammengehöriger Aussen- und Poligonwinkel.

§. 20.

Nachdem es sowohl zwei verschiedene Sisteme zusammengehöriger Poligon- als Aussenwinkel gibt, so gibt es auch im Allgemeinen je zwei verschiedene Summen derselben.

Bezeichnet man die zwei verschiedenen Summen der zusammengehörigen Poligonwinkel mit S_p' und S_p'', jene der Aussenwinkel mit S_a' und S_a'', und nimmt man noch an, dass S_p' jene Poligonwinkel enthält, die zu den in S_a' enthaltenen Aussenwinkeln gehören, so ergeben sich augenblicklich folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} S_p' + S_p'' &= 4n \\ S_a' + S_a'' &= 4n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

wenn der Rechte Winkel, was auch für die Folge gilt, als Einheit angenommen wird, und n die Anzahl der Seiten oder Ecken des Poligones angibt.

§. 21.

Denkt man sich unter der Voraussetzung, dass die Ecken eines Poligones aufeinanderfolgend mit $1, 2, 3 \ldots . n$ bezeichnet — $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots . \alpha_n)$ die bezüglich an den Ecken $1, 2, 3 \ldots . n$ liegenden zusammengehörigen Aussenwinkel eines Sistemes seien, die letzteren parallel zu sich selbst längs der Poligonseiten an Eine z. B. die erste Ecke verschoben, so beginnt immer der Bogen des $m$ten dort, wo jener des $(m-1)$ten endet.

Es beginnt sonach der Bogen des zweiten, wo jener des ersten — der des dritten, wo jener des zweiten endet u. s. w. bis sich endlich das Ende des $n$ten an den Anfang des ersten Bogens anschliesst.

Die zusammengehörigen Aussenwinkel eines Poligones bilden daher zusammengenommen immer ein Vielfaches einer Periferie, so dass

$$\left.\begin{array}{l} S_a' = 4\mu' \\ S_a'' = 4\mu'' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

und, da $S_a' + S_a'' = 4n$,

$$\mu' + \mu'' = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

sein muss.

§. 22.

Ist ein Aussenwinkel an einer Ecke $\left\{\begin{array}{l}\text{hohl}\\ \text{erhaben}\end{array}\right\}$ so ist der zweite an dieser Ecke befindliche, im entgegengesetzten Sinne beschriebene, offenbar $\left\{\begin{array}{l}\text{erhaben}\\ \text{hohl}\end{array}\right\}$.

Besitzt daher ein $n$seitiges Poligon unter n zusammengehörigen Aussenwinkeln des einen Sistemes h_a' hohle und e_a' erhabene, so besitzt das zweite Sistem derselben $h_a'' = e_a'$ hohle und $e_a'' = h_a'$ erhabene Winkel.

§. 23.

Die Summe eines Aussen- und zugehörigen Poligonwinkels beträgt 2 Rechte wenn (§. 18) beide hohl — 6 Rechte wenn beide erhaben sind.

Der Grund hiervon liegt in der Bildung je zweier solcher zusammengehöriger Winkel.

§. 24.

Bilden $(p_1, p_2, p_3 \ldots . p_n)$ ein Sistem zusammengehöriger innerer Winkel eines $n$seitigen Poligones, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots . \alpha_n)$ das Sistem der dazugehörenden Aussenwinkel, so dass (p_1 u. α_1), (p_2 u. α_2), (p_3 u. α_3) .... (p_n u. α_n) zusammengehören, — und befinden sich unter den Aussenwinkeln h_a' hohle und e_a' erhabene, wobei $h_a' + e_a' = n$ sein muss, so folgt

$$\begin{aligned}(p_1 + \alpha_1) + (p_2 + \alpha_2) + (p_3 + \alpha_3) + \ldots + (p_n + \alpha_n) &= 2h_a' + 6e_a' \\ &= 2(n - e_a') + 6e_a' = 2n + 4e_a'\end{aligned}$$

oder

$$(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n) = [2n + 4e_a' - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)].$$

Mit Rücksicht auf §. 20 wird nun

$$S_p' = [2n + 4e_a' S - {}_a']$$

und, da nach § 21 $S_a' = 4\mu'$,

$$S_p' = [2n + 4(e_a' - \mu')].$$

Ebenso ist

$$S_p'' = [2n + 4(e_a'' - \mu'')].$$

Nachdem nun aber nach Gleichung 3) in § 21 $\mu'' = n - \mu'$, nach §§ 22 und 24, $e_a'' = h_a' = n - e_a'$ ist, wird

$$S_p'' = [2n - 4(e_a' - \mu')]$$

und beide Formeln zusammengezogen:

$$S_p = 2[n \pm 2(e_a - \mu)] \quad \ldots\ldots\ldots 1^*)$$

§. 25.

Soll von einem gegebenen Poligone die Winkelsumme bestimmt werden, so hat man nach dem vorhergehenden Paragrafe die Werte von e_a und μ zu bestimmen. e_a ergibt sich sogleich durch die Construction eines Sistemes zusammengehöriger Aussenwinkel. μ wird mit Hilfe folgender Betrachtungen gefunden.

Denkt man sich wieder sämmtliche zusammengehörige Aussenwinkel eines Sistemes längs der Poligonseiten parallel zu sich selbst nach einer Ecke z. B. m verschoben, so bilden dieselben, wie dies im § 20 angegeben wurde, an dieser Ecke zusammengenommen μ volle Winkel, welche man sich in ebenso vielen Schichten übereinanderliegend denken kann.

Zieht man nun durch m einen Halbstrahl, so schneidet derselbe μ Aussenwinkel, da ja an jeder Stelle um m herum so viele übereinanderliegen.

Schiebt man sodann sämmtliche Aussenwinkel wieder parallel zu sich selbst sammt den bei einigen hinzugekommenen Schnittlinien an ihre Ecken zurück, so werden μ Aussenwinkel diese Schnittlinie in ihren Winkelräumen enthalten. Zöge man durch die Scheitel der $(n - \mu)$ übrigen Aussenwinkel diesen Schnittlinien parallele und gleichgewendete Halbstrahlen, so müssten

*) Bereits nach Vollendung dieser Arbeit fanden wir diese Formel in der 1. Lieferung des so eben erscheinenden Handbuches der Mathematik, Phisik, Geodäsie und Astronomie von Dr. Rudolf Wolf angegeben. Die folgende Verwertung dieser Formel hat jedoch mit dem soeben citirten Werke nichts mehr gemein.

an denen hohle Aussenwinkel liegen) — eine Streifgerade nur in 3, 5 und 7. Es kann daher nach den in diesem Paragrafe entwickelten Sätzen der Bogen des Aussenwinkels in 6 vom Halbstrahle nicht getroffen werden. Um aber auch zu erfahren, ob die Bögen der an den Ecken 3, 5 und 7 liegenden Aussenwinkel getroffen werden, muss man die Richtung berücksichtigen, in welcher bei der durch die Aussenwinkel fixirten Bewegungsweise (1, 2) die Berührungselemente an den Ecken durchlaufen werden.

Es ist nun die Bewegung im Berührungselemente an der Ecke 3 von unten nach aufwärts — an jener 5 von oben nach abwärts — an jener 7 von unten nach aufwärts gerichtet.

Da nun sämmtliche Streifgeraden von unten nach aufwärts gezogen wurden, so stimmt die Bewegungsrichtung im Berührungselemente nur bei den an den Ecken 3 und 7 gezogenen Halbstrahlen mit der Seite nach welcher diese gewendet sind überein, weshalb man — ohne die Aussenwinkel selbst zu construiren, zu behaupten im Stande ist, dass im gegebenen Poligone, von den nach aufwärts gezogenen Halbstrahlen, nur die Bögen der an den Ecken 3 und 7 liegenden Aussenwinkel getroffen werden können.

§. 29.

Eine unbegränzte Gerade, welche durch eine Poligonecke gehend den Bogen des an derselben liegenden e r h a b e n e n Aussenwinkels nur in Einem Punkte schneidet, muss eine S t r e i f g e r a d e der Ecke sein, da sie keine seiend, zwischen beide die Ecke bildende Schenkel fallen, somit den Bogen des Aussenwinkels zweimal schneiden müsste.

Von den beiden durch die Poligonecke getrennten Halbstrahlen der Streifgeraden schneidet immer jener den Bogen des erhabenen Aussenwinkels n i c h t, welcher nach der Seite liegt, nach welcher unter der, durch das angenommene System der Aussenwinkel, fixirten Bewegungsrichtung, das Berührungselement derselben mit der Ecke durchlaufen wird.

In Fig. 5 besitzt das Poligon erhabene Aussenwinkel an den Ecken 1, 2, 8, 9. Werden wieder durch sämmtliche Ecken vertical nach aufwärts Halbstrahlen gezogen, so sind (wenn man wieder nur jene berücksichtiget, welche durch Ecken gezogen werden, die Scheitel erhabener Aussenwinkel sind) die durch 1, 2, 8 gehenden Halbstrahlen zugleich Streifgerade.

Da nun die Bewegungsrichtung im Berührungselemente an 1. von oben nach abwärts, an 2, von unten nach aufwärts, an 8, von

unten nach aufwärts gerichtet ist, dieselbe daher an den Ecken 2 und 8 mit jener Richtung, nach welcher die Halbstrahlen gewendet sind, übereinstimmen, so folgt, dass nur die Bögen der an den Ecken 2 und 8 liegenden Aussenwinkel von den vertical nach aufwärts gerichteten Halbstrahlen nicht getroffen werden können.

§. 30.

Zur leichteren Ausdrucksweise im Folgenden möge jener der zwei, eine Streifgerade des Poligones bildenden Halbstrahlen Fliehstrahl genannt werden, welcher nach der Seite gewendet ist, nach der, unter Annahme der Bewegungsrichtung, das Berührungselement zwischen dieser Streifgeraden und der von ihr gestreiften Ecke, durchlaufen wird.

§. 31.

Ist von einem $n$seitigen Poligone die Winkelsumme zu bestimmen, und besitzt dasselbe unter einem Sisteme von Aussenwinkeln h_a hohle und e_a erhabene Winkel, werden ferner von den h_a hohlen Bögen, x durch den Halbstrahl getroffen, von den der e_a erhabenen y nicht getroffen, so ist offenbar nach §. 25

$$\mu = x + (e_a - y)$$

und dies in Formel I §. 24 eingesetzt

$$S_p = 2[n \pm 2(e_a - x - e_a + y)],$$

also

$$\left.\begin{aligned} S_p &= 2[n \mp 2(x-y)] \ldots \alpha) \\ \text{oder wenn } z &= x - y, \\ S_p &= 2[n \mp 2z] \ldots\ldots \beta) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{II.}$$

wobei nach dem in den §§ 28, 29 und 30 Gesagten x und y zusammengenommen die Anzahl der nach einerlei Seite gewendeten parallelen Fliehstrahlen bildet, welche am Poligone gezogen werden können.

§. 32.

Nimmt man nun an, dass in der Folge die Bögen der Aussenwinkel immer in positivem Sinne beschrieben werden, so sind (nach §. 13) diese an jenen Ecken $\left\{\begin{matrix}\text{hohl}\\ \text{erhaben}\end{matrix}\right\}$ an welchen der Bewegungssinn ein $\left\{\begin{matrix}\text{positiver}\\ \text{negativer}\end{matrix}\right\}$ ist.

Zieht man sonach die parallelen, und nach einerlei Seite gewendeten (am einfachsten nach aufwärts gerichteten) Fliehstrahlen des Poligones, so stellt $\binom{x}{y}$ die Anzahl jener Fliehstrahlen vor, welche an den Ecken mit $\left\{\begin{matrix}\text{positivem}\\ \text{negativem}\end{matrix}\right\}$ Bewegungssinne liegen.

Nimmt man die das x bildenden Fliehstrahlen positiv, jene das y bildenden negativ an, so stimmt das Zeichen des Fliehstrahles mit dem Zeichen des Bewegungssinnes in der Ecke, an welcher derselbe liegt, überein.

§. 33.

Die in den vorangegangenen Paragrafen angegebenen Sätze, befähigen uns nun, ohne jegliche Construction die Winkelsumme eines jeden allgemeinen Poligones ebenso schnell als zweifellos zu finden, wie dies ein Beispiel sogleich zeigen wird.

Ist vom Poligone 1, 2, 3 .... 13 Fig. 6 dic Winkelsumme zu bestimmen, so durchlaufe man von einer Ecke (z. B. 1) ausgehend den Poligonsumfang nach einerlei Richtung. Dabei untersuche man, an welchen der Ecken Fliehstrahlen vertical nach aufwärts gezogen werden können, und welches Zeichen (§ 32) die einzelnen derselben besitzen werden. Berücksichtiget man nun, dass nach §. 32 die Zahl der positiven das x, die der negativen das y bildet — in der zu bestimmenden Differenz $(x-y)=z$ jede positive Einheit in x eine negative in y tilgt, — so lässt sich der Werth dieser Differenz offenbar gleich beim Durchlaufen des Poligonumfanges durch Reduction bestimmen. Man wird daher von 1 nach 2 gehend in 2 angelangt sagen „minus eins" in 3 „null" in 9 „plus eins" in 1 „plus zwei". Der Werth von $x-y$ oder z ist somit 2 folglich da $n=13$: $S_p = 2[13\mp 2.2] = \left\{\begin{matrix}18\\ 34\end{matrix}\right\}$ Rechte.

Hierbei gehört, den unmittelbar vorhergegangenen Paragrafen zufolge, die Summe von $\left\{\begin{matrix}2[13-2.2]=18\\ 2[13+2.2]=34\end{matrix}\right\}$ Rechten, offenbar jenen Poligonwinkeln an, welche zu dem Sisteme von Aussenwinkeln $\left\{\begin{matrix}\text{gehören}\\ \text{nicht gehören}\end{matrix}\right\}$ das in positivem Sinne beschrieben (§. 32), durch die angenommene Bewegungsrichtung bestimmt wird (§. 10).

§. 34.

Die in §. 31 angegebenen Formeln II_α, II_β stimmen in der Form, bezüglich mit den von Unferdinger (LVII Bd. d. Sitzb. d. k. Acad. der Wissenschaften in Wien II. Abth., April-Heft, Jahrg. 1868) und Wiener (Ueber Vielecke und Vielflache, Leipzig 1864) angegebenen vollständig überein.

Ein Unterschied zwischen II_α und Unferdingers Formel besteht jedoch in der verschiedenen Auffassung der hier mit x und y, bei Unferdinger mit ν und ν' bezeichneten Grössen. In vorliegender Arbeit wird unter denselben die Anzahl der unter fixirten Umständen am Poligone zu ziehenden Tangenten (Fliehstrahlen) verstanden, während Unferdinger unter denselben die Anzahl der Rotationen versteht, welche die Tangente selbst am Poligonumfange theils in positivem theils in negativem Sinne beschreibt.

Die Zerlegung des Poligons in einzelne Rotationen, wie sie nach Unferdinger vorgenommen werden muss, ist nun in complizirteren Fällen beschwerlich, da man sich entweder die Bewegungsrichtung in jeder Seite des Poligones gegenwärtig halten, oder auf irgend eine Weise bezeichnen muss.

Ebenso müssen die, eine Rotation bildenden Seiten auf irgend eine Weise bezeichnet werden, damit nicht eine der Rotationen ausgelassen oder eine doppelt gezählt wird. Kurz gesagt nach Unferdingers Methode kann man sich in complizirteren Fällen entweder leicht irren, oder man braucht gewisse Hilfsmittel um die bereits in Rechnung gebrachten Elemente zu bezeichnen.

Die Bedeutung der Formel II_β und jener Wieners ist, wenn nicht übereinstimmend so doch ähnlich. Die bei Wiener mit a bezeichnete, unserem z entsprechende Grösse, kann jedoch nach der dort angegebenen Methode nur gefunden werden, wenn man die ein- und ausspringenden Poligonwinkel kennt; da dieselben jedoch bei complizirteren Poligonen nicht sogleich unterschieden werden können, so müssten dieselben wenigstens durch Bögen bezeichnet werden.

Nach der hier entwickelten Methode ergab sich jedoch ein Verfahren zur Auffindung der Winkelsumme, welches blos ein einmaliges Durchschreiten des Poligonumfanges, ohne jedes weitere Hilfsmittel nötig macht.

Diese letztere Methode lässt aber auch aus den in der oben citirten Abhandlung von Unferdinger angeführten Gründen, den sehr zweckmässigen Uebergang von Poligonen auf dieselbe stell-

vertretende Curven (Tipen der Poligone) zu, wodurch in bequemer Weise ein Zusammenhang zwischen der Gestalt eines Poligones und seiner Summenformel hergestellt wird.

§. 35.

Setzt man $(x-y)=z$, ist also $S_p=2[n\mp 2z]$, so erhält man je nach dem besonderen Werte, welcher dem z beigelegt wird, die Summenformeln $S_p=2[n\mp 0]$, $S_p=2[n\mp 2]$, $S_p=2[n\mp 4]$, $S_p=2[n\mp 6]$ u. s. w.

Jede dieser Formeln gilt aber offenbar für je eine Gruppe unendlich vieler Poligone, für welche der Wert der Differenz $(x-y)$ d. i. z bezüglich 0, 1, 2, 3, u. s. w. wird. Fasst man daher, wie dies bereits Wiener gethan hat, sämmtliche, in je einer solchen Gruppe befindliche Poligone in „Arten" zusammen, so erhält man:

1) die Poligone der 0ten Art, bei denen $z=0$ und $S_p=2[n]$
2) - - - 1ten - - - $z=1$ - $S_p=2[n\mp 2]$
3) - - - 2ten - - - $z=2$ - $S_p=2[n\mp 4]$
. . . .
$(m+1)$ - - - $m$ten - - - $z=m$ - $S_p=2[n\mp 2m]$

§. 36.

Nachdem bei einem Poligone offenbar keine der beiden Winkelsummen „null" werden kann, so folgt aus $S_p=2[n\mp 2z]$

$$\left.\begin{array}{l} n>2z \\ z<\frac{n}{2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Da aber z nach §. 35 die Art des Poligones angibt, so folgt nach 4) dass:

3 und 4 Ecke höchstens der 1ten
5 und 6 - - - 2ten
7 und 8 - - - 3ten
$(2m-1)$ u. $(2m)$ - - - $(m-1)$ten Art angehören können.

Weiteres folgt aus 4) dass ein Poligon der $m$ten Art mehr als $2m$ Seiten besitzen müsse.

§. 37.

Für Poligone der „nullten" Art muss offenbar $x = y$ werden, und fallen die Werte der beiden Winkelsummen zusammen. Dieser, diese Poligone besonders auszeichnenden Eigenschaft wegen, möchten wir dieselben „winkelsummengleich" nennen.

Das einfachste „winkelsummengleiche" Poligon ist das in Fig. 1 gezeichnete Viereck.

§. 38.

Für Poligone der Iten Art wird $(x - y) = \mp 1$ mithin $x = y \mp 1$. Da die durch diese unbestimmte Gleichung ausgedrückte Bedingung ohne Rücksicht auf die Halbstrahlsrichtung auf unendlich viele verschiedene Arten erfüllt werden kann, so gibt es je nach der Art dieser Erfüllung unendlich viele Unterarten dieser, sowie aus einem ähnlichen Grunde der Poligone der folgenden Arten.

Poligone, welche eine Richtung der Fliehstrahlen zulassen, für welche $x = 1$ und $y = 0$ wird, werden „gewöhnliche" genannt. Dieselben enthalten bekanntlich keine Kreuzungs- oder Doppelpunkte.

Zum Schlusse möge nochmal darauf aufmerksam gemacht werden, dass die hier angegebene Methode vorzugsweise für die factische Aufsuchung der Winkelsumme gegebener Poligone bestimmt ist.

Bei anderen, blos die Winkelsumme im Allgemeinen betreffenden Untersuchungen, bildet dieselbe zu Unferdingers Methode eine Ergänzung, da bei denselben bald die eine bald die andere Anschauung bequemer zum Ziele führt.

Es wird daher die Kenntniss beider Methoden in manchen Fällen von Vortheil sein.

XIX.

Construktion der Achsen irgend einer Ellipse, von der zwei conjugirte Durchmesser gegeben sind.

Von

Herrn Conrector ***Delabar***
in St. Gallen.

(Figuren s. Taf. VII.)

In dem 4. Hefte meiner „Anleitung zum Linearzeichnen," welches die „Parallelperspektive" behandelt und gegenwärtig unter der Presse sich befindet, habe ich von der im Titel erwähnten Aufgabe eine Auflösung angegeben, die, so viel mir bekannt, neu ist und daher für die Leser des „Archivs" gewiss nicht ohne einiges Interesse sein wird, desshalb dieselbe hier mitgetheilt werden soll.

Aufgabe. Es sind die beiden conjugirten Durchmesser AB und CD, die sich in O schneiden und den Winkel α mit einander bilden, gegeben; man soll die beiden Achsen der dadurch bestimmten Ellipse finden, Fig. 1 und 2.

Auflösung. Wir haben hier mit Rücksicht auf die Anwendung beim parallelperspektivischen Zeichnen zwei Fälle zu unterscheiden:

I. wenn die Ellipse in der horizontalen Ebene XY liegt, Fig. 1, und

II. wenn sie sich in der vertikalen Ebene ZY, resp. in der Ebene ZX befindet, Fig. 2.

Für beide Fälle gilt bei der gewählten Bezeichnung folgende

Construktion: Verbinde D mit E gehörig verlängert, halbire DE in F, setze den Zirkelfuss in F ein und beschreibe mit dem Radius FO einen Kreisbogen, welchen die Gerade DE in den beiden Punkten G und H durchschneidet, verbinde diese Punkte mit O gehörig verlängert, so bestimmen diese Verbindungslinien die Richtung der beiden Achsen und die beiden Abschnitte EG und EH geben überdiess die Grösse der Halbachsen an. Macht man daher $OJ = OK = EG$ und $OL = OM = EH$, so ist JK die grosse und LM die kleine Achse der verlangten Ellipse sowohl der Grösse als der Richtung nach.

Beweis. Nach Construktion ist:

$$\overline{OJ} = \overline{EG} = \overline{FG} + \overline{FE} = \overline{OF} + \overline{EF}$$

und

$$\overline{OL} = \overline{EH} = \overline{FH} - \overline{FE} = \overline{OF} - \overline{EF},$$

folglich:

$$\overline{OJ}^2 = (\overline{OF} + \overline{EF})^2 = \overline{OF}^2 + 2\overline{OF}.\overline{EF} + \overline{EF}^2$$

und

$$\overline{OL}^2 = (\overline{OF} - \overline{EF})^2 = \overline{OF}^2 - 2\overline{OF}.\overline{EF} + \overline{EF}^2$$

daher:

$$\overline{OJ}^2 + \overline{OL}^2 = 2\overline{OF}^2 + 2\overline{EF}^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a).$$

Ferner ist nach einem bekannten trigonometrischen Lehrsatz:

$$\overline{OF}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{FD}^2 - 2.\overline{OD}.\overline{FD}.\cos ODF$$

und

$$\overline{OE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{ED}^2 - 2.\overline{OD}.\overline{ED}.\cos ODE$$

daher:

$$\cos ODF = \cos ODE = \frac{\overline{OD}^2 + \overline{FD}^2 - \overline{OF}^2}{2.\overline{OD}.\overline{FD}} = \frac{\overline{OD}^2 + \overline{ED}^2 - \overline{OE}^2}{2.\overline{OD}.\overline{ED}}$$

$$= \frac{\overline{OD}^2 + 4.\overline{FD}^2 - \overline{OE}^2}{4.\overline{OD}.\overline{FD}},$$

woraus:

$$2.(\overline{OD}^2 + \overline{FD}^2 - \overline{OF}^2) = \overline{OD}^2 + 4.\overline{FD}^2 - \overline{OE}^2$$

oder:

$$2.\overline{OD}^2 + 2.\overline{FD}^2 - 2\overline{OF}^2 = \overline{OD}^2 + 4.\overline{FD}^2 - \overline{OE}^2$$

folglich:

$$\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 = 2.\overline{OF}^2 + 2\overline{FD}^2$$

oder:

$$\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 = 2.\overline{OF}^2 + 2\overline{FE}^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b).$$

Aus (a) und (b) folgt nun endlich:

$$\overline{OJ}^2 + \overline{OL}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2$$

oder

$$\overline{OJ}^2 + \overline{OL}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OA}^2,$$

d. h. **die Summe der Quadrate der beiden Halbachsen ist gleich der Summe der Quadrate der halben conjugirten Durchmesser.**

Da dieser Satz bekanntlich die Hauptrelation zwischen den Achsen und den conjugirten Durchmessern einer jeden Ellipse ausdrückt, so folgt hieraus umgekehrt die Richtigkeit der Construktion.

Die vorstehende Construktion ist von solcher Allgemeinheit, dass sie für jedes beliebige Grössen- und Richtungsverhältniss der gegebenen schiefen conjugirten Durchmesser gilt, wie diess hier noch an einigen Figuren näher gezeigt werden soll, nämlich:

1. Für das Grössenverhältniss der beiden conjugirten Durchmesser $\frac{\overline{OD_1}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$, $\frac{\overline{OD_2}}{\overline{OA}} = 1$, $\frac{\overline{OD_3}}{\overline{OA}} = \frac{3}{2}$, $\frac{\overline{OD_4}}{\overline{OA}} = 2$ und den Richtungswinkel $\alpha = 30^0$, siehe Fig. 3.

2. Für das Grössenverhältniss der beiden conjugirten Durchmesser $\frac{\overline{OD_1}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$, $\frac{\overline{OD_2}}{\overline{OA}} = 1$, $\frac{\overline{OD_3}}{\overline{OA}} = \sqrt{2}$ und den Richtungswinkel $\alpha = 45^0$, siehe Fig. 4.

3. Für das Grössenverhältniss der beiden conjugirten Durchmesser $\frac{\overline{OD_1}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$, $\frac{\overline{OD_2}}{\overline{OA}} = 1$, $\frac{\overline{OD_3}}{\overline{OA}} = \sqrt{2}$ und den Richtungswinkel $\alpha = 45^0$, siehe Fig. 5.

Von diesen drei Figuren sind die beiden ersten (Fig. 3 und 4), wie die Figur 1, in der horizontalen Ebene XY und die letzte (Fig. 5), wie die Figur 2, in der vertikalen Ebene ZY enthalten.

Diese Figuren bedürfen wohl keiner weitern Erklärung, da die Bezeichnung der Buchstaben darin dieselbe ist, wie in Figur 1 und 2. Die Ellipsen selbst können darum auch wie in Figur 1 und 2 angedeutet ist oder auf irgend eine andere Art konstruirt werden. In dieser Beziehung verweise ich die Leser des „Archivs" auf die eingangs erwähnte, bei nächstem im Buchhandel erscheinende „Parallelperspektive," worin verschiedene derartige Ellipsenkonstruktionen zu finden sind.

XX.

Die Central- und Parallel Projection der Flächen zweiten Grades auf eine Kreisschnittebene.

Von

Herrn *Carl Pelz*,

Zeichner an der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien.

(Figuren s. Taf. VIII. und Taf. IX.)

---

1) Wird ein gerader Kegel durch eine Ebene geschnitten, und man denkt sich die beiden in den Kegel eingeschriebenen Kugeln, welche diese Ebene tangiren, so werden, die beiden Berührungspuncte die Brennpuncte für die Curve sein, in welcher die Ebene die Kegelfläche schneidet.

Dieser zuerst von Quetelet durch Betrachtung der Kegelschnitte an Kegelflächen aufgefundene Satz ist auch für die Central- und Parallel-Projection der Flächen zweiten Grades, wenn diese auf eine ihrer Kreisschnittebenen projicirt werden von grösster Wichtigkeit, da er uns zur directen Construction der Brennpuncte für die Contouren solcher Flächen führt.

2) Es sei (Fig. 1) spq der Axenschnitt einer geraden Kegelfläche, welche durch die auf dem Axenschnitt senkrecht stehende Ebene Σ nach einer Ellipse E von der grossen Axe aa', geschnitten wird. f und f' seien die beiden Berührungspuncte der tangirend eingeschriebenen Kugeln, welche letzteren sich als die grössten Kreise K und K' projiciren, und die Kegelfläche nach den Kreisen $\alpha\alpha'$ und pq berühren. Werden die beiden

Berührungspuncte f und f' mit den zugehörigen Kugelmittelpuncten o und o' verbunden, und der Radius of verlängert bis er K in dem Diametralpuncte φ schneidet, so folgt aus dem Parallelismus der Geraden of und $o'f'$ da s der äussere Aehnlichkeitspunct der beiden Kreise K und K' ist, dass die drei Puncte $s\ \varphi\ f'$ in einer Geraden liegen; f' kann also als die Central-Projection von φ angesehen werden.

Wir können demnach mit Berücksichtigung des Umstandes, dass die Ellipse E die Central-Projection der Kugel K auf die Ebene Σ ist, den Satz aussprechen: Bei der Central- oder Parallel-Projection einer Kugel geben die Perspectiven der Endpuncte des zur Tafel senkrechten Durchmessers die Brennpuncte der Contour.

Denken wir uns weiter die zur Ebene Σ parallelen Kreise der Kugel K, von s auf diese Ebene projicirt, so berührt die Centralprojection eines jeden solchen Kreises die Ellipse E doppelt. D. h.: Jeder Kreis berührt E in zwei im Bezug auf die grosse Axe aa' symmetrisch liegenden Puncten, die sich als die Central-Projectionen der zwei Schnittpuncte seines Originals mit dem Kreise $\alpha\alpha'$ ergeben. Diese Berührung kann daher nur für diejenigen Kreise reell sein, deren Originale zwischen den beiden durch α' und α parallel zu Σ gehenden Kreisen $\alpha'\beta'$ und $\alpha\beta$ liegen. Die Perspectiven aller ausserhalb dieser beiden liegenden Kreise berühren E in imaginären Puncten. Insbesondere sind die Brennpuncte f und f' imaginär doppelt berührende Kreise[1]) von Radien gleich Null.

Der geometrische Ort der Endpuncte aller zu aa' senkrecht stehender Durchmesser dieser doppelt berührenden Kreise ist, da deren Originale im Kugelkreise $f\varphi$ liegen, eine Ellipse E', welche die Perspective des Kreises $f\varphi$ ist; sie hat also die Puncte f und f' zu Scheiteln einer Axe, und die zweite Axe hat sie mit der Ellipse E gemein[2]).

---

1) In der Folge sollen unter doppelt berührenden Kreisen nur diejenigen gemeint sein deren Mittelpuncte auf den Hauptaxen des Kegelschnittes liegen.

2) Die beiden Kreise $f\varphi$ und $\alpha\alpha'$, deren Central-Projectionen uns die Ellipsen E' und E liefern, schneiden sich in einer Kugelsehne die sich in γ orthogonal auf den Axenschnitt projicirt; dieser Punkt γ hat die durch s parallel zu aa' gezogene Gerade zu seiner Polaren (denn diese muss, da γ auf der Polaren von s liegt, durch s gehen und auf dem Durchmesser $f\varphi$ senkrecht stehen.). Schneiden die Geraden $f\varphi$ und $\alpha\alpha'$ diese Polare in n und m so sind sowohl $f\ \gamma\ \varphi\ n$ als auch $\alpha\ \gamma\ \alpha' m$ vier harmonische Puncte; γ projicirt sich daher als Mittelpunct und die in γ senkrechte Kugelsehne als eine Axe für beide Ellipsen.

Daraus folgt: Beschreibt man über den zur $\left\{\begin{matrix}\text{grossen}\\ \text{kleinen}\end{matrix}\right\}$ Axe einer Ellipse E' senkrechten Sehnen als Durchmesser Kreise, so ist deren Einhüllende eine Ellipse E welche die Scheitel der $\left\{\begin{matrix}\text{grossen}\\ \text{kleinen}\end{matrix}\right\}$ Axe von E' zu Brennpuncten hat, die $\left\{\begin{matrix}\text{kleine}\\ \text{grosse}\end{matrix}\right\}$ Axe jedoch haben beide Ellipsen gemein.

3) **Aufgabe.** Es sind (Fig. 2.) gegeben zwei Puncte f und f' und ein Kreis K, dessen Mittelpunct auf ff' und zwar innerhalb dieser beiden Puncte liegt; es soll die Ellipse E gezeichnet werden, welche f und f' zu Brennpuncten hat und vom Kreise K doppelt berührt wird."

Durch die Gerade ff' als eine Axe und durch die beiden Endpuncte s, t des zu ff' senkrechten Kreisdurchmessers ist eine Ellipse E' bestimmt, deren zweite Axe zugleich kleine Axe für die gesuchte Ellipse E ist. Wir sollen demnach die zweite Axe einer Ellipse construiren, welche durch eine Axe und einen Punct bestimmt ist. Diese Aufgabe kann bekanntlich auf verschiedene Art gelöst werden. Wir beschreiben z. B. über ff' als Durchmesser einen Kreis, verbinden den Schnittpunct s' dieses Kreises und des verlängerten Durchmesser st mit o; diese Verbindungslinie os' wird von der durch s parallel zu ff' gezogenen Geraden, einer bekannten Ellipsenconstruction zufolge in v so geschnitten, dass $ov = ob$ gleich der kleinen Axe der Ellipse E ist.

Um die beiden Berührungspuncte des Kreises K mit der Ellipse E zu finden, brauchen wir bloss zu berücksichtigen, dass die den gesuchten Puncten zugehörigen Normalen die grosse Axe im Mittelpuncte c des Kreises K, und ihre Tangenten dieselbe Axe in einem Puncte c' so schneiden, dass $f'c\ fc'$ vier harmonische Puncte sind; der über cc' als Durchmesser beschriebene Kreis schneidet K in den zwei gesuchten Puncten. Zur Construction des vierten harmonischen Punctes c' kann die Tangente in s' benützt werden.

4) Ist (Fig. 3) spq der Axenschnitt einer geraden Kegelfläche, welche durch die Ebene Σ nach einer Hyperbel H von der reellen Axe aa' geschnitten wird; f und f' die beiden Berührungspuncte der tangirend eingeschriebenen Kugeln K und K' mit der Ebene Σ, so kann wie vorher die als Schnittcurve resultirende Hyperbel H als Einhüllende von doppelt berührenden Kreisen betrachtet werden, die sich als die Central-Projectionen

der zum Durchmesser $f\varphi$ senkrecht stehenden Kugelkreise ergeben.

Der geometrische Ort aller Endpuncte der zu aa' senkrecht stehenden Durchmesser dieser doppelt berührenden Kreise ist im vorliegenden Falle eine Hyperbel H', welche die Central-Projection des sich in $f\varphi$ projicirenden Kreises, daher die Schnittcurve der geraden Kegelfläche $s\varphi f$ mit der Ebene Σ ist.

Die Hyperbeln H und H' haben die imaginäre Axe gemein, (denn diese ist für beide gleich dem normalen Abstand der Kegelspitze von der Ebene Σ) und da die Scheitel der reellen Axe der Hyperbel H' in den Brennpuncten der Hyperbel H liegen, so folgt daraus: Beschreibt man über den zur reellen Axe einer Hyperbel H' senkrechten Sehnen, als Durchmesser-Kreise, so ist deren Einhüllende eine Hyperbel H, deren Brennpuncte in den reellen Scheiteln der Hyperbel H' liegen, die imaginäre Axe jedoch haben beide Hyperbeln gemein. Die Hyperbel H kann daher nur dann reell sein wenn die reelle Axe a der Hyperbel H' grösser als deren imaginäre Axe b ist; für $a = b$ verwandelt sich H in eine mit der imaginären Axe von H' zusammenfallende Gerade, für $a < b$ ist H imaginär.

5) **Aufgabe.** Es sind (Fig. 4) gegeben zwei Puncte f und f' und ein Kreis K, dessen Mittelpunct auf ff' und zwar ausserhalb dieser beiden Puncte liegt; es soll die Hyperbel H construirt werden, welche ff' zu Brennpuncten hat und vom Kreise K doppelt berührt wird."

Durch die Gerade ff' als reelle Axe und durch die beiden Endpuncte p, p' des zu ff' senkrechten Kreisdurchmessers ist eine Hyperbel H' bestimmt, welche mit der gesuchten Hyperbel H die imaginäre Axe gemein hat. Wir finden diese Axe durch folgende Betrachtung: Die Gerade $f'p$ wird von der in f errichteten Normale in s und von der Geraden fp' in π so geschnitten, dass f' π s p vier harmonische Puncte sind. Durch den Punct π, und durch die Gerade ff' als Axe ist eine Ellipse E bestimmt, und die zweite Axe dieser Ellipse ist zugleich die imaginäre Axe der Hyperbel H' daher auch der Hyperbel H.

Um die Richtigkeit der gemachten Behauptung einzusehen, betrachte man die Hyperbel H' als die Collinear-Projection der Ellipse E, wobei f' das Collineations-Centrum, fs die Collineations-

Axe x und p' ein Paar homologer Puncte vorstellt [1]). Die zweite Axe der Ellipse E kann aber sehr einfach construirt werden; wir brauchen bloss die in o errichtete Senkrechte von π aus mit der Läng of in n zu durchschneiden, so trifft die Gerade πn, ff' im Puncte q so, dass πq der zweiten Axe der Ellipse E daher auch der imaginären Axe der Hyperbel H gleich ist [2]).

Die imaginäre Axe der Hyperbel H' könnte nach der bekannten Lösungsart vielleicht einfacher gefunden werden und es wurde vorliegende Construction nur desswegen angeführt weil wir von ihr später einen vortheilhaften Gebrauch machen werden. Um die beiden Berührungspuncte des Kreises K mit der Hyperbel H zu bestimmen, construiren wir zu den Puncten f' f c den vierten harmonischen, dem c zugeordneten Punct d [3]) und durchschneiden K mit dem über cd als Durchmesser beschriebenen Kreise.

6) Durch ähnliche Betrachtungen wie bei der Ellipse und Hyperbel finden wir für die Parabel den analogen Satz: „Beschreibt man über den zur Axe einer Parabel P' normalen Sehnen als Durchmesser Kreise, so ist deren Einhüllende eine Parabel P welche den Scheitel der Parabel P' zum Brennpuncte hat, der Parameter ist jedoch für beide Parabeln derselbe.“ Die Aufgabe eine Parabel zu zeichnen, die einen bestimmten Punct zum Brennpuncte hat, und von einem gegebenen Kreise doppelt berührt wird, kann also darnach einfach gelöst werden, da sie sich lediglich auf die Bestimmung des Parameters einer durch den Scheitel, die Axe und einen Punct gegebenen Parabel reducirt. Ebenso einfach können nach dem Vorhergehenden die beiden Berührungspuncte des gegebenen Kreises mit der gesuchten Parabel gefunden werden.

7) Es ist leicht einzusehen, dass die eben angeführten Sätze und Aufgaben mit der Central- und Parallel-Projection der Flächen zweiten Grades, wenn eine Kreisschnittebene als Bildebene angenommen wird, im innigsten Zusammenhange stehen. Wir haben

---

1) Für diese Art von Collineation, welche involutorische genannt wird, weil sich bei ihr Bild und Original vertauschungsfähig entsprechen, fallen die beiden Gegenaxen in die Mitte zwischen das Collineations-Centrum und die Collineations-Axe; der Tangente im Endpuncte b der gesuchten Axe muss demnach die Asymptote der Hyperbel H' entsprechen etc.

2) Folgt ebenfalls aus einer bekannten Ellipsenconstruction.

3) Hier einfach dadurch, dass wir von π eine Normale πd auf ff' fällen.

schon früher gesehen, dass die Brennpuncte eines Kegelschnittes als imaginär doppelt berührende Kreise von Radien gleich Null definirt werden können, und brauchen uns bloss an diese Definition zu halten, um einzusehen, dass der für die Central-Projection der Kugel aufgestellte Satz nicht nur für diese Fläche, sondern mit Ausnahme des einfachen Hyperboloides für alle Rotations-Flächen zweiten Grades gilt, wenn sie auf eine Kreisschnittebene projicirt werden. Und allgemein: „Bei der Central- oder Parallel-Projection der Flächen zweiten Grades auf eine Kreisschnittebene geben die Perspectiven der zu diesem Kreisschnitt gehörigen Nabelpuncte die Brennpuncte der Contour.“ Denn denken wir uns eine solche Fläche nach Parallelkreisen geschnitten und diese auf die zu ihnen parallele Tafel projicirt, so berührt die Perspective eines jeden solchen Kreises die Contourcurve in zwei Punkten, welche die Perspectiven der zwei Schnittpuncte seines Originals mit der ebenen vom Centrum der Fläche umgeschriebenen Berührungscurve sind; die Projectionen der Nabelpuncte sind aber imaginär doppelt berührende Kreise von Radien gleich Null, daher sind es die Brennpuncte der Contour. Bei der Central- und Parallel-Projection der Rotations-Flächen zweiten Grades auf eine Kreisschnittebene, ist daher hinreichend, ausser beiden Endpuncten des zur Tafel senkrechten Durchmessers noch einen beliebigen Parallelkreis der Fläche zu projiciren, da durch diese projicirten Bestimmungsstücke die Contourcurve vollkommen fixirt ist.

8) Für das einfache Hyperboloid führt der eben bewiesene Satz zu den beiden imaginären Brennpuncten des Contour-Kegelschnittes. Es wird daher für die constructive Lösung hierher einschlagender Aufgaben über das einschalige Hyperboloid wichtig sein, diesen Satz durch einen anderen, welcher auf reelle Resultate führt, zu ersetzen. Zu einem solchen für die Central- und Parallel-Projection des einmanteligen Hyperboloides wichtigen Satz werden wir durch folgende geometrische Betrachtung gelangen [1]).

Construirt man (Fig. 5) in einem beliegen Puncte p einer Hyperbel H die Normale und schneidet diese die imaginäre Axe in s so berührt der mit dem Radius sp beschriebene Kreis K die Hyperbel H doppelt, das ist ausser in p noch in einem zu

---

1) Diese geometrische Betrachtung und die sich aus ihr ergebenden zwei Hyperbelconstructionen sind den Vorträgen meines geehrten Lehrers des Herrn Prof. C. Küpper entnommen. Die Beweise sind hier jedoch etwas anders geführt.

m in Bezug auf die imaginäre Axe symmetrisch liegenden
uncte p'. Schneidet die Tangente des Punctes p die imaginäre
xe in q, so geht der über sq als Durchmesser beschriebene Kreis
ı nicht nur durch die Puncte p und p', sondern auch durch die
eiden Brennpuncte f und f' hindurch. Denn trifft die Nor-
ale und die Tangente des Punctes p die reelle Axe beziehungs-
eise in s' und q', so sind bekanntlich f' q' f s' vier harmonische
uncte, für sie gilt daher die Relation $of^2 = oq'.os'$; aus der
ehnlichkeit der Dreiecke sos' und oqq' folgt aber: $os:oq' = os':oq$
ıd daraus $os.oq = oq'.os'$, daher $of^2 = os.oq$. In dem über
' als Durchmesser beschriebenem Kreise muss daher der Punct
liegen, und dasselbe gilt ebenfalls in Bezug auf den Punct f'.

Ist D die Directrix des Brennpunctes f und wird diese von pp'
u geschnitten, so verhält sich $pu:pf = p'u:p'f$; die Gerade
' halbiert also den Winkel $p'fp$, sie fällt daher mit der Geraden
zusammen, D. h.: pp', D und sf schneiden sich in einem und
mselben Puncte u.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $p'su$ und upf folgt weiter:

$$pu:pf = su.sp'$$

ler:

$$pu:pf = su:sp$$

ıd da sich

$$pu:pf = oa:of$$

erhält, so folgt:

$$\left.\begin{array}{l} oa = a \\ of = e \end{array}\right\} \text{ gesetzt}$$

$$su:sp = a:e.$$

Ziehen wir weiter die Scheiteltangente in a bis diese sf in v
chneidet, so verhält sich:

$$su:sv = od:oa$$
$$= \frac{oa^2}{of}:oa,$$

$$su:sv = a:e$$
$$su:sp = a:e;$$

aher ist

$$sv = sp,$$

l. h.: der Kreis K die Gerade sf und die Scheiteltangente
chneiden sich in einem und demselben Puncte.

Ich erlaube mir der Hyperbelconstruction [1]) zu erwähnen, die aus dem letzt gefundenen Resultate folgt: Es sei aa' (Fig. 5) die reelle Axe, f und f' die Brennpuncte einer zu zeichnenden Hyperbel. Wir legen durch die Brennpuncte einen beliebigen Kreis K_2, dieser wird von der imaginären Axe in den Diametralpuncten t und t' geschnitten, verbinden wir den Punct t mit f und ist m der Durchschnitt dieser Verbindungslinie mit der Scheiteltangente so trifft der mit dem Radius tm beschriebene Kreis den Kreis K_2 in den Puncten n und n', welche der gesuchten Hyperbel angehören. Die Tangenten der gefundenen Puncte gehen durch den Diametralpunct t'. Wiederholen wir dieses Verfahren in Bezug auf den Punct t' so bekommen wir zwei weitere Puncte der Hyperbel, und ihre Tangenten gehen wieder durch den Diametralpunct t hindurch. Durch eine einfache Construction finden wir daher immer vier Puncte nebst deren Tangenten, also acht Bestimmungsstücke der gesuchten Hyperbel.

Wir wollen nnn noch untersuchen, was der geometrische Ort aller Endpuncte h der zu aa' parallelen Durchmesser derjenigen Kreise ist, welche die Hyperbel H doppelt berühren. Ziehen wir zu diesem Zwecke sh parallel zu aa' so verhält sich, da $sv = sh$ ist:

$$sh:sf = oa:of;$$

es ist aber

$$sf^2 = of^2 + os^2$$

und für

$$sh = x$$

$$os = y$$

folgt:

$$x^2 : y^2 + of^2 = oa^2 : of^2$$

und daraus

$$y = \pm \frac{of}{oa} \sqrt{x^2 - \overline{oa}^2}; \quad \ldots\ldots\ldots \alpha)$$

das ist aber die Gleichung einer Hyperbel H' welche oa zur reellen und of zur imaginären Halbaxe hat.

Durch Umkehrung des sich aus der letztgefundenen Gleichung ergebenden Resultates gelangen wir zu folgendem intressanten Satze: „Beschreibt man über den zur reellen Axe einer Hyperbel H' parallelen Sehnen als Durchmesser-Kreise so ist deren Einhüllende ein Kegelschnitt K, der die reelle Axe von H' zu seiner Hauptaxe hat, und

---

1) Diese Construction so wie auch die ganze hier für die Hyperbel durchgeführte Betrachtung gilt auch für die Ellipse.

dessen Brennpuncte man erhält, wenn man die imaginäre Halbaxe der Hyperbel H' auf deren reelle Axe überträgt." Der resultirende Kegelschnitt K ist daher eine Hyperbel wenn die imaginäre Axe b der Hyperbel H' grösser als deren reelle Axe a ist; er fällt mit den reellen Scheiteln der Hyperbel H' zusammen [1]), wenn $a = b$, d. h. wenn H' eine gleichseitige Hyperbel ist; er ist schliesslich eine Ellipse, wenn a grösser ist als b.

Auch aus der Gleichung α) folgt eine einfache Hyperbelconstruction. Es sei (Fig. 6) aa' die reelle, bb' die imaginäre Axe einer zu zeichnenden Hyperbel. Man übertrage ob nach $o\beta$, verbinde einen beliebigen Punct n der imaginären Axe mit β; diese Gerade $n\beta$ trifft die in a errichtete Scheiteltangente in u, und der mit dem Radius nu beschriebene Kreis schneidet die durch n parallel zu aa' gezogene Gerade in den Puncten q q', welche der gesuchten Hyperbel angehören.

9) **Aufgabe.** Es sind (Figur 7 und 7^a) gegeben zwei Puncte f und f' und ein Kreis K dessen Mittelpunct auf der im Halbierungspuncte von ff' errichteten Normalen liegt; es soll der Kegelschnitt gezeichnet werden, welcher ff' zu Brennpuncten hat und vom Kreise K doppelt berührt wird.

Wir verbinden die Brennpuncte f und f' mit dem Mittelpuncte o des Kreises K: diese Verbindungslinien schneiden K in s und s', und die von diesen Puncten zu ff' gezogenen Normalen sa und $s'a'$ sind die Scheiteltangenten, daher aa' die Hauptaxe des gesuchten Kegelschnittes. Die Berührungspuncte des Kreises K mit dem gesuchten Kegelschnitte erhalten wir in den zwei Schnittpuncten des durch ff' und o gehenden Kreises mit K. In Fig. 7 ist der gesuchte Kegelschnitt eine Hyperbel, welche von K in den Puncten p und p' berührt wird. In Fig. 7^a ist er eine Ellipse, welche von K in zwei imaginären Puncten berührt wird.

Dass man auch umgekehrt aus der reellen [2]) Axe aa', und dem doppelt berührenden Kreise K die Brennpuncte, oder aus den Brennpuncten und der reellen Axe den doppelt berührendon Kreis von gegebenem Mittelpuncte, construiren kann, braucht wohl kaum besonders erwähnt zu werden.

---

1) Als Central-Projection des einfachen Hyperboloides können daher auch zwei Puncte auftreten?

2) Bei der Ellipse beziehungsweise grossen Axe.

Hierdurch haben wir die Grundlagen gewonnen, auf welche sich unsere Constructionen der Central- und Parallel-Projection von Flächen zweiten Grades stützen, wenn eine Kreisschnittebene als Bildebene angenommen wird. Bei den nun folgenden Constructionen wird Alles eben angeführte zur Anwendung gelangen, da so wohl die Contour als auch die Schlagschattengrenze, jederzeit aus der Bedingung gezeichnet wird, dass sie entweder zwei bestimmte Puncte zu Brennpuncten, oder eine begrenzte Gerade zu einer Axe habe und einen gegebenen Kreis (welcher die Projection eines beliebigen Parallelkreises der Fläche ist) doppelt berühre. Zu diesen Bestimmungsstücken werden wir überall bloss mit Hilfe der aliquoten Augdistanz gelangen, und werden es nie nöthig haben, hierbei andere Kegelschnitte als bloss Kreise zu benutzen, da jede Fläche nur durch die Axen [1]) desjenigen Kegelschnittes bestimmt erscheint, durch dessen Rotation sie eben entsteht.

Bei denjenigen Flächen welche einen Mittelpunct haben wird derselde immer in der Tafel liegend angenommen, was bekanntlich die Allgemeinheit nicht im geringsten beeinträchtigt.

Die Kugel.

Der um c (Figur 8) als Mittelpunct mit dem Radius cs beschriebene Kreis K sei ein in der Bildebene liegender grösster Kreis einer Kugel, deren Central-Projection gezeichnet werden soll, wenn A der Hauptpunct, und durch $A\frac{C}{3}$ die $\frac{1}{3}$Distanz gegeben ist.

Da der zur Bildebene senkrechte Kugeldurchmesser, mit jener, durch ihn und das Projectionscentrum C gehenden Ebene in die Tafel umgelegt mit dem zu cA senkrechten Durchmesser ss' des Kreises K zusammenfällt, so erhalten wir die Brennpuncte der Contourcurve, indem wir die Radien os und os' in drei gleiche

---

1) Bei den von Herrn Prof. R. Niemtschik zu demselben Zwecke gelieferten Constructionen, (siehe: Directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen etc. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. mathem.-naturw. Cl. LII. Bd., II. Abth., 1865, Fig. 26, 27, 28) wird immer ein Meridian der bezüglichen Fläche gezeichnet vorausgesetzt, obwohl sie mit Benutzung der ganzen Distanz durchgeführt sind.

Theile theilen und die dem Puncte c nächstliegenden Theilpuncte von $\frac{C}{3}$ aus nach f und f' projiciren[1]).

Wenn wir nun den Umstand hervorheben, dass die Contourcurve vom Kreise K doppelt berührt wird, so kann aus dieser Bedingung ihre kleine Axe construirt werden.

Wir finden dieselbe durch folgende, wenn auch nicht einfachste so doch recht genaue Construction. Wir beschreiben über ff' als Durchmesser einen Kreis, dieser wird vom Radius cs in σ geschnitten; ziehen wir weiter durch den Schnittpunct τ der Geraden $f's$ mit der im Halbierungspuncte o von ff' errichteten Normalen eine Parallele zu $f'\sigma$, so schneidet diese ff' im Puncte γ so, dass $o\gamma$ der gesuchten halben kleinen Axe gleich ist. In der That ist $o\gamma$ gleich der zweiten Axe einer Ellipse E', welche ff' zu einer Axe hat und durch die Puncte s, s' geht. Denn bezeichnen wir für diese Ellipse E' die halbe Axe of' mit β die gesuchte zweite mit α, so gilt die Proportion:

$$c\sigma : cs = \beta : \alpha;$$

da sich aber auch

$$of' : o\gamma = c\sigma : cs$$

verhält, so folgt

$$of' : o\gamma = \beta : \alpha,$$

daher

$$of' = \beta,$$

w. z. b. w.

Durch die Brennpuncte und die kleine Axe ist nun die Contour-Ellipse vollkommen bestimmt.

Haben wir die Brennpuncte und den Mittelpunct der Contour-Curve gefunden, so kann auch deren grosse Axe wie folgt construirt werden: Schneidet die Polare des Punctes A (in Bezug auf den Kreis K) die Gerade oA in π, so ist die von o an den über $A\pi$ als Durchmesser beschriebenen Kreis gezogene Tangente ot der Länge nach der grossen Axe von E gleich. Diese und

---

1) Man könnte auch die Länge cA in drei gleiche Theile theilen, in dem dem Puncte c nächstliegenden Theilpuncte 1 eine Senkrechte errichten, auf diese die Länge $1\frac{C'}{3} = A\frac{C}{3}$ abtragen, und die Puncte s s' von $\frac{C'}{3}$ nach f und f' projiciren.

die vorangehende Construction gelten allgemein, sie sind von der Lage des Punctes A (in Bezug auf K) unabhängig; wenn jedoch die Polare den Kreis K in zwei reellen Puncten schneidet, das heist wenn sich von A an K zwei reelle Tangenten T und T' ziehen lassen, so kann die grosse Axe der Contour-Curve auch auf folgende Art gefunden werden:

1) Ist u Fusspunct der von f' auf die Tangente T' gezogenen Normalen, so ist ou der grossen Axe gleich.

2) Wir verbinden den Berührungspunct p' mit f' und mit c, verlängern $p'c$ bis die in o errichtete Normale in n geschnitten wird, fällen von n eine Senkrechte nm auf $p'f'$, so ist mp' der grossen Axe gleich.

3) Wird an die Verbindungslinie der Puncte n und f' die Länge $nv = np'$ von n aus abgetragen, so ist die von v auf ff' gefällte Normale die Scheiteltangente der Ellipse E.

Wir wollen nun die schiefe Projection der Kugel auf eine Ebene Σ construiren, welche der Tafel parallel ist, und die Kugel in dem hinter der Bildebene liegenden Endpunct des senkrechten Durchmessers berührt, wenn durch $\frac{V}{3}$ der Fluchtpunct der Lichtstrahlen bestimmt ist. Die Aufgabe kann auch so aufgefasst werden, dass wir die schiefe Projection der Kugel auf die Bildebene selbst construiren, müssen dabei jedoch den Radius der Kugelfläche nach dem der Ebene Σ zukommenden Verjüngungsmassstab verkürzen. Diesen verjüngten Radius bekommen wir in der Länge $f(c)$, die auf der in f parallel zu $A\frac{C}{3}$ gezogenen Geraden von $s'A$ in (c) abgeschnitten wird. Ziehen wir weiter durch f eine Parallele zu $A\frac{V}{3}$ und durch (c) eine Parallele zu $\frac{C_1}{3}\frac{V}{3}$, so schneiden sich diese beiden Geraden im Puncte μ, welcher die schiefe Projection des Kugelmittelpunctes auf der Bildebene, daher auch Mittelpunct der schiefen Projection selbst ist. Da uns f einen Brennpunct der elliptischen Schlagschatten-Curve liefert, und die kleine Axe der Ellipse dem Radius der Kugel, daher der Geraden $f(c)$ gleich ist, so ist dieselbe vollkommen bestimmt.

Die centrale und schiefe Projection eines Rotations-Ellipsoides, des abgeplatteten so wohl wie des verlängerten, wird auf dieselbe

eise wie bei der Kugel construirt, und da die bezüglichen Con-
·uctionen fast gar nicht verschieden sind, so gehen wir gleich
m Paraboloide über.

Das Paraboloid.

Durch den Punct s (Figur 9) als Scheitel, sc als Axe,
d xx' als senkrechte Sehne, ist eine (in der Bildebene umge-
gte) Parabel bestimmt; das durch die Rotation dieser Parabel
ıtstandene Paraboloid soll central und schief projicirt werden,
enn A der Hauptpunct $A\frac{C}{3}$ die $\frac{1}{3}$ Distanz, und durch $\frac{V}{3}$ der
luchtpunct der Lichtstrahlen bestimmt ist.

Den mit dem Radius cx beschriebenen Parallelkreis K wollen
ir als Basis der Fläche betrachten.

Diese Fläche wird bekanntlich von der unendlich weiten Kreis-
schnittebene berührt, und da der Hauptpunct die Central-Projection
dieses unendlich weiten Nabelpunctes ist, so liefert uns der Punct
A einen Brennpunct der Contourcurve. Den zweiten Brennpunct
erhalten wir in der Central-Projection des Scheitels s, welche
dadurch construirt wird, dass wir sc in 3 gleiche Theile theilen
und den dem Puncte c nächstliegenden Theilpunct 2 von $\frac{C}{3}$ nach
f projiciren.

Wird die im Halbierungspuncte o der Strecke fA errichtete
Normale vom Endpuncte d des zu fA senkrechten Kreisdurch-
messers mit der Länge of in n geschnitten, so trifft die Gerade
dn die Gerade fA im Puncte h, und es ist dh der kleinen halben
Axe der elliptischen Contourcurve gleich. Will man wie dies in
unserer Figur geschah bloss den vom Kreise K begränzten Theil
der Fläche projiciren, so ist es erforderlich die beiden Berüh-
rungspuncte des Kreises K mit der Contour zu finden.

Projiciren wir zu diesem Zwecke den Punct 1 ($s1 = \frac{1}{3}sc$) von
$\frac{?}{}$ nach v, so schneidet der über vc als Durchmesser beschrie-
ene Kreis den Kreis K in den zwei gesuchten Puncten [1]).

---

1) Es sind $v\ f\ c$ und A vier harmonische Puncte als Projectionen einer
·monischen Punctreihe 1, 2, c, ∞.

Weil der Punct v ausserhalb unserer Figurgränze fällt, so ziehen wir durch den Punct 2 eine Parallele zu $\frac{C}{3}$ 1, um im Schnittpuncte m derselben mit cA den Mittelpunct des gesuchten Kreises zu erhalten.

Um die schiefe Projection der Fläche auf der Ebene des Kreises K zu construiren, ist nur nöthig den Scheitel s nach φ dem Lichtstrahl parallel auf die Ebene des Kreises K zu projiciren, weil die gesuchte parabolische Schlagschattencurve P mit einer zweiten Parabel P', die φ zum Scheitel, $c\varphi$ zur Axe hat, und durch die Endpuncte des zu $c\varphi$ senkrechten Kreisdurchmessers geht, gleichen Parameter besitzt. Wir kommen jedoch noch schneller zum Ziele, wenn wir berücksichtigen, dass der mit dem Radius $c\varphi$ beschriebene Kreis den Kreis K in den Puncten q und q' schneidet, in welchen K die schiefe Projection berührt. Die Gerade qq' schneidet φc in u und es ist cu gleich dem halben Parameter der Parabel P.

Das einfache Hyperboloid.

Durch den Kreis K (Figur 10) als Kehlkreis, und die imaginäre Axe yy' (letztere mit der durch sie und das Projections-Centrum gehenden Ebene in die Tafel umgelegt) ist ein einfaches Hyperboloid bestimmt, man soll dasselbe central projiciren, wenn A der Hauptpunct, und $A\frac{C}{2}$ die halbe Distanz ist.

Denken wir uns durch die imaginäre Axe und durch das Projections-Centrum eine Ebene gelegt, und den zu dieser Ebene senkrechten Meridian central projicirt, so erhalten wir als Projection eine Hyperbel H' von der wir dem Vorangehenden zufolge wissen, dass sie die reelle Axe mit der Contour-Curve gemein hat, und dass deren imaginäre Axe der Excentricität dieser Contour-Curve gleich ist. Aus den Bestimmungsstücken der Hyperbel H' kann also die gesuchte Centralprojection abgeleitet werden.

Wenn wir jedoch den Umstand beachten, dass sich von A an K zwei reelle oder imaginäre Tangenten ziehen lassen, welche K und daher auch die Contour-Curve in Puncten, deren Normalen durch c gehen, berühren, und dass die Nebenaxe der Contour-Curve mit der Geraden Ac zusammenfällt, so sehen wir dass der über cA als Durchmesser beschriebene Kreis ein geometrischer Ort für die Brennpuncte des Contour-Kegelschnittes ist, und dass letzterer schon dann vollkommen bestimmt sein wird, wenn wir seinen Mittelpunct construiren.

Der Mittelpunct der Contour-Curve einer jeden Fläche zweiten Grades, ist aber bekanntlich die Centralprojection des Poles der Fläche im Bezug auf die durch das Projections-Centrum parallel zur Tafel gelegten Ebene [1]) als Polarebene, und wir finden denselben für unsere Fläche direct durch folgende Betrachtung. Construirt man in einem der beiden Puncte in welchen ein beliebiger Meridian der Fläche von der Verschwindungs-Ebene geschnitten wird, die Tangente dieses Meridians, so schneidet diese die Rotationsaxe im Puncte S, welcher der Pol der Fläche in Bezug auf die Verschwindungs-Ebene als Polarebene ist. Ist c der Mittelpunct der Fläche und d der Durchschnitt der Rotationsaxe mit der Verschwindungs-Ebene, so gilt bekanntlich für die Tangente die Relation $-dc.cS = b^2$, wenn b die halbe imaginäre Axe bedeutet; übertragen wir daher cS auf die entgegengesetzte Seite der Axe nach cS', so ist: $+dc.cS' = b^2$ d. h.: S', d und die beiden Endpuncte der imaginären Axe sind vier harmonische Puncte; da nun die Centralprojection von d unendlich weit fällt, so muss die Centralprojection σ von S' die Strecke zwischen den Centralprojectionen der Endpuncte der imaginären Axe halbieren, und umgekehrt.

Die Puncte S, c, S' und der unendlich weite Punct der Rotationsaxe bilden ebenfalls eine harmonische Punctreihe, dasselbe gilt daher auch von deren Centralprojection, d. h.: σ, c, A und der gesuchte Mittelpunct sind vier harmonische Puncte. Daraus folgt für die Brennpuncte und den Mittelpunct der Contour-Curve folgende Construction: Wir projiciren die Endpuncte y, y' der imaginären Axe central nach ω und ω', ist σ der Halbierungspunct dieser Strecke, und g der Halbierungspunct der Strecke Ac, so erhalten wir die Brennpuncte f, f' in den zwei Schnittpuncten der über cA und σg als Durchmesser beschriebenen Kreise. Denn es ist ff' die Polare des Punctes σ in Bezug auf den Kreis welcher cA zum Durchmesser hat, und schneidet daher den letztgenannten Durchmesser im Puncte o, dem Mittelpuncte des gesuchten Contour-Kegelschnittes.

Die Contour-Curve wird vom Kehlkreise K doppelt berührt, wir finden daher deren grosse Axe (weil die Brennpuncte ff' innerhalb K liegen, so muss die Contour-Curve eine Ellipse sein) wenn wir vom Schnittpuncte e der Geraden cf' mit dem Kreise K eine Senkrechte auf ff' fällen; diese ist eine Scheiteltangente der Contour-Ellipse. Diese Construction ist von der Lage des Hauptpunctes unabhängig. Lassen sich jedoch von A an K zwei reelle Tangenten ziehen, so können diese und ihre Berührungs-

---

1) Ich nenne diese Ebene nach Prof. Fiedler Verschwindungs-Ebene.

puncte zur Construction der Hauptaxe der Contour-Curve dienen, wie dies bei der Kugelfläche angegeben wurde.

Wollen wir, wie es gewöhnlich der Fall ist, die Fläche durch zwei vom Mittelpuncte gleich weit entfernte Parallelkreise begränzen, so kann deren Projection unmittelbar construirt werden. Denn ist m die Projection des in dem bestimmten Abstande von c befindlichen Mittelpunctes des einen Kreises, so verlangt die Aufgabe bloss die Construction eines Kreises unter der Bedingung, dass er m zum Mittelpuncte habe und von der Contour-Ellipse doppelt berührt werde, was nur eine Umkehrung der in Figur 7 und 7^a construirten Aufgabe ist. Die Gerade mf wird von der Scheiteltangente in n geschnitten und es ist mn gleich dem Radius des gesuchten Kreises K_1. Um die Projection K_2 des zweiten mit K_1 in Bezug zu c im Raume symmetrisch liegenden Kreises zu finden, ziehen wir den zu mA senkrechten Durchmesser des Kreises K_1, verbinden seinen einen Endpunct s mit A und den zweiten t mit c, die Geraden sA und ct schneiden sich in s' und die von diesem Puncte auf Am gefällte Normale $s'm'$ ist der Radius und m' der Mittelpunct des gesuchten Kreises K_2. Als Probe wird man finden, dass der Schnittpunct des Kreises K_2 mit der Scheiteltangente in u, weiter die Puncte f und m' in einer Geraden liegen.

Soll die schiefe Projection der Fläche auf die Ebene des Kreises K_2 construirt werden, wenn durch $\frac{V}{2}$ der Verschwindungspunct der Lichtstrahlen bestimmt ist, so projiciren wir den Mittelpunct c parallel zum Lichtstrahl auf die Ebene des Kreises K_2 nach μ, indem wir den Punct c auf die in m' errichtete Normale von $\frac{C}{2}$ nach γ projiciren, $m'\gamma = \gamma(c)$ machen, und die durch m' parallel zu $A\frac{V}{2}$ gezogene Gerade mit der durch (c) parallel zu $\frac{C}{2}\ \frac{V}{2}$ geführten Geraden durchschneiden. Die reelle Axe der hyperbolischen Schlagschattencurve ist dem Durchmesser des Kehlkreises gleich, wenn dieser nach dem der Ebene des Kreises K_2 entsprechenden Verjüngungsmassstabe verkürzt wird; man findet sie ebenso wie die kleine Axe bei der Schlagschattencurve der Kugel. Aus dem die hyberbolische Schlagschattencurve doppelt berührenden Kreise K_2 und der reellen Axe $\alpha\alpha'$ können die Brennpuncte φ und φ' construirt werden, wie dies in Fig. 7 gezeigt wurde (für den Brennpunct φ ist die Construction durchgeführt.).

Das zweifache Hyperboloid.

In (Figur 11) ist durch xx' als reelle, yy' als imaginäre xe eine (in die Tafel umgelegte) Hyperbel bestimmt; das durch ie Rotation dieser Hyperbel entstandene zweifache Hyperboloid st central zu projiciren, wenn A (Fig. 10) der Hauptpunct, $A\frac{C}{2}$ ie umgelegte halbe Distanz ist.

Bei dieser Fläche geben uns wieder die Perspectiven der Endpuncte des zur Tafel senkrechten reellen Durchmessers direct lie Brennpuncte der Contour.

Wenn von der Fläche ausser den beiden Nabelpuncten noch ein beliebiger Parallelkreis projicirt wäre, so könnte daraus auf die uns bekannte Art die imaginäre Axe der Contour construirt werden.

Uebertragen wir jedoch cy' nach $c\omega$ und denken uns ω mit f verbunden, so schneidet diese Verbindungslinie die verlängerte Gerade $A\frac{C}{2}$ in einem bestimmten Puncte (den wir uns mit z bezeichnet denken), so dass Az gleich ist dem Radius der Central-Projection des unendlich weiten Parallelkreises des Hyperboloides [1]). Der Punct z liegt demnach auf derjenigen Hyperbel H', welche mit der Contour-Curve die imaginäre Axe gemein hat, und von der ff' die reelle Axe ist. Da aber f, ω, der Schnittpunct der in f' errichteten Normalen (mit $f\omega$) und der Fluchtpunct z vier harmonische Puncte sind, so folgt daraus direct (siehe Seite), dass die durch den Punct ω und die Gerade ff' als eine Axe bestimmte Ellipse die zweite Axe mit der Contour-Hyperbel gemein hat.

Diese Axe kann einfach construirt werden; die in o errichtete Normale wird von ω aus mit der Länge of in n geschnitten und die Gerade ωn verlängert bis sie ff' in u schneidet, ωu ist dann der imaginären Axe der gesuchten Contour-Curve gleich.

Wenn wir auch diese Fläche durch zwei vom Mittelpuncte c

---

1) Das Original der Geraden $f\omega$ ist einer Erzeugenden des Asymptotenkegels parallel, und hat die Gerade xx' zur orthogonalen Projection, daher den Punct z zum Fluchtpunct; der mit dem Radius Az beschriebene Kreis ist daher lie Fluchtlinie des Asymptotenkegels etc.

gleichweit entfernte Parallelkreise begränzen wollen, so können deren Perspectiven $K_1 K_2$ einfach construirt werden. Ist m die Projection des Mittelpunctes eines dieser beiden Kreise, so verlangt die Aufgabe die Construction eines Kreises K_1, der den Punct m zum Mittelpunct hat und von der Contour-Hyperbel doppelt berührt wird. Da die Endpuncte aller zu ff' senkrechten Durchmesser der die Contourcurve doppelt berührenden Kreise in der Hyperbel II' liegen, so finden wir den Radius des Kreises K_1 durch folgende Construction, deren Richtigkeit aus der in Fig. 6 gegebenen Hyperbel-Construction resultirt. Man übertrage ob nach $o\gamma$, und durchschneide die imaginäre Axe von f aus mit der Länge om in g, ziehe durch γ eine Parallele zu fg; diese schneidet bb' in τ und es ist $o\tau = mt$ gleich dem Radius des gesuchten Kreises K_1. Das Bild K_2 des symmetrisch liegenden Kreises wird ebenso wie K_1 oder auch direct gefunden, wie dies beim einfachen Hyperboloide angegeben wurde.

Soll schliesslich die schiefe Projection der Fläche auf die Ebene des Kreises K_2 construirt werden, so brauchen wir bloss den Mittelpunct der Fläche dem Lichtstrahl parallel auf die Ebene des Kreises K_2 nach μ zu projiciren, und aus der imaginären Axe $\beta\beta'$ (die der in Bezug auf die Ebene des Kreises K_2 verkürzten imaginären Axe yy' gleich ist) und der Bedingung, dass die schiefe Projection vom Kreise K_2 doppelt berührt wird, die Brennpuncte der Schlagschatten-Curve zu construiren, da uns ja bekannt ist, dass die reelle Axe jener Hyperbel die $\beta\beta'$ zur imaginären Axe hat, und durch den Endpunct v des zu $m'\mu$ senkrechten Kreishalbmessers hindurch geht, der Excentricität der gesuchten Schlagschatten-Curve gleich ist. Die hieraus resultirende Construction der Brennpuncte ist in Fig. 11 durchgeführt.

XXI.

Ueber die Gleichung des um ein Dreieck beschriebenen Kreises und über die Gleichungen der vier Berührungskreise des Dreiecks in Dreilinien-Coordinaten.

Von

dem Herausgeber.

(Figuren s. Taf. X.)

---

§. 1.

In meiner Abhandlung: **Das System der Dreilinien-Coordinaten in allgemeiner analytischer Entwickelung** in Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. und in mehreren späteren Abhandlungen habe ich bei der Bestimmung und Unterscheidung der positiven und negativen trimetrischen Coordinaten ganz absichtlich grösster Allgemeinheit wegen einen Weg eingeschlagen, welcher ganz der allgemeinen Methode entspricht, die ich bei der Unterscheidung der von gegebenen Punkten auf eine beliebige einzelne gerade Linie gefällten, als positiv oder als negativ zu betrachtenden Perpendikel in Anwendung zu bringen pflege, indem ich diese Methode in dem in Rede stehenden allgemeinen Falle bei Weitem für die beste, zweckmässigste und fruchtbarste halte. Diese Methode besteht (m. s. die obige Abhandlung §. 3. S. 397) in Folgendem:

Jeder in einer gewissen Ebene liegenden geraden Linie werden zwei einander entgegengesetzte Richtungen beigelegt, die man sich von einem beliebigen Punkte in der geraden Linie

ausgehend zu denken hat, und von diesen beiden Richtungen wird die eine die positive Richtung, die andere die negative Richtung genannt. Ferner werden auch die beiden Richtungen, nach denen die Ebene, in welcher die gegebene gerade Linie liegt, um einen beliebigen Punkt in ihr sich drehen lässt, als eine positive und eine negative Drehungsrichtung von einander unterschieden. Ist nun von einem beliebigen Punkte der Ebene auf die gegebene in ihr liegende Gerade ein Perpendikel gefällt, so wird dieses Perpendikel als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem eine nach der positiven Richtung der Geraden in derselben wirkend gedachte Kraft die Ebene um den in Rede stehenden Punkt nach der positiven oder negativen Drehungsrichtung hin zu drehen strebt.

Eine zweckmässigere und fruchtbarere Methode als diese in dem Falle einzelner gerader Linien kenne ich nicht.

Diese Methode habe ich in consequenter Weise auch bei dem Dreilinien-Coordinatensysteme ganz absichtlich in allen meinen im Obigen erwähnten Abhandlungen durchgängig in Anwendung gebracht.

Nach meiner vollkommenen Ueberzeugung empfiehlt sich diese Methode sehr durch ihre grosse Allgemeinheit, ist in verschiedenen Fällen — u. A. bei der Vergleichung trimetrischer und cartesischer Coordinaten mit einander, in der Mechanik u. s. w. — ganz besonders bequem, und schliesst sich, wie schon gesagt, ganz der Methode an, welche man bei der Unterscheidung der positiven und negativen, auf eine einzelne gerade Linie gefällten Perpendikel nur allein in der bequemsten Weise anwenden kann, weshalb dieselbe von mir in der genannten Abhandlung auch durchgängig ganz absichtlich in Anwendung gebracht worden ist, um dieselbe in künftigen Fällen, wo ihre Anwendung vorzugsweise Bequemlichkeit darbieten dürfte, gebrauchen zu können.

Bei dem Dreilinien-Coordinatensysteme, wo immer ein Dreieck als ein allseitig begränzter Raum von bestimmter Flächenausdehnung zu Grunde gelegt wird, kann man aber — wie dies in der That bei Untersuchungen dieser Art jetzt gewöhnlich geschieht und üblich ist — auch eine andere Methode in Anwendung bringen, welche als ein besonderer Fall der vorher charakterisirten allgemeinen Methode zu betrachten ist, was in der Abhandlung Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. zwar, als sich leicht von selbst ergebend, nicht besonders bemerkt und hervorgehoben worden ist, aber z. B. aus §. 15. S. 443 sich ohne Weiteres ersehen lässt.

Ist nämlich jetzt ABC in Fig. I. das dem Dreilinien-Coordinatensysteme zu Grunde gelegte Dreieck, so kann man die durch Pfeilspitzen bezeichneten Richtungen der als von A, B, C ausgehend gedachten Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC als die positiven Richtungen dieser Seiten oder Axen, und als die positive Drehungsrichtung der Dreiecksebene die in dieser Folge von A durch B und C gehende, in der Figur gleichfalls durch einen Pfeil angedeutete Richtung annehmen. Dann sind die in meinen früheren Abhandlungen überall durch w_{01}, w_{12}, w_{20} bezeichneten, 180^0 nicht übersteigenden, aber gehörig als positiv oder negativ — (hier sämmtlich als positiv) — zu betrachtenden Winkel die in der Figur gleichfalls durch in sie beschriebene Kreisbogen hervorgehobenen Winkel, und es ist also, wie aus der Figur ohne Weiteres erhellet:

$$w_{01} = 180^0 - B, \quad w_{12} = 180^0 - C, \quad w_{20} = 180^0 - A.$$

Die Seiten $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ — in den früheren Abhandlungen durch s_1, s_2, s_0 bezeichnet — sind sämmtlich als positiv zu betrachten, weil sie sämmtlich von A, B, C aus in den positiven Richtungen der Seiten oder Axen liegen.

Sind nun von einem beliebigen Punkte der Dreiecksebene Perpendikel auf die Seiten des Dreiecks gefällt, und man denkt sich in den Seiten nach ihren positiven Richtungen hin Kräfte wirkend, so werden diese Kräfte offenbar die Dreiecksebene um den in Rede stehenden Punkt nach der positiven oder negativen Drehungsrichtung hin zu drehen streben, jenachdem von den betreffenden Seiten aus die darauf gefällten Perpendikel nach dem inneren oder nach dem äusseren Raume des Dreiecks ABC hin liegen. Es werden also die trimetrischen Coordinaten des in Rede stehenden Punktes positiv oder negativ sein, jenachdem sie von den Seiten des Dreiecks ABC, auf denen sie senkrecht stehen, aus nach dem inneren oder äusseren Raume des Dreiecks ABC hin liegen.

Wenn man also nach der üblichen — als ein besonderer Fall unserer obigen allgemeinen Methode zu betrachtenden — Methode die trimetrischen Coordinaten eines Punktes in der Dreiecksebene als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem sie von den Seiten des Dreiecks ABC, auf denen sie senkrecht stehen, aus nach dem inneren oder äusseren Raume des Dreiecks hin liegen, so hat man in allen unseren früheren der allgemeinen Methode, von welcher die übliche Methode als ein besonderer Fall zu betrachten ist, entsprechenden Formeln durchgängig und überall zu setzen:

für

$$w_{01}, \quad w_{12}, \quad w_{20}$$

beziehungsweise:

$$180^0 - B, \quad 180^0 - C, \quad 180^0 - A;$$

für

$$\tfrac{1}{2}w_{01}, \quad \tfrac{1}{2}w_{12}, \quad \tfrac{1}{2}w_{20}$$

beziehungsweise:

$$90^0 - \tfrac{1}{2}B, \quad 90^0 - \tfrac{1}{2}C, \quad 90^0 - \tfrac{1}{2}A;$$

also für

$$\sin w_{01}, \quad \sin w_{12}, \quad \sin w_{20};$$

$$\cos w_{01}, \quad \cos w_{12}, \quad \cos w_{20}$$

beziehungsweise:

$$\sin B, \quad \sin C, \quad \sin A;$$

$$-\cos B, \quad -\cos C, \quad -\cos A;$$

und für

$$\sin \tfrac{1}{2}w_{01}, \quad \sin \tfrac{1}{2}w_{12}, \quad \sin \tfrac{1}{2}w_{20};$$

$$\cos \tfrac{1}{2}w_{0}, \quad \cos \tfrac{1}{2}w_{12}, \quad \cos \tfrac{1}{2}w_{20}$$

beziehungsweise:

$$\cos \tfrac{1}{2}B, \quad \cos \tfrac{1}{2}C, \quad \cos \tfrac{1}{2}A;$$

$$\sin \tfrac{1}{2}B, \quad \sin \tfrac{1}{2}C, \quad \sin \tfrac{1}{2}A.$$

Für s_0, s_1, s_2 würde beziehungsweise b, c, a zu setzen sein.

Mittelst dieser einfachen, in ihrer Anwendung ganz mechanischen Regeln kann man also von den der allgemeinen Methode entsprechenden Formeln ganz leicht und unmittelbar zu den der jetzt meistens üblichen Methode, welche ein besonderer Fall von jener ist, entsprechenden Formeln übergehen, wie wir dies nun im Folgenden an den in der Ueberschrift genannten Kreisen zeigen wollen.

Rücksichtlich der in der Abhandlung Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. durch J bezeichneten Grösse bemerken wir, dass

$$J = \frac{4\Delta^2}{s_0 s_1 s_2} = \frac{4\Delta^2}{abc} = \frac{16R^4 \sin A^2 \sin B^2 \sin C^2}{8R^3 \sin A \sin B \sin C},$$

also:

$$J = 2R \sin A \sin B \sin C$$

ist, wo R den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises bezeichnet.

Zwischen den trimetrischen Coordinaten p_0, p_1, p_2 findet immer die Gleichung:

$$p_0 \sin C + p_1 \sin A + p_2 \sin B = J,$$

also die Gleichung:

$$p_0 \sin C + p_1 \sin A + p_2 \sin B = 2R \sin A \sin B \sin C,$$

oder die Gleichung:

$$\frac{p_0}{\sin A \sin B} + \frac{p_1}{\sin B \sin C} + \frac{p_2}{\sin C \sin A} = 2R$$

Statt.

§. 2.

Nach der Abhandlung: Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, insbesondere auch die allgemeine Gleichung des Kreises, in Dreilinien-Coordinaten oder in sogenannten trimetrischen Coordinaten. Thl. LI. Nr. XXVII. §. 3. S. 265. Nr. 13) ist in den dort gebrauchten Zeichen die allgemeine Gleichung des Kreises:

$$\begin{aligned}
&(\overline{\omega}_1{}^2 - 2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 \cos w_{12} + \overline{\omega}_2{}^2 - r^2 \sin w_{12}{}^2) p_0{}^2 \\
&+ (\overline{\omega}_2{}^2 - 2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0 \cos w_{20} + \overline{\omega}_0{}^2 - r^2 \sin w_{20}{}^2) p_1{}^2 \\
&+ (\overline{\omega}_0{}^2 - 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 \cos w_{01} + \overline{\omega}_1{}^2 - r^2 \sin w_{01}{}^2) p_2{}^2 \\
&- 2\{(\overline{\omega}_0 - \overline{\omega}_2 \cos w_{20})(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2 \cos w_{12}) - (\overline{\omega}_2{}^2 - r^2) \sin w_{12} \sin w_{20}\} p_0 p_1 \\
&- 2\{(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_0 \cos w_{01})(\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_0 \cos w_{20}) - (\overline{\omega}_0{}^2 - r^2) \sin w_{20} \sin w_{01}\} p_1 p_2 \\
&- 2\{(\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1 \cos w_{12})(\overline{\omega}_0 - \overline{\omega}_1 \cos w_{01}) - (\overline{\omega}_1{}^2 - r^2) \sin w_{01} \sin w_{12}\} p_2 p_0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Für den um das Dreieck ABC, welches wir selbst als Fundamentaldreieck annehmen, beschriebenen Kreis ist nach den aus der Abhandlung Thl. XXXVI. Nr. XVIII. bekannten Formeln in den dort überall gebrauchten Zeichen:

$$r = R;$$

$$\overline{\omega}_0 = R \cos C, \qquad \overline{\omega}_1 = R \cos A, \qquad \overline{\omega}_2 = R \cos B.$$

Also ist nach dem vorhergehenden Paragraphen und bekannten Formeln:

$$\begin{aligned}&\overline{\omega}_1{}^2-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+\overline{\omega}_2{}^2-r^2\sin w_{12}{}^2\\&=R^2(\cos A^2+2\cos A\cos B\cos C+\cos B^2-\sin C^2)\\&=R^2(\cos A^2+\cos B^2-\sin C^2+1-\cos A^2-\cos B^2-\cos C^2)=0,\end{aligned}$$

so dass also der Coefficient von $p_0{}^2$ verschwindet; und ebenso leicht zeigt man, dass auch die Coefficienten von $p_1{}^2$ und $p_2{}^2$ verschwinden.

Ferner ist:

$$\begin{aligned}&(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_2\cos w_{20})(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2\cos w_{12})-(\overline{\omega}_2{}^2-r^2)\sin w_{12}\sin w_{20}\\&=R^2\left\{\begin{matrix}(\cos C+\cos B\cos A)(\cos A+\cos B\cos C)\\-(\cos B^2-1)\sin C\sin A\end{matrix}\right\}\\&=R^2(\sin A\sin B^2\sin C+\sin A\sin B^2\sin C)\\&=2R^2\sin A\sin B^2\sin C,\end{aligned}$$

und eben so leicht wie diesen Coefficienten von $p_0\,p_1$ findet man, dass die Coefficienten von p_1p_2 und p_2p_0 beziehungsweise

$$2R^2\sin A\sin B\sin C^2 \text{ und } 2R^2\sin A^2\sin B\sin C$$

sind.

Also ist die Gleichung des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises in Dreilinien-Coordinaten:

$$p_0p_1\sin B+p_1p_2\sin C+p_2p_0\sin A=0.$$

Den Halbmesser R dieses Kreises kann man, wie allgemein bekannt, auf verschiedene Arten durch die verschiedenen Stücke des Dreiecks ausdrücken.

Die trimetrischen Coordinaten des Mittelpunkts des Kreises sind:

$$R\cos C,\qquad R\cos A,\qquad R\cos B;$$

nämlich die schon oben angegebenen Werthe von $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$.

Ist das Dreiech ABC gleichseitig, so ist $A=B=C$, also die Gleichung des um das Dreieck beschriebenen Kreises nach dem Obigen:

$$p_0p_1+p_1p_2+p_2p_0=0.$$

Weil $A=B=C=60^0$, also $\cos A=\cos B=\cos C=\sin 30^0=\frac{1}{2}$ ist, so sind die trimetrischen Coordinaten des Mittelpunkts des Kreises in diesem Falle sämmtlich $\frac{1}{2}R$.

Ist das Dreieck ABC gleichschenklig und etwa $BC=CA$, so ist $A=B$, also $C=180^0-2A$, folglich $\sin C=\sin 2A$

$=2\sin A\cos A$, folglich die Gleichung des um das Dreieck beschriebenen Kreises nach dem Obigen:

$$p_0p_1+2p_1p_2\cos A+p_2p_0=0,$$

oder:

$$p_0p_1+2p_1p_2\cos B+p_2p_0=0.$$

Weil

$$A=B=90^0-\tfrac{1}{2}C,\qquad \cos A=\cos B=\sin\tfrac{1}{2}C$$

ist, so ist die Gleichung auch:

$$p_0p_1+2p_1p_2\sin\tfrac{1}{2}C+p_2p_0=0$$

oder:

$$p_0=-\frac{2p_1p_2\sin\frac{1}{2}C}{p_1+p_2}.$$

Die Gleichung

$$p_0p_1\sin B+p_1p_2\sin C+p_2p_0\sin A=0$$

des um das beliebige Dreieck ABC beschriebenen Kreises lässt sich auch unter der Form

$$\frac{\sin C}{p_0}+\frac{\sin A}{p_1}+\frac{\sin B}{p_2}=0$$

schreiben.

§. 3.

Wenn r den Halbmesser des in das Dreieck ABC, welches auch jetzt als Fundamentaldreieck angenommen wird, beschriebenen Kreises bezeichnet, so hat man in der schon im vorhergehenden Paragraphen angewandten allgemeinen Gleichung des Kreises

$$\overline{\omega}_0=\overline{\omega}_1=\overline{\omega}_2=r$$

zu setzen, und ausserdem die aus §. 1. bekannten Substitutionen vorzunehmen.

Hiernach ist nun:

$$\begin{aligned}&\overline{\omega}_1{}^2-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+\overline{\omega}_2{}^2-r^2\sin w_{12}{}^2\\ =\;&r^2(1+2\cos C+1-\sin C^2)\\ =\;&r^2(1+2\cos C+\cos C^2)=r^2(1+\cos C)^2\\ =\;&4r^2\cos\tfrac{1}{2}C^4.\end{aligned}$$



Ferner ist:

$$(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_2\cos w_{20})(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2\cos w_{12})-(\overline{\omega}_2{}^2-r^2)\sin w_{12}\sin w_{20}$$
$$=r^2(1+\cos A)(1+\cos C)=4r^2\cos\tfrac{1}{2}A^2\cos\tfrac{1}{2}C^2.$$

Daher ist die Gleichung des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises:

$$p_0{}^2\cos\tfrac{1}{2}C^4+p_1{}^2\cos\tfrac{1}{2}A^4+p_2{}^2\cos\tfrac{1}{2}B^4$$
$$-2p_0p_1\cos\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}A^2-2p_1p_2\cos\tfrac{1}{2}A^2\cos\tfrac{1}{2}B^2-2p_2p_0\cos\tfrac{1}{2}B^2\cos\tfrac{1}{2}C^2$$
$$=0.$$

Bekanntlich ist, wenn wie früher R den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises bezeichnet:

$$r=4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C,$$

und dies sind auch die Coordinaten des Mittelpunkts des in das Dreieck beschriebenen Kreises.

Für jede drei Grössen x, y, z ist bekanntlich immer:

$$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$
$$=(x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2+2xy-z^2)(x^2+y^2-2xy-z^2)$$
$$=\{(x+y)^2-z^2\}\{(x-y)^2-z^2\}$$
$$=-(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z),$$

und die obige Gleichung des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, für dessen Peripherie überall p_0, p_1, p_2 positive Grössen sind, lässt sich also auch auf folgende Art ausdrücken:

$$(\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2})$$
$$\times(\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0})$$
$$\times(\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}-\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1})$$
$$\times(\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2})$$
$$=0,$$

woraus sich ergiebt, dass immer mindestens eine der vier Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=0,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}-\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0$$

Statt finden muss, worüber nun weiter zu entscheiden ist.

In Fig. 2. seien M_0, M_1, M_2 die Berührungspunkte des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises mit den Seiten AB, BC, CA und O sei der Mittelpunkt dieses Kreises. Verlängert man die Halbmesser M_0O, M_1O, M_2O über O hinaus bis zu ihren Durchschnittspunkten M_0', M_1', M_2' mit der Kreisperipherie, so theilen diese Punkte die Kreisbogen

$$M_1M_2, \quad M_2M_0, \quad M_0M_1$$

beziehungsweise in die beiden Theile:

$$M_1M_0', \quad M_2M_0'; \qquad M_2M_1', \quad M_0M_1'; \qquad M_0M_2', \quad M_1M_2'.$$

Zunächst wollen wir nun die Coordinaten der Berührungspunkte M_0, M_1, M_2 bestimmen.

Bezeichnen wir die Coordinaten von M_0 durch f_0, g_0, h_0; so ist $f_0 = 0$, und nach der obigen Gleichung des inneren Berührungskreises und der allgemein gültigen Gleichung:

$$p_0 \sin C + p_1 \sin A + p_2 \sin B = 2R \sin A \sin B \sin C$$

haben wir also zur Bestimmung von g_0 und h_0 die beiden Gleichungen:

$$g_0^2 \cos\tfrac{1}{2}A^4 + h_0^2 \cos\tfrac{1}{2}B^4 - 2g_0h_0 \cos\tfrac{1}{2}A^2 \cos\tfrac{1}{2}B^2 = 0,$$

$$g_0 \sin A + h_0 \sin B = 2R \sin A \sin B \sin C;$$

also:

$$(g_0 \cos\tfrac{1}{2}A^2 - h_0 \cos\tfrac{1}{2}B^2)^2 = 0,$$

$$g_0 \sin A + h_0 \sin B = 2R \sin A \sin B \sin C;$$

folglich:

$$g_0 \cos\tfrac{1}{2}A^2 - h_0 \cos\tfrac{1}{2}B^2 = 0,$$

$$g_0 \sin A + h_0 \sin B = 2R \sin A \sin B \sin C;$$

woraus man mittelst leichter Rechnung:

$$g_0 = 8R \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C \cos\tfrac{1}{2}B^2,$$

$$h_0 = 8R \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C \cos\tfrac{1}{2}A^2$$

findet.

Daher sind die Coordinaten von

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2$$

beziehungsweise:

$$0,\quad 8R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}B^2,\quad 8R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}A^2;$$

$$8R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}B^2,\quad 0,\quad 8R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C^2;$$

$$8R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}A^2,\quad 8R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C^2,\quad 0$$

oder nach dem Obigen:

$$0,\quad 2r\cos\tfrac{1}{2}B^2,\quad 2r\cos\tfrac{1}{2}A^2;$$

$$2r\cos\tfrac{1}{2}B^2,\quad 0,\quad 2r\cos\tfrac{1}{2}C^2;$$

$$2r\cos\tfrac{1}{2}A^2,\quad 2r\cos\tfrac{1}{2}C^2,\quad 0.$$

Die Coordinaten von

$$M_0',\quad M_1',\quad M_2'$$

sind, wie man durch eine einfache geometrische Betrachtung leicht findet, beziehungsweise:

$$2r,\quad 2r\sin\tfrac{1}{2}B^2,\quad 2r\sin\tfrac{1}{2}A^2;$$

$$2r\sin\tfrac{1}{2}B^2,\quad 2r,\quad 2r\sin\tfrac{1}{2}C^2;$$

$$2r\sin\tfrac{1}{2}A^2,\quad 2r\sin\tfrac{1}{2}C^2,\quad 2r.$$

Wenn in Fig. 3. MN den um O mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis in dem Punkte A berührt, und in dem Punkte B dieser Berührenden auf dieselbe ein den Kreis in den Punkten B' und B'' schneidendes Perpendikel errichtet ist; so ist, wenn wir $AB=x$ setzen, offenbar

$$B'B''=2\sqrt{r^2-x^2},$$

folglich:

$$BB'=r-\tfrac{1}{2}B'B''=r-\sqrt{r^2-x^2},$$

$$BB''=r+\tfrac{1}{2}B'B''=r+\sqrt{r^2-x^2}.$$

Wenn also x von 0 bis r stetig wächst, so wächst BB' fortwährend stetig von 0 bis r, und wenn dann ferner x von r bis 0 stetig abnimmt, so wächst BB'' fortwährend stetig von r bis $2r$.

Gehen wir nun zu der Betrachtung der vier Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}-\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0$$

über, so erhellet zuerst auf der Stelle, dass die erste dieser vier Gleichungen allgemein unstatthaft ist; denn im vorliegenden Falle sind $\cos\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}B$, $\cos\frac{1}{2}C$ positive nicht verschwindende Grössen, und sollte also die in Rede stehende Gleichung Statt finden können, so müssten die reellen positiven Grössen $\sqrt{p_0}$, $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, also auch die Grössen p_0, p_1, p_2, zugleich verschwinden, was hier offenbar niemals der Fall sein kann.

Betrachten wir nun den Bogen M_0M_1, welcher durch den Punkt M_2' in die beiden Bogen M_0M_2' und M_1M_2' getheilt wird, und nehmen wir an, dass $(p_0p_1p_2)$ ein Punkt in diesem Bogen M_0M_1 sei, so ergiebt sich aus dem Obigen unmittelbar Folgendes.

In dem ganzen Bogen M_0M_1 ist:

$$0 < p_0 < 2r\cos\tfrac{1}{2}B^2,$$

$$0 < p_1 < 2r\cos\tfrac{1}{2}B^2.$$

In dem Bogen M_0M_2' ist:

$$2r\cos\tfrac{1}{2}A^2 < p_2 < 2r.$$

In dem Bogen M_1M_2' ist:

$$2r\cos\tfrac{1}{2}C^2 < p_2 < 2r.$$

Die einzelnen besonderen Fälle, wo statt des Ungleichheitszeichens das Gleichheitszeichen zu setzen ist, haben wir der Kürze wegen hier nicht besonders berücksichtigt.

Also ist in dem Bogen M_0M_2':

$$0 < \sqrt{p_1} < \cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{2r} < \sqrt{p_2} < \sqrt{2r};$$

also:

$$\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} < \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} > \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r};$$

folglich:

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} - \cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} > 0.$$

Sollte nun in dem Bogen M_0M_2' die Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} + \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0} - \cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} = 0$$

Statt finden, so wäre:

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} - \cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} = -\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0},$$

folglich:

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}<0,$$

was gegen das Obige streitet. Daher kann für den Bogen M_0M die Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}-\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0$$

nicht Statt finden.

In dem Bogen M_1M_2' ist nach dem Obigen:

$$0<\sqrt{p_0}<\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r}<\sqrt{p_2}<\sqrt{2r};$$

also:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}<\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}>\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r};$$

folglich:

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}>0.$$

Sollte nun in dem Bogen M_1M_2' die Gleichung:

$$\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=0$$

Statt finden, so wäre

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=-\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1},$$

folglich:

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}<0,$$

was gegen das Obige streitet. Daher kann für den Bogen M_1M die Gleichung:

$$\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=0$$

nicht Statt finden.

Von den beiden Gleichungen

$$\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}-\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0$$

findet also die erste nicht für den Bogen M_1M_2', die zwei nicht für den Bogen M_0M_2' Statt.

Sollte in dem Bogen M_0M_2'

theilweise $\cos\frac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\frac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\frac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=0,$

theilweise $\cos\frac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\frac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\cos\frac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0$

sein können, so müsste es wegen des Gesetzes der Stetigkeit in diesem Bogen Punkte geben, für welche diese beiden Gleichungen zugleich Statt fänden, für welche also, wie sich durch Addition ergiebt,

$$2\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0 \text{ also } p_1=0$$

wäre, was ungereimt ist, weil in diesem Bogen immer

$$p_1 \overset{=}{>} 2r\sin\tfrac{1}{2}C^2 \text{ also } p_1>0$$

ist. In dem Bogen M_0M_2' ist also immer

entweder $\cos\frac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\frac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\frac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=0$

oder $\cos\frac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\frac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\cos\frac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0.$

Ganz eben so ist in dem Bogen M_1M_2' immer

entweder $\cos\frac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\frac{1}{2}C.\sqrt{p_0}-\cos\frac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0$

oder $\cos\frac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\frac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\cos\frac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0.$

Wäre nun in dem Bogen M_0M_2' und M_1M_2' beziehungsweise

$$\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}-\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0;$$

so fänden diese Gleichungen wegen des Gesetzes der Stetigkeit in dem Punkte M_2' zugleich Statt, es wäre also, wie sich durch Addition sogleich ergiebt, für diesen Punkt:

$$2\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0 \text{ also } p_2=0,$$

was ungereimt ist, da für diesen Punkt

$$p_2=2r>0$$

ist.

Wäre in dem Bogen M_0M_2' und M_1M_2' beziehungsweise

$$\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0;$$

so ständen diese Gleichungen wegen des Gesetzes der Stetigkeit in dem Punkte M_2' zugleich Statt, es wäre also, wie sich durch Addition sogleich ergiebt, für diesen Punkt

$$2\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0 \text{ also } p_1=0,$$

was ungereimt ist, da für diesen Punkt

$$p_1=2r\sin\tfrac{1}{2}C^2>0$$

ist.

Wäre in dem Bogen M_0M_2' und M_1M_2' beziehungsweise

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}-\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0;$$

so fänden diese Gleichungen wegen des Gesetzes der Stetigkeit in dem Punkte M_2' zugleich Statt, es wäre also, wie sich durch Addition sogleich ergiebt, für diesen Punkt

$$2\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=0 \text{ also } p_0=0,$$

was ungereimt ist, da für diesen Punkt

$$p_0=2r\sin\tfrac{1}{2}A^2>0$$

ist.

Hiernach bleibt also nichts Anderes übrig, als dass sowohl für den Bogen M_0M_2', als auch für den Bogen M_1M_2', folglich für den ganzen Bogen M_0M_1, die Gleichung:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0$$

Statt findet.

Eine ganz ähnliche Betrachtung lässt sich für die Bogen M_1M_2 und M_2M_0 anstellen, und es finden also für die Bogen

$$M_0M_1,\qquad M_1M_2,\qquad M_2M_0$$

beziehungsweise die Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}+\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}=0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0}-\cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0$$

Statt.

Es müssen im Punkte M_1 die erste und zweite, im Punkte M_2 die zweite und dritte, im Punkte M_0 die dritte und erste dieser Gleichungen zugleich erfüllt sein, und durch Addition jeder der zwei in Rede stehenden Gleichungen erhält man beziehungsweise:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_0 = 0;$$

wie es in der That in den Punkten

$$M_1, \quad M_2, \quad M_0$$

beziehungsweise der Fall sein muss.

Keineswegs lässt sich also der ganze in das Dreieck ABC beschriebene Kreis durch eine einzige Gleichung von der vorstehenden Form zwischen den Grössen

$$\sqrt{p_0}, \quad \sqrt{p_1}, \quad \sqrt{p_2}$$

darstellen, wobei alle Wurzelgrössen positiv oder absolut genommen sind; man könnte nur sagen, die Gleichung des ganzen Kreises sei:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0} + \cos\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} + \cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = 0,$$

wenn man die Wurzelgrössen mit den folgenden Vorzeichen nimmt:

im Bogen M_0M_1:

$\sqrt{p_0}$	$\sqrt{p_1}$	$\sqrt{p_2}$
positiv	positiv	negativ;

im Bogen M_1M_2:

$\sqrt{p_0}$	$\sqrt{p_1}$	$\sqrt{p_2}$
negativ	positiv	positiv;

im Bogen M_2M_0:

$\sqrt{p_0}$	$\sqrt{p_1}$	$\sqrt{p_2}$
positiv	negativ	positiv.

Der ganze Kreis kann nur durch die eine Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} p_0^2\cos\tfrac{1}{2}C^4 + p_1^2\cos\tfrac{1}{2}A^4 + p_2^2\cos\tfrac{1}{2}B^4 \\ -2p_0p_1\cos\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}A^2 - 2p_1p_2\cos\tfrac{1}{2}A^2\cos\tfrac{1}{2}B^2 - 2p_2p_0\cos\tfrac{1}{2}B^2\cos\tfrac{1}{2}C^2 \end{array}\right\} = 0$$

dargestellt werden.

§. 4.

Von den drei äusseren Berührungskreisen des Dreiecks ABC wollen wir mit Bezug auf Fig. 4. den besonders betrachten, welcher über der Seite AB nach dem äusseren Raume des Dreiecks hin liegt, für den, wenn wie früher r den Halbmesser dieses Kreises bezeichnet,

$$\overline{\omega}_0 = -r, \quad \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = r$$

zu setzen ist.

Hiernach ist also wie im vorhergehenden Paragraphen:

$$\overline{\omega}_1^2 - 2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 \cos w_{12} + \overline{\omega}_2^2 - r^2 \sin w_{12}^2 = 4r^2 \cos\tfrac{1}{2}C^4.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}_2^2 - 2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0 \cos w_{20} + \overline{\omega}_0^2 - r^2 \sin w_{20}^2 \\
&= r^2(1 - 2\cos A + 1 - \sin A^2) \\
&= r^2(1 - 2\cos A + \cos A^2) = r^2(1 - \cos A)^2 \\
&= 4r^2 \sin\tfrac{1}{2}A^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}_0^2 - 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 \cos w_{01} + \overline{\omega}_1^2 - r^2 \sin w_{01}^2 \\
&= r^2(1 - 2\cos B + 1 - \sin B^2) \\
&= r^2(1 - 2\cos B + \cos B^2) = r^2(1 - \cos B)^2 \\
&= 4r^2 \sin\tfrac{1}{2}B^4.
\end{aligned}$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned}
&(\overline{\omega}_0 - \overline{\omega}_2 \cos w_{20})(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2 \cos w_{12}) - (\overline{\omega}_2^2 - r^2) \sin w_{12} \sin w_{20} \\
&= -r^2(1 - \cos A)(1 + \cos C) = -4r^2 \sin\tfrac{1}{2}A^2 \cos\tfrac{1}{2}C^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_0 \cos w_{01})(\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_0 \cos w_{20}) - (\overline{\omega}_0^2 - r^2) \sin w_{20} \sin w_{01} \\
&= r^2(1 - \cos B)(1 - \cos A) = 4r^2 \sin\tfrac{1}{2}B^2 \sin\tfrac{1}{2}A^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1 \cos w_{12})(\overline{\omega}_0 - \overline{\omega}_1 \cos w_{01}) - (\overline{\omega}_1^2 - r^2) \sin w_{01} \sin w_{12} \\
&= -r^2(1 + \cos C)(1 - \cos B) = -4r^2 \cos\tfrac{1}{2}C^2 \sin\tfrac{1}{2}B^2.
\end{aligned}$$

Daher ist die Gleichung unseres Kreises:

$$\begin{aligned}
&p_0^2 \cos\tfrac{1}{2}C^4 + p_1^2 \sin\tfrac{1}{2}A^4 + p_2^2 \sin\tfrac{1}{2}B^4 \\
&+ 2p_0p_1 \cos\tfrac{1}{2}C^2 \sin\tfrac{1}{2}A^2 - 2p_1p_2 \sin\tfrac{1}{2}A^2 \sin\tfrac{1}{2}B^2 + 2p_2p_0 \sin\tfrac{1}{2}B^2 \cos\tfrac{1}{2}C^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Bekanntlich ist, wenn wie früher R den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises bezeichnet:

$$r = 4R \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C,$$

und die Coordinaten des Mittelpunkts unseres äusseren Berührungskreises sind $-r$, $+r$, $+r$.

Da man die obige Gleichung unseres äusseren Berührungskreises unter der Form:

$$(-p_0)^2\cos\tfrac{1}{2}C^4 + p_1^2\sin\tfrac{1}{2}A^4 + p_2^2\sin\tfrac{1}{2}B^4$$
$$-2(-p_0)p_1\cos\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}A^2 - 2p_1p_2\sin\tfrac{1}{2}A^2\sin\tfrac{1}{2}B^2 - 2p_2(-p_0)\sin\tfrac{1}{2}B^2\cos\tfrac{1}{2}C^2$$
$$=0$$

schreiben kann, so sieht man, dass dieselbe aus der im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Gleichung des inneren Berührungskreises hervorgeht, wenn man in dieser letzteren Gleichung für

$$p_0,\quad p_1,\quad p_2$$

beziehungsweise

$$-p_0,\quad p_1,\quad p_2$$

und für

$$\cos\tfrac{1}{2}A,\quad \cos\tfrac{1}{2}B,\quad \cos\tfrac{1}{2}C$$

beziehungsweise

$$\sin\tfrac{1}{2}A,\quad \sin\tfrac{1}{2}B,\quad \cos\tfrac{1}{2}C$$

schreibt; nach dem vorhergehenden Paragraphen lässt sich also die Gleichung des hier betrachteten äusseren Berührungskreises auch auf die Form:

$$(\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} + \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} + \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2})$$
$$\times(\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} + \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} - \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0})$$
$$\times(\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} + \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} - \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1})$$
$$\times(\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} + \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2})$$
$$=0$$

bringen, so dass also immer mindestens eine der vier Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} + \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} + \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = 0,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} + \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} - \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} = 0,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} + \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} - \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} = 0,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} + \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = 0$$

Statt finden muss, worüber nun weiter zu entscheiden ist, indem man nicht unbemerkt lässt, dass $\sqrt{-p_0}$ eine reelle Grösse ist, weil für unseren äusseren Berührungskreis offenbar immer p_0 negativ ist.

Die Construction machen wir wie im vorhergehenden Paragraphen, und wollen nun wieder zuerst die Coordinaten der Berührungspunkte M_0, M_1, M_2 bestimmen.

Bezeichnen wir die Coordinaten von M_0 durch f_0, g_0, h_0, so ist $f_0=0$, und zur Bestimmung von g_0 und h_0 haben wir auf ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen die beiden Gleichungen:

$$g_0{}^2\sin\tfrac{1}{2}A^4+h_0{}^2\sin\tfrac{1}{2}B^4-2g_0h_0\sin\tfrac{1}{2}A^2\sin\tfrac{1}{2}B^2=0,$$

$$g_0\sin A+h_0\sin B=2R\sin A\sin B\sin C;$$

also:

$$(g_0\sin\tfrac{1}{2}A^2-h_0\sin\tfrac{1}{2}B^2)^2=0,$$

$$g_0\sin A+h_0\sin B=2R\sin A\sin B\sin C;$$

folglich:

$$g_0\sin\tfrac{1}{2}A^2-h_0\sin\tfrac{1}{2}B^2=0,$$

$$g_0\sin A+h_0\sin B=2R\sin A\sin B\sin C;$$

woraus man mittelst leichter Rechnung:

$$g_0=8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}B^2,$$

$$h_0=8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}A^2$$

erhält.

Bezeichnen wir die Coordinaten von M_1 durch f_1, g_1, h_1, so ist $g_1=0$, und zur Bestimmung von f_1 und h_1 haben wir die Gleichungen:

$$f_1\cos\tfrac{1}{2}C^4+h_1\sin\tfrac{1}{2}B^4+2f_1h_1\cos\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}B^2=0,$$

$$f_1\sin C+h_1\sin B=2R\sin A\sin B\sin C;$$

also:

$$(f_1\cos\tfrac{1}{2}C^2+h_1\sin\tfrac{1}{2}B^2)^2=0,$$

$$f_1\sin C+h_1\sin B=2R\sin A\sin B\sin C;$$

folglich:

$$f_1\cos\tfrac{1}{2}C^2+h_1\sin\tfrac{1}{2}B^2=0,$$

$$f_1\sin C+h_1\sin B=2R\sin A\sin B\sin C;$$

woraus man mittelst leichter Rechnung:

$$f_1=-8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}B^2,$$

$$g_1=8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C^2$$

erhält.

Bezeichnen wir die Coordinaten von M_2 durch f_2, g_2, h_2, s

ist $h_2 = 0$, und zur Bestimmung von f_2 und g_2 haben wir die Gleichungen:

$$f_2^2 \cos\tfrac{1}{2}C^4 + g_2^2 \sin\tfrac{1}{2}A^4 + 2f_2g_2 \cos\tfrac{1}{2}C^2 \sin\tfrac{1}{2}A^2 = 0$$

$$f_2 \sin C + g_2 \sin A = 2R \sin A \sin B \sin C;$$

also:

$$(f_2 \cos\tfrac{1}{2}C^2 + g_2 \sin\tfrac{1}{2}A^2)^2 = 0,$$

$$f_2 \sin C + g_2 \sin A = 2R \sin A \sin B \sin C;$$

folglich:

$$f_2 \cos\tfrac{1}{2}C^2 + g_2 \sin\tfrac{1}{2}A^2 = 0,$$

$$f_2 \sin C + g_2 \sin A = 2R \sin A \sin B \sin C;$$

woraus man mittelst leichter Rechnung:

$$f_2 = -8R \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C \sin\tfrac{1}{2}A^2,$$

$$g_2 = \quad 8R \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C \cos\tfrac{1}{2}C^2$$

erhält.

Daher sind die Coordinaten von

$$M_0, \qquad M_1, \qquad M_2$$

beziehungsweise:

$$0,\quad 8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}B^2,\quad 8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}A^2;$$

$$-8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}B^2,\quad 0,\quad 8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C^2;$$

$$-8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}A^2,\quad 8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C^2,\quad 0;$$

oder:

$$0, \qquad 2r\sin\tfrac{1}{2}B^2, \qquad 2r\sin\tfrac{1}{2}A^2;$$

$$-2r\sin\tfrac{1}{2}B^2, \qquad 0, \qquad 2r\cos\tfrac{1}{2}C^2;$$

$$-2r\sin\tfrac{1}{2}A^2, \qquad 2r\cos\tfrac{1}{2}C^2, \qquad 0.$$

Die Coordinaten von

$$M_0', \qquad M_1', \qquad M_2'$$

sind, wie man durch eine einfache geometrische Betrachtung leicht findet:

$$-2r, \qquad 2r\cos\tfrac{1}{2}B^2, \qquad 2r\cos\tfrac{1}{2}A^2;$$

$$-2r\cos\tfrac{1}{2}B^2, \qquad 2r, \qquad 2r\sin\tfrac{1}{2}C^2;$$

$$-2r\cos\tfrac{1}{2}A^2, \qquad 2r\sin\tfrac{1}{2}C^2, \qquad 2r.$$

Gehen wir jetzt zu der Betrachtung der vier Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}+\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}=0,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}+\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0$$

über, so erhellet zuerst auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen, dass die erste dieser vier Gleichungen allgemein unstatthaft ist.

Für den Bogen M_0M_1 ist:

$$0<p_1<2r\sin\tfrac{1}{2}B^2,$$

$$2r\sin\tfrac{1}{2}A^2<p_2<2r\cos\tfrac{1}{2}C^2;$$

also:

$$0<\sqrt{p_1}<\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{2r}<\sqrt{p_2}<\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r};$$

folglich:

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}<\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}>\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r};$$

also:

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}>0.$$

Wäre nun in dem Bogen M_0M_1

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0,$$

so wäre:

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0},$$

also:

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}<0,$$

was gegen das Obige streitet. Daher kann die Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0$$

für den Bogen M_0M_1 nicht Statt finden.

Für den Bogen M_0M_2 ist:

$$0<p_2<2r\sin\tfrac{1}{2}A^2,$$

$$2r\sin\tfrac{1}{2}B^2 < p_1 < 2r\cos\tfrac{1}{2}C^2;$$

:

$$0 < \sqrt{p_2} < \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{2r},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r} < \sqrt{p_1} < \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r};$$

lich:

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} < \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} > \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r};$$

o:

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} > 0.$$

re nun in dem Bogen M_0M_2:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} + \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = 0,$$

wäre:

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = -\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{p_0},$$

:

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} < 0,$$

gegen das Obige streitet. Daher kann die Gleichung:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} + \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = 0$$

den Bogen M_0M_2 nicht Statt finden.

Von den beiden Gieichungen:

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} + \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} - \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} = 0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} + \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = 0$$

n also die erste nicht für den Bogen M_0M_1, die zweite ht für den Bogen M_0M_2 Statt finden.

Sollte in dem Bogen M_0M_1

theilweise $\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} + \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = 0,$

theilweise $\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} + \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} - \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} = 0$

n können, so müsste es wegen des Gesetzes der Stetigkeit in sem Bogen Punkte geben, für welche diese beiden Gleichungen gleich Statt fänden, für welche also, wie sich durch Addition iebt:

$$2\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} = 0 \text{ also } p_1 = 0$$

wäre, was nur für den Punkt M_1 der Fall sein könnte. Da nun aber für $p_1 = 0$ die beiden obigen Gleichungen sich auf die eine Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = 0$$

reduciren, so wird man also sagen können, dass in dem Bogen M_0M_1 immer

$$\text{entweder}\quad \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} + \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = 0,$$

$$\text{oder}\quad \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} + \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} - \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} = 0$$

ist.

Sollte in dem Bogen M_0M_2

$$\text{theilweise}\quad \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} + \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} - \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} = 0,$$

$$\text{theilweise}\quad \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} + \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} - \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} = 0$$

sein können, so müsste es wegen des Gesetzes der Stetigkeit in diesem Bogen Punkte geben, für welche diese beiden Gleichungen zugleich Statt fänden, für welche also, wie sich durch Addition ergiebt:

$$2\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = 0 \quad \text{also} \quad p_2 = 0$$

wäre, was nur für den Punkt M_2 der Fall sein könnte. Da nun aber für $p_2 = 0$ die beiden obigen Gleichungen sich auf die eine Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} - \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} = 0$$

reduciren, so wird man sagen können, dass in dem Bogen M_0M_2 immer

$$\text{entweder}\quad \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} + \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} - \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} = 0,$$

$$\text{oder}\quad \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} + \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} - \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} = 0$$

ist.

Sollte in dem Bogen M_0M_1 und M_0M_2 beziehungsweise

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} + \sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} - \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} = 0,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1} + \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2} - \cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} = 0$$

sein, so würden wegen des Gesetzes der Stetigkeit diese beiden Gleichungen in dem Punkte M_0 zugleich Statt finden, es würde also für diesen Punkt, wie sich durch Addition ergiebt,

$$2\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0 \text{ also } p_1=0$$

sein, was offenbar ungereimt ist.

Sollte in dem Bogen M_0M_1 und M_0M_2 beziehungsweise:

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}=0,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0$$

sein, so würden wegen des Gesetzes der Stetigkeit diese beiden Gleichungen in dem Punkte M_0 zugleich Statt finden, es würde also für diesen Punkt, wie sich durch Addition ergiebt,

$$2\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0 \text{ also } p_2=0$$

sein, was offenbar ungereimt ist.

Wäre in dem Bogen M_0M_1 und M_0M_2 beziehungsweise:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}+\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0;$$

so würden wegen des Gesetzes der Stetigkeit diese beiden Gleichungen in dem Punkte M_0 zugleich Statt finden, es würde also für diesen Punkt, wie sich durch Addition ergiebt,

$$2\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}=0 \text{ also } p_0=0$$

sein, was keine Ungereimtheit involvirt, da dies wirklich der Fall ist.

Sollte in den beiden Bogen M_0M_1 und M_0M_2 die Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}=0$$

Statt finden, so wäre in dem Punkte M_0, also für $p_0=0$:

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0.$$

Im Punkte M_0 ist aber nach dem Obigen

$$p_1=2r\sin\tfrac{1}{2}B^2,\qquad p_2=2r\sin\tfrac{1}{2}A^2;$$

also:

$$\sqrt{p_1}=\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r},\qquad \sqrt{p_2}=\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{2r},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r},\qquad \sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r};$$

folglich:

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0,$$

und daher in Verbindung mit der obigen Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0$$

durch Addition und Subtraction beziehungsweise:

$$2\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0 \text{ also } p_1=0$$

und

$$2\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0 \text{ also } p_2=0,$$

was offenbar ungereimt ist. Daher kann in den Bogen M_0M_1 und M_0M_2, also in dem ganzen Bogen $M_1M_0M_2$, nicht

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}=0$$

sein.

Hiernach bleibt folglich nichts Anderes übrig, als dass in dem Bogen M_0M_1 und M_0M_2 beziehungsweise:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}+\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0$$

und

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0$$

ist.

Sollte in dem Bogen $M_1M_0'M_2$

theilweise $\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}+\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0,$

theilweise $\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0$

sein können, so müsste es wegen des Gesetzes der Stetigkeit in diesem Bogen Punkte geben, für welche diese beiden Gleichungen zugleich Statt fänden, für welche also, wie sich durch Addition ergiebt,

$$2\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}=0 \text{ also } p_0=0$$

wäre, was offenbar ungereimt ist.

Sollte in dem Bogen $M_1M_0'M_2$

theilweise $\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}+\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0,$

theilweise $\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}=0$

sein können, so müsste es wegen des Gesetzes der Stetigkeit in diesem Bogen Punkte geben, für welche diese beiden Gleichungen zugleich Statt fänden, für welche also, wie sich durch Addition ergiebt,

$$2\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0 \text{ also } p_1=0$$

wäre, was nur für den Punkt M_1 Statt finden könnte, wobei man aber zu bemerken hat, dass für $p_1=0$ die beiden obigen Gleichungen sich auf die eine Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0$$

reduciren.

Sollte in dem Bogen $M_1M_0'M_2$

theilweise $\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0,$

theilweise $\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}=0$

sein können, so müsste es wegen des Gesetzes der Stetigkeit in diesem Bogen Punkte geben, für welche diese beiden Gleichungen zugleich Statt fänden, für welche also, wie sich durch Addition ergiebt,

$$2\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0 \text{ also } p_2=0$$

wäre, was nur für den Punkt M_2 Statt finden könnte, wobei man aber zu bemerken hat, dass für $p_2=0$ die beiden obigen Gleichungen sich auf die eine Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0$$

reduciren.

Hieraus ergiebt sich, dass in dem ganzen Bogen $M_1M_0'M_2$ nur eine der drei Gleichungen:

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}=0,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}+\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0$$

Statt finden kann.

Die zweite Gleichung liefert für den Punkt M_0':

$$\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r}-\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r}=0,$$

also:

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Die dritte Gleichung liefert für den Punkt M_0':

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r}+\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r}-\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r}=0,$$

also:

$$\cos\tfrac{1}{2}C = -\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Es ist aber im Dreieck ABC der Winkel $C = 180^0-(A+B)$, also $\tfrac{1}{2}C = 90^0-\tfrac{1}{2}(A+B)$, folglich:

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}(A+B).$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}(A-B),\quad \cos\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)$$

folgt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B) = \sin\tfrac{1}{2}(A+B),$$

also, wie sich nach gehöriger Entwickelung der Sinus sogleich ergiebt:

$$2\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = 0,$$

folglich entweder $\cos\tfrac{1}{2}A = 0$ oder $\sin\tfrac{1}{2}B = 0$, was Beides ungereimt ist.

Aus den beiden Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{2}C = -\sin\tfrac{1}{2}(A-B),\quad \cos\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)$$

folgt:

$$-\sin\tfrac{1}{2}(A-B) = \sin\tfrac{1}{2}(A+B),$$

also, wie sich nach gehöriger Entwickelung der Sinus sogleich ergiebt:

$$2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B = 0,$$

folglich entweder $\sin\tfrac{1}{2}A = 0$ oder $\cos\tfrac{1}{2}B = 0$, was Beides ungereimt ist.

Also kann weder die zweite, noch die dritte Gleichung für den Bogen $M_1M_0'M_2$ Statt finden; es findet folglich die erste Statt, und es ist also für diesen Bogen:

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0} = 0.$$

Für den Punkt M_0' wird diese Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r}+\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r} = 0,$$

also:

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}(A+B),$$

was völlig richtig und daher obige Gleichung in diesem Punkte wirklich erfüllt ist.

Für den Punkt M_1' liefert die obige Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{2r}+\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r}-\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r}=0,$$

also:

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\cos\tfrac{1}{2}(B+C),$$

was völlig richtig und daher obige Gleichung für diesen Punkt wirklich erfüllt ist.

Für den Punkt M_2' liefert obige Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{2r}-\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r}=0,$$

also:

$$\sin\tfrac{1}{2}B=\cos\tfrac{1}{2}(A+C),$$

was völlig richtig und daher obige Gleichung für den Punkt M_2' wirklich erfüllt ist.

Für den Punkt M_1 liefert die obige Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2}A.0+\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r}-\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r}=0,$$

also $0=0$, was völlig richtig und daher obige Gleichung für den Punkt M_1 wirklich erfüllt ist.

Für den Punkt M_2 liefert obige Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r}+\sin\tfrac{1}{2}B.0-\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{2r}=0,$$

also $0=0$, was völlig richtig und daher obige Gleichung für den Punkt M_2 wirklich erfüllt ist.

Durch das Vorhergehende ist nun vollständig bewiesen, dass für die Bogen:

$$M_0M_1,\qquad M_1M_2,\qquad M_2M_0$$

beziehungsweise die Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}+\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}-\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}-\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}=0,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}+\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}-\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}=0$$

Statt finden.

Man kann sagen, dass die Gleichung des ganzen Kreises

$$\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{-p_0}+\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{p_1}+\sin\tfrac{1}{2}B.\sqrt{p_2}=0$$

sei, wenn man die Wurzelgrössen mit den folgenden Vorzeic
nimmt:

im Bogen M_0M_1:

$\sqrt{-p_0}$	$\sqrt{p_1}$	$\sqrt{p_2}$
positiv	positiv	negativ;

im Bogen M_1M_2:

$\sqrt{-p_0}$	$\sqrt{p_1}$	$\sqrt{p_2}$
negativ	positiv	positiv;

im Bogen M_2M_0:

$\sqrt{-p_0}$	$\sqrt{p_1}$	$\sqrt{p_2}$
positiv	negativ	positiv.

Für die beiden anderen äusseren Berührungskreise las
sich natürlich ganz ähnliche Betrachtungen anstellen, wor
hier nichts weiter zu sagen ist.

XXII.

Ueber zwei trigonometrische Sätze.

Von

Herrn Professor *F. H. Rump*
in Coesfeld.

I.

Im 48. Bande, S. 242 des Archivs wird nach Lindm
Trigonometrie ein sehr zierlicher geometrischer Bewei
Formeln geliefert, die zur Berechnung eines Dreiecks aus
Seiten und dem eingeschlossenen Winkel dienen. Der folg
Beweis möchte sich ebenfalls durch Kürze und Einfac
empfehlen.

Bei dem $\triangle ABC$ (Taf. VI. Fig. I.) sei $BC = a$, $AC = b$ und $ACB = C$ gegeben. Man verlängere BC um $CD = CA$, schneide auch von CB das Stück $CE = CA$ ab und ziehe AD und AE. Dann ist

$$BD = a + b,$$

$$BE = a - b,$$

$$ADB = \tfrac{1}{2}C,$$

$$AEB = DAE + ADE = \mathrm{R} + \tfrac{1}{2}C = 2\mathrm{R} - \tfrac{1}{2}(A+B),$$

$$EAB = DEA - B = \mathrm{R} - \tfrac{1}{2}C - B = \tfrac{1}{2}(A+B) - B = \tfrac{1}{2}(A-B),$$

$$DAB = \mathrm{R} + \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Nun ergibt sich für $AB = c$ aus dem $\triangle EAB$

$$(1.) \quad c = \frac{EB . \sin AEB}{\sin EAB} = \frac{(a-b)\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A-B)},$$

und aus dem $\triangle DAB$

$$(2.) \quad c = \frac{DB . \sin ADB}{\sin DAB} = \frac{(a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Schafft man jetzt in den beiden für c gefundenen Gleichungen die Nenner auf die andere Seite und dividirt (1.) durch (2.), so erhält man

$$(3.) \qquad \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tng}\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{a-b}{a+b}\cot\tfrac{1}{2}C.$$

II.

Im 51. Bande des Archivs S. 97. theilt Herr G. Dostor in Paris einen Lehrsatz mit, der recht füglich zur Berechnung eines Dreiecks benutzt werden kann, von welchem zwei Seiten und der von ihnen gebildete Winkel gegeben sind. Für diesen Lehrsatz soll hier eiu anderer Beweis geliefert werden.

1. **Lehrsatz.** Wird in einem Dreiecke ein Winkel halbirt, so verhält sich die Tangente des Neigungswinkels der Halbirungslinie gegen die von ihr durchschnittene Seite zur Tangente des halben halbirten Winkels, wie die Summe der diesen Winkel bildenden

Seiten zur Differenz dieser Seiten; also mit Benutzung der in der Figur (s. nachher) angegebenen Zeichen:

$$\operatorname{tng}\delta : \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}\alpha = (b+c):(b-c).$$

Beweis. In dem Dreieck ABC (Taf. VI. Fig. II.) verlängere man AC um $AE = AB$, schneide auch von AC das Stück $AF = AB$ ab und verbinde E und F mit B. Dann ist zunächst $BEC = \frac{1}{2}\alpha$, ferner, da AD parallel EB, $\sin EBC = \sin\delta$, und auch, da $BGD = \mathrm{R}$, $\sin FBC = \cos\delta$. Nun ergibt sich aus dem $\triangle\, EBC$

$$\sin EBC = \frac{EC.\sin BEC}{BC},$$

d. h.:

$$(1.)\qquad \sin\delta = \frac{b+c}{a}\sin\tfrac{1}{2}\alpha;$$

und ferner aus dem $\triangle\, FBC$

$$\sin FBC = \frac{FC.\sin BFC}{BC},$$

d. h.:

$$(2.)\qquad \cos\delta = \frac{b-c}{a}\cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Durch Division von (1.) durch (2.) erhält man

$$(3.)\qquad \operatorname{tng}\delta = \frac{b+c}{b-c}\operatorname{tng}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

2. Zusatz. Da sich verhält $AD:EB = b:(b+c)$, und $EB = 2c\cos ABE = 2c\cos\frac{1}{2}\alpha$ ist, so hat man

$$AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

3. Zusatz. Sind von einem Dreiecke zwei Seiten b, c und der von ihnen gebildete Winkel α gegeben, so liefert zunächst die Formel (3.) den Werth von δ, und hiernach hat man

$$\beta = 2\mathrm{R} - (\delta + \tfrac{1}{2}\alpha),\qquad \gamma = \delta - \tfrac{1}{2}\alpha,\qquad a = \frac{b\sin\alpha}{\sin(\delta+\frac{1}{2}\alpha)} = \frac{c\sin\alpha}{\sin(\delta-\frac{1}{2}\alpha)}.$$

Sind aber von einem Dreiecke eine Seite a, der gegenüberliegende Winkel α und dann noch entweder die Summe der beiden andern Seiten oder die Differenz derselben gegeben, so liefert im ersten Falle die Formel (1.), im zweiten die Formel (2.), den Werth von δ, wonach sich dann das Fernere leicht ergibt.

XXIII.

Ueber die Bestimmung einer Kurve aus ihrer Tangenteneigenschaft.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markte in Wien.

In dem rechtwinkeligen Coordinatensystem Taf. VI. Fig. III. xOy mit O als Ursprung sei M irgend ein Punkt einer noch unbekannten Kurve, deren Tangenten auf folgende Art construirt werden:

Man zieht durch den Kurvenpunkt M den Leitstrahl $OM = r$ und verlängert denselben (nöthigenfalls) bis zum Durchschnitt N mit dem aus O als Mittelpunkt beschriebenen Kreise vom Radius $OA = OB = a$; die Kreistangente in N schneide die Ordinatenaxe in P, dieser Punkt, mit M verbunden, gibt die Tangente.

Sind x, y die Coordinaten des Kurvenpunktes M, so ist zunächst:

$$\text{(1)} \qquad r^2 = x^2 + y^2,$$

und $\frac{ax}{r}$, $\frac{ay}{r}$ sind die Coordinaten des Punktes N; hiermit erhält man als Coordinaten des Punktes P, 0, $\frac{ar}{y}$. Die Coordinaten der beiden Punkte M und P geben nun nach den Lehren der analytischen Geometrie:

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \frac{ar}{y}}{x} = \frac{y^2 - ar}{xy},$$

als Differenzialgleichung der gesuchten Kurve, in welcher r den Werth aus (1) hat.

In dieser Gleichung (2) ist x die unabhängige Variabele und y ist als Function von x zu denken; um dieselbe zu integriren betrachten wir r als reine Function von x und führen mittelst (1) r statt y ein.

Die Gleichung (1) unter diesem Gesichtspunkt nach r differenzirt gibt unmittelbar:

(3) $$r\frac{dr}{dx} = x + y\frac{dy}{dx};$$

wird aus (2) und (3) $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, so ergibt sich nach kurzer Rechnung als neue Differenzialgleichung unserer Kurve:

$$x\frac{dr}{dx} = r - a;$$

in dieser können die Variabeln sofort getrennt werden und die Integration gibt, wenn c die willkürliche Constante bedeutet:

$$cx = r - a$$

oder:

(4) $$x^2 + y^2 = (a + cx)^2,$$

als endliche Gleichung der gesuchten Kurve.

Dieselbe bezeichnet einen Kegelschnitt, **welcher immer durch die beiden Punkte A und B geht und die Abscissenaxe zur Axe der Symmetrie hat.**

Ist $c = \pm 1$, so erlangt (4) die Form $y^2 = a^2 \pm 2ax$ und bezeichnet eine **Parabel**, deren Scheitel die Abscisse $\mp\frac{1}{2}a$ hat und deren Brennpunkt im Ursprung liegt.

Ist $c \gtrless {0 \atop 1}$, so kann die Gleichung (4) auf die Form gebracht werden:

(5) $$\frac{(x - \alpha)^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

und zwar ist:

$$(6) \quad \alpha = \frac{ac}{1-c^2}, \quad A = \frac{a}{1-c^2}, \quad B = \frac{a}{\sqrt{1-c^2}}, \quad A^2 - B^2 = \alpha^2;$$

dieselbe bezeichnet eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Abscisse α, die Ordinate Null hat, deren grosse und kleine Halbaxe A und B sind. Der Ursprung O ist einer der beiden Brennpunkte.

Ist aber $c > 1$, so bringt man die Gleichung (4) auf folgende Form:

$$(7) \qquad \frac{(x+\alpha)^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

mit

$$(8) \quad \alpha = \frac{ac}{c^2-1}, \quad A = \frac{a}{c^2-1}, \quad B = \frac{a}{\sqrt{c^2-1}}, \quad A^2 + B^2 = \alpha^2;$$

und diese bezeichnet eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Abscisse $-\alpha$ und die Ordinate Null hat, deren reelle Halbaxe A ist, und O ist einer der beiden Brennpunkte.

Dass sich hieraus einfache Tangentenconstructionen für die Kegelschnitte ableiten lassen, versteht sich von selbst.

XXIV.

Darstellung der Function

$$y = x^n e^{\lambda x^2}$$

in welcher λ eine constante, aber von Null verschiedene, und n Null oder eine ganze positive Zahl bezeichnet, in der Form

$$y = S[A_m e^{mx}].$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,
Professor am k. k. Polytechnikum in Wien.

Liouville hat im 21. Cahier des Journals de l'école polytechnique gezeigt, wie jede Function von x sich in der Form $S[A_m e^{mx}]$ darstellen lasse. Die Methode, die Liouville daselbst angibt, ist nicht in allen Fällen zweckmässig. Ich habe daher versucht, die Function $x^n e^{\lambda x^2}$ auf andere Weise in die Form $S[A_m e^{mx}]$ zu bringen, und erlaube mir hier, das Gefundene mitzutheilen.

Es lässt sich leicht die Identität der Gleichung

$$e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}}\, du \qquad (1)$$

darthun, doch diess ist ohnehin bekannt. Die eben aufgestellte Gleichung gibt $e^{\lambda x^2}$ in der Form $S[A_m e^{mx}]$ an.

Differenzirt man die Gleichung (1), so erhält man:

$$2\lambda x e^{\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} du$$

und hieraus folgt:

$$x e^{\lambda x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} du, \tag{2}$$

welche Gleichung $x e^{\lambda x^2}$ in der Form $S[A_m e^{mx}]$ liefert.

Differenzirt man die Gleichung (2) so erhält man:

$$2\lambda x^2 e^{\lambda x^2} + e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} du.$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung (1) ab, so bleibt

$$2\lambda x^2 e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 - 1) e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} du,$$

und hieraus folgt:

$$x^2 e^{\lambda x^2} = \frac{1}{2\lambda\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 - 1) e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} du, \tag{3}$$

welche Gleichung $x^2 e^{\lambda x^2}$ in der Form $S[A_m e^{mx}]$ liefert.

Fährt man auf ähnliche Weise fort, so findet man der Reihe nach die Functionen

$$x^3 e^{\lambda x^2}, \quad x^4 e^{\lambda x^2}, \quad x^5 e^{\lambda x}, \ldots\ldots\ldots$$

dargestellt in der Form $S[A_m e^{mx}]$.

Man kann daher allgemein setzen:

$$x^n e^{\lambda x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} V du, \tag{4}$$

wo V eine einstweilen noch unbekannte, aber vollkommen bestimmte ganze algebraische Function von u ist.

Um V zu finden, differenzire man die Gleichung (4) nach x so erhält man

$$2\lambda x^{n+1} e^{\lambda x^2} + n x^{n-1} e^{\lambda x^2} = \sqrt{2\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} V du.$$

Aus beiden Gleichungen (4) und (5) folgt, wenn man dieselb durch einander dividirt, und die so erhaltene Gleichung v Brüchen befreiet,

$$x\sqrt{2\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} V du = (2\lambda x^2 + n) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} V du.$$

Die beiden Integrale

$$x\sqrt{2\lambda} \int u e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} V du,$$

$$2\lambda x^2 \int e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} V du$$

geben, ersteres einmal, letzteres zweimal nach der Methode d theilweisen Integrirens behandelt:

$$u V e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} - \int e^{ux\sqrt{2\lambda}} \frac{d(u e^{-\frac{u^2}{2}} V)}{du} du$$

und

$$x\sqrt{2\lambda} V e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} - V e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} + \int e^{ux\sqrt{2\lambda}} \frac{d^2(e^{-\frac{u^2}{2}} V)}{du^2} d$$

Berücksichtigt man nun die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, so v schwinden sämmtliche ausser dem Integralzeichen stehend Werthe, und man erhält statt der Gleichung (6) folgende and Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux\sqrt{2\lambda}} \left[\frac{d(u V e^{-\frac{u^2}{2}})}{du} + \frac{d^2(V e^{-\frac{u^2}{2}})}{du^2} + n V e^{-\frac{u^2}{2}} \right] du = 0,$$

welche identisch wird durch jene Werthe von V, welche folgen Differentialgleichung Genüge leisten:

$$\frac{d^2(V e^{-\frac{u^2}{2}})}{du^2} + \frac{d(u V e^{-\frac{u^2}{2}})}{du} + n V e^{-\frac{u^2}{2}} = 0.,$$

Setzt man

$$e^{-\frac{u^2}{2}} V = W,$$

so erhält man zur Bestimmung von W die Gleichung

$$\frac{d^2 W}{du^2} + \frac{d(uW)}{du} + nW = 0,$$

welche sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{d^2 W}{du^2} + u\frac{dW}{du} + (n+1)W = 0,$$

woraus folgt:

$$W = \frac{d^n}{du^n}\left[e^{-\frac{u^2}{2}}\int e^{\frac{u^2}{2}}\,du\right];$$

somit ist

$$V = e^{\frac{u^2}{2}}\frac{d^n}{du^n}\left[e^{-\frac{u^2}{2}}\int e^{\frac{u^2}{2}}\,du\right],$$

und diess lässt sich auch so schreiben:

$$V = C_1 e^{\frac{u^2}{2}}\frac{d^n e^{-\frac{u^2}{2}}}{du^n} + C_2 e^{\frac{u^2}{2}}\frac{d^n}{du^n}\left[e^{-\frac{u^2}{2}}\int e^{\frac{u^2}{2}}\,du\right],$$

woselbst C_1 und C_2 willkührliche Constante bedeuten. Da aber nach dem Früheren V eine ganze algebraische Function von u ist, so muss $C_2 = 0$ gesetzt werden, somit ist:

$$x^n e^{\lambda x^2} = C_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux\sqrt{2\lambda}}\,\frac{d^n e^{-\frac{u^2}{2}}}{du^n}\,du.$$

Um die Constante C_1 zu bestimmen, bemerke man, dass für $n = 0$

$$e^{\lambda x^2} = C_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux\sqrt{2\lambda}}\,.\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

wird, folglich hat man, diesen Werth mit dem in (1) stehenden vergleichend:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}};$$

demnach ist

$$x^n e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux\sqrt{2\lambda}}\,\frac{d^n e^{-\frac{u^2}{2}}}{du^n}\,du,$$

welche Formel $x^n e^{\lambda x^2}$ in der gewünschten Form $S[A_m e^{mx}]$ liefert.

Setzt man:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots . + A_n x^n = \varphi(x),$$

$$A_0 + A_1 (e^{-\frac{u^2}{2}})' + A_2 (e^{-\frac{u^2}{2}})'' + A_3 (e^{-\frac{u^2}{2}})''' + \ldots . + A_n (e^{-\frac{u^2}{2}})^{(n)} = \psi(u);$$

so ist, wie leicht einzusehen:

$$\varphi(x) e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux\sqrt{2\lambda}}\, \psi(u)\, du.$$

XXV.

Darstellung der Function

$$y = x^n e^{ax^2} \qquad (1)$$

in welcher a eine constante, aber von Null verschiedene, und n Null oder eine ganze positive Zahl bezeichnet, in der Form

$$y = \mathrm{S}[A_m e^{mx}].$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,
Professor am k. k. Polytechnikum in Wien.

Ich habe im 50. Bande des Archivs der Mathematik Seite 16, sowie im 42. Bande des Archivs Seite 105 folgenden Werth für e^{ax^2} aufgestellt:

$$e^{ax^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^2+v^2}{3}} v (C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx}) du\, dv, \quad (2)$$

in welchem λ_1 λ_2 λ_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^3 = 3a \tag{3}$$

bezeichnen, und C_1 C_2 C_3 Constante sind, zwischen welchen folgende drei Bedingungs-Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3 &= 0, \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2 &= 0, \\ (C_1 + C_2 + C_3)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v\,du\,dv &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Durch die Gleichung (2) ist somit e^{ax^3} in der Form $\mathrm{S}[A_m e^{mx}]$ gegeben.

Ich will der Kürze halber die Gleichung (2) auf nachstehende Weise schreiben:

$$e^{ax^3} = \mathrm{S}C\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v e^{\lambda uvx} du\,dv,$$

und suche sodann

$$xe^{ax^3} = \mathrm{S}C\int_0^\infty\int_0^\infty xe^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v e^{\lambda uvx} du\,dv.$$

Es ist:

$$\int xe^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v e^{\lambda uvx} du = \frac{1}{\lambda}\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} de^{\lambda uvx},$$

und wenn man das eben aufgestellte Integrale nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt, so erhält, man

$$\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{u^3+v^3}{3} + \lambda uvx} + \frac{1}{\lambda}\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3} + \lambda uvx} u^2 du.$$

Geht man nun vom unbestimmten Integrale zum bestimmten Integrale über, so erhält man:

$$\int_0^\infty xe^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v e^{\lambda uvx} du = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{v^3}{3}} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3} + \lambda uvx} u^2 du$$

und folglich hat man

$$xe^{ax^3} = -\mathrm{S}\frac{C}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} dv + \mathrm{S}\frac{C}{\lambda}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3} + \lambda uvx} u^2 du\,dv.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner der Brüche $\frac{C}{\lambda}$ mit λ^2 und beachtet zugleich, dass $\lambda^3 = 3a$ ist, so hat man:

$$xe^{ax^3} = -\mathrm{S}\frac{C\lambda^2}{3a}\int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}}dv + \mathrm{S}\frac{C\lambda^2}{3a}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}+\lambda uvx}u^2 du dv.$$

Da nun

$$C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2 = 0$$

ist, so gestattet obige Gleichung auch folgende Schreibweise:

$$xe^{ax^3} = \frac{1}{3a}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}u^2(C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 uvx})du dv \quad (5)$$

und diese gibt xe^{ax^3} in der Form $\mathrm{S}[A_m e^{mx}]$ an.

Jetzt ist es leicht $x^2e^{ax^3}$ in der Form $\mathrm{S}[A_m e^{mx}]$ aufzustellen; man braucht nämlich bloss den in (2) stehenden Ausdruck zu differenziren, und dann durch $3a$ zu dividiren. Thut man diess, so erhält man:

$$x^2e^{ax^3} = \frac{1}{3a}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}uv^2(C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3\lambda_3 e^{\lambda_3 uvx})du dv. \quad (6)$$

Um nun $x^3e^{ax^3}$ zu finden, differenzire man die Gleichung (5), wodurch man erhält:

$$3ax^3e^{ax^3} + e^{ax^3} = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}u^3v(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx})du dv.$$

Zieht man hiervon die Gleichung (2) ab, und dividirt man dann beiderseits durch $3a$, so erhält man:

$$x^3e^{ax^3} = \frac{1}{3a}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}}(u^3-1)v(C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx})du dv;$$

und auf ähnliche Weise lassen sich

$$x^4e^{ax^3}, \quad x^5e^{ax^3}, \quad x^6e^{ax^3}, \quad \ldots\ldots$$

entwickeln.

XXVI.

Einfache Berechnung der Winkel eines ebenen oder sphärischen Dreieckes aus den Seiten der Figur.

Von

Herrn Professor *C. A. Bretschneider*
in Gotha.

Zu Lösung der vorstehenden Aufgabe werden bis jetzt allgemein die bekannten Formeln angewendet:

$$\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$$

für das ebene Dreieck,

$$\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}$$

für das sphärische Dreieck, wo a, b, c die Seiten, A, B, C die Winkel der Figur bedeuten und $2s = a+b+c$ gesetzt ist. Die Rechnung nach diesen Ausdrücken ist äusserst lästig und zeitraubend, wird aber gleichwohl in allen mir bekannten Lehrbüchern vorgetragen, wie dies auch in meinem eignen „Lehrgebäude der niederen Geometrie" geschehen ist. Ich glaube daher manchen meiner Herren Collegen einen kleinen Dienst zu erweisen, wenn ich sie auf die folgende kurze Methode aufmerksam mache, auf welche ich schon vor Jahren gekommen bin, ohne ihr eben eine besondere Wichtigkeit beizulegen. Die Zeitersparniss, welche sie bei Einübung der trigonometrischen Rechnungen in den Klassen gewährt, ist gar nicht unbeträchtlich.

Es ist im ebenen Dreiecke:

$$\cot^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)} = \frac{s^2(s-a)^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\cot \tfrac{1}{2}A = \frac{s}{\Delta}(s-a) = \frac{s-a}{r}$$

wenn man mit Δ den Flächeninhalt und mit r den Halbmes[ser] des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises bezeichnet. Man [hat] daher, um aus den Seiten der Figur die Winkel derselben [zu] finden, nur folgende Formeln zu berechnen:

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad r = \frac{\Delta}{s},$$

$$\cot \tfrac{1}{2}A = \frac{s-a}{r}; \qquad \cot \tfrac{1}{2}B = \frac{s-b}{r}; \qquad \cot \tfrac{1}{2}C = \frac{s-c}{r};$$

und die Anlage der Rechnung ist etwa folgende:

$a =$ 4286,5			
$b =$ 3917,7			
$c =$ 7008,4			
$2s =$ 15212,6			
$s =$ 7606,3	$\lg s$	$=$	3,88117.
$s-a =$ 3319,8	$\lg(s-a)$	$=$	3,52111
$s-b =$ 3688,6	$\lg(s-b)$	$=$	3,56686
$s-c =$ 597,9	$\lg(s-c)$	$=$	2,77663
	$\lg \Delta^2$	$=$	13,74577
	$\lg \Delta$	$=$	6,87289

$$\lg s - \lg \Delta = \lg \frac{1}{r} = 7{,}00828. - 10$$

$$\lg \frac{1}{r} + \lg(s-a) = \lg \cot \tfrac{1}{2}A = 0{,}52939.$$

$$\lg \frac{1}{r} + \lg(s-b) = \lg \cot \tfrac{1}{2}B = 0{,}57514.$$

$$\lg \frac{1}{r} + \lg(s-c) = \lg \cot \tfrac{1}{2}C = 9{,}78491. - 10$$

$$\Delta = 7462560$$

$\tfrac{1}{2}A =$	16°	27′	50″	$A =$	32°	55′	40″
$\tfrac{1}{2}B =$	14	53	41	$B =$	29	47	22
$\tfrac{1}{2}C =$	58	38	28	$C =$	117	16	56
	89	59	59		179	59	58.

Ein Blick auf diese Rechnung, die hier in voller Ausführlichkeit vorliegt, lässt sofort die grosse Ersparniss an Zeit und Arbeit erkennen, welche dieselbe im Vergleich mit der bisher gebrauchten Rechenmethode gewährt.

Ganz in ähnlicher Weise findet man bei dem sphärischen Dreiecke, wenn man

$$\lambda^2 = \sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)$$

und

$$\frac{\sin s}{\lambda} = \cot r$$

setzt, für die Hälften der Dreieckswinkel die Werthe:

$$\cot \tfrac{1}{2}A = \cot r \sin(s-a),$$

$$\cot \tfrac{1}{2}B = \cot r \sin(s-b),$$

$$\cot \tfrac{1}{2}C = \cot r \sin(s-c).$$

Die Grösse λ bezeichnet den Rauminhalt der Pyramide, welche das dem sphärischen Dreieck zugehörige Sehnendreieck zur Grundfläche und das Kugelcentrum zur Spitze hat, während der sphärische Radius des dem sphärischen Dreiecke eingeschriebenen Kreises gleich r ist.

Bedeuten $\mathcal{A}$ und R die nämlichen Grössen für das Polardreieck, so hat man für die Lösung der umgekehrten Aufgabe, aus den Winkeln A, B, C die Seiten a, b, c des sphärischen Dreieckes zu finden, auf gleiche Weise die Formeln:

$$\mathcal{A}^2 = \sin S \sin(A-S) \sin(B-S) \sin(C-S),$$

$$\cot R = \frac{\sin S}{\mathcal{A}},$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a = \cot R \sin(A-S); \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b = \cot R \sin(B-S);$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c = \cot R \sin(C-S)$$

wo $2S = A+B+C-180^0$ gesetzt ist, eine Bezeichnung die ich um deswillen der gewöhnlich gebrauchten vorziehe, weil die Grössen $2S$, $2(A-S)$, $2(B-S)$, $2(C-S)$ zugleich die sphärischen Excesse des gegebenen Dreiecks und seiner drei Nebendreiecke ausdrücken und somit die Bestimmung der Flächeninhalte dieser Dreiecke durch die obigen Formeln nebenbei erhalten wird.

Für das sphärische Dreieck reducirt sich demnach die numerische Rechnung auf Folgendes:

$$\begin{array}{rl}
a = & 20^\circ\ 14'\ 40'' \\
b = & 39\ \ 27\ \ 12 \\
c = & 50\ \ 54\ \ 42 \\
\hline
2s = & 110\ \ 36\ \ 34 \\
\hline
s = & 55\ \ 18\ \ 17 \\
s-a = & 35\ \ \ 3\ \ 37 \\
s-b = & 15\ \ 51\ \ \ 5 \\
s-c = & 4\ \ 23\ \ 35
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\lg\sin.. & = 9{,}91497-10 \\
\lg\sin.. & = 9{,}75924-10 \\
\lg\sin.. & = 9{,}43639-10 \\
\lg\sin.. & = 8{,}88422-10 \\
\hline
\lg\lambda^2 & = 37{,}99482-40 \\
\lg\lambda & = 18{,}99741-20 \\
\lg\dfrac{\sin s}{\lambda} & = 0{,}91756 \\
\lg\cot\frac{1}{2}A & = 0{,}67680 \\
\lg\cot\frac{1}{2}B & = 0{,}35395 \\
\lg\cot\frac{1}{2}C & = 9{,}80178-10
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{2}A = 11^\circ\ 53'\ \ 9'' & A = 23^\circ\ 46'\ 18'' \\
\frac{1}{2}B = 23\ \ 52\ \ 33 & B = 47\ \ 45\ \ \ 6 \\
\frac{1}{2}C = 57\ \ 38\ \ 38 & C = 115\ \ 17\ \ 16.
\end{array}$$

Die hier gegebenen Formeln dürften auch dadurch noch einen Vorzug vor den bisher gebrauchten gewinnen, dass sie unmittelbar aus einer geometrischen Construktion entnommen werden können, sobald man nur die Berechnung des rechtwinkligen ebenen resp. sphärischen Dreieckes gelehrt hat.

XXVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

In einem sphärischen Dreiecke ABC sei D der Mittelpunkt der Seite BC und E ein solcher Punkt in derselben Seite BC, dass der Winkel BAE dem Winkel CAD gleich ist; endlich sei F der Fusspunkt des von A auf BC gefällten Perpendikels. Dann hat man in den gewöhnlichen Bezeichnungen der sphärischen Trigonometrie die folgenden Formeln:

$$1) \ldots\ldots \frac{\cos AEB}{\cos ADB} = -\cos(B+C),$$

$$2) \ldots\ldots \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}DAE = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A,$$

$$3) \ldots \operatorname{tang}EAF = \frac{\sin\frac{1}{2}c^2 - \sin\frac{1}{2}b^2}{\sin\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2 + \cos\frac{1}{2}b^2\sin\frac{1}{2}c^2}\cot(B+C).$$

J. J. Walker.

M. s. auch einen Aufsatz von V. N. Bitonti in Giornale matematiche, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Anno VIII. Settembre e Ottobre 1870. pag. 291.

Von Herrn Franz Unferdinger in Wien.

Unter der Voraussetzung dass x die unabhängige Variabele bezeichnet und y eine Function von x, soll die Gleichung integrirt werden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-a}{x^2-ay}x.$$

XXVIII.

Miscellen.

In dem 1. Hefte des 51. Theils dieses Archivs hat Herr Professor Dostor in Paris über die einen Winkel eines Dreiecks halbirende Transversale einen Satz mitgetheilt und ihn mit Hülfe einer Construction bewiesen. Ich erlaube mir folgenden einfachen Beweis dieses Satzes mitzutheilen, der keine Construction erfordert und nur einen bekannten Satz voraussetzt.

Der von Herrn Professor Dostor bewiesene Satz ist:

$$\operatorname{tang} D = \frac{b+c}{b-c} \cdot \operatorname{tang} \frac{A}{2},$$

wo D der Winkel ist, den die den Winkel A halbirende G.. mit der Gegenseite bildet, und b und c die den Winkel A .. schliessenden Seiten des Dreiecks sind.

Nun hat man bekanntlich:

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{B+C}{2}}{\operatorname{tang} \frac{B-C}{2}} = \frac{b+c}{b-c}$$

oder:

$$\frac{\operatorname{cotang} \frac{A}{2}}{\operatorname{tang} \frac{B-C}{2}} = \frac{b+c}{b-c},$$

d. h.:

$$\operatorname{cotang} \frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{b-c} \cdot \operatorname{tang} \frac{A}{2}.$$

Aber es ist:

$$D = \frac{A}{2} + C = 90^0 - \frac{B+C}{2} + C,$$

$$D = 90^0 - \frac{B-C}{2};$$

also:

$$\operatorname{tang} D = \operatorname{cotang} \frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{b-c} \cdot \operatorname{tang} \frac{A}{2}.$$

A. Krüger,
Director der Königl. Realschule I. O. in Fraustad

XXIX.

Discussion de quelques théorèmes et problèmes de géométrie analytique.

Par

Monsieur *J. Versluys*,
Professeur de Mathématiques à Groningue. (Nederland).

Dans ce qui suit se trouve

1ᵉ, la condition qui exprime qu'une droite passe par le pôle d'une autre droite par rapport à une conique dont l'équation est donnée en coordonnées trilinéaires, les problèmes analogues pour d'autres systèmes de coordonnées, et des applications de ces problèmes. Tous les résultats sont donnés dans la forme de déterminants, et la plupart est obtenue à l'aide des propriétés des déterminants.

2ᵉ, une discussion des paires de droites qui passent par les points d'intersection d'une conique et une paire de droites, avec les problèmes analogues dans d'autres systèmes de coordonnées.

3ᵉ, une application de ce qui précède à la discussion des 4 points d'intersection et des tangentes communes de 2 coniques.

4ᵉ, l'application d'une notation de Salmon aux coordonnées tangentielles et aux coordonnées quadriplanaires.

Coordonnées trilinéaires.

1. Déterminer la condition qui exprime qu'une droite passe par le pôle d'une autre droite par rapport à une conique.

La première droite soit

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0$$

et la seconde

$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0.$$

La conique

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = \varphi = 0.$$

Pour les coordonnées du pôle de la seconde droite on a

$$a\alpha + h\beta + g\gamma + \varepsilon A_2 = 0,$$
$$h\alpha + b\beta + f\gamma + \varepsilon B_2 = 0,$$
$$g\alpha + f\gamma + c\gamma + \varepsilon C_2 = 0$$

où ε est indéterminé. Et pour que la première droite passe pa
le pôle on a en outre

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0.$$

Pour qu'il y ait un système de valeurs pour α, β, γ, ε, qu
ne sont pas toutes zéro, et qui vérifient les 4 équations préc
dentes il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} a & h & g & A_2 \\ h & b & f & B_2 \\ g & f & c & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \end{vmatrix} = 0.$$

Pour le pôle de la seconde droite on trouve

$$\frac{\alpha}{\begin{vmatrix} A_2 & h & g \\ B_2 & b & f \\ C_2 & f & c \end{vmatrix}} = \frac{\beta}{\begin{vmatrix} a & A_2 & g \\ h & B_2 & f \\ g & C_2 & c \end{vmatrix}} = \frac{\gamma}{\begin{vmatrix} a & h & A_2 \\ h & b & B_2 \\ g & f & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{\varepsilon}{\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}}.$$

Quand la conique n'a pas de point double, d'où résulte que

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, on trouve pour ε une valeur qui n'est p
nulle. Alors la droite

$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0$$

a un pôle et ce pôle est un point de la droite

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0,$$

puisque

$$\begin{vmatrix} a & h & g & A_2 \\ h & b & f & B_2 \\ g & f & c & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, quand la conique n'a pas de point double, l'équation précédente est la condition nécessaire et suffisante pour que la seconde droite ait pour pôle un point de la première droite.

Remarque. Cette équation est en même temps la condition qui exprime que la première droite ait pour pôle un point de la seconde droite.

2. Quand la conique a un point double, toutes les droites qui ne passent pas par ce point double ont pour pôle ce point.

Quand une droite passe par le point double, elle a pour pôle tout point d'une autre droite qui passe aussi par le point double, et réciproquement tout point de la première droite peut être regardé comme pôle de la seconde droite. Pour que la droite

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0$$

soit le lieu des pôles de la droite

$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0$$

il faut que les trois équations qui déterminent le pôle de la seconde droite

$$a\alpha + h\beta + g\gamma + \varepsilon A_2 = 0,$$
$$h\alpha + b\beta + f\gamma + \varepsilon B_2 = 0,$$
$$g\alpha + f\beta + c\gamma + \varepsilon C_2 = 0$$

se réduisent à deux. Et toutes les valeurs qui vérifient deux des trois équations précédentes doivent verifier en même temps l'équation

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0.$$

Il faut donc que les quatre équations précédentes peuvent se réduire à deux, ce qui exige que tous les déterminants mineurs du 3me degré de

$$G_{12} = \begin{vmatrix} a & h & g & A_2 \\ h & b & f & B_2 \\ g & f & c & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \end{vmatrix} \text{ soient zéro.}$$

Nous avons donc vu: Pour que la droite

$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0$$

passe par le point double de la conique il faut qu'on ait

$$\left\| \begin{matrix} a & h & g & A_2 \\ h & b & f & B_2 \\ g & f & c & C_2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Pour que deux droites passent par le point double de la conique et qu'en même temps l'une des droites soit le lieu des pôles de l'autre il faut que tous les déterminants mineurs du 3me degré de F soient zéro.

3. Le centre d'une courbe du second degré étant le pôle de la droite à distance infinie on a, quand

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

est la droite à distance infinie, comme cas particulier du cas que la conique n'a pas de point double: Pour que la droite $A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0$ passe par le centre de la courbe il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$G_1 = \left| \begin{matrix} a & h & g & A_1 \\ h & b & f & B_1 \\ g & f & c & C_1 \\ A & B & C & \end{matrix} \right| = 0.$$

Deux droites qui passent par le centre ont chacune le pôle à distance infinie. On les appelle diamètres conjugués, quand l'une passe par le pôle de l'autre. Ainsi:

Pour que $A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0$, et $A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0$, soient deux diamètres conjugués il faut qu'on ait $G_1 = G_2 = G_{12} = 0$, où G_2 résulte de G_1, quand on remplace A_1, B_1, C_1 par A_2, B_2, C_2 et où G_{12} résulte de G_1, quand on remplace A, B, C par A_2, B_2, C_2.

Remarque. Quand l'équation d'une conique en coordonnées ordinaires est

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

et l'équation d'une droite est

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$\text{ou} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

toutes les équations de condition précédentes ne changent pas pour ce système, à l'exception de la condition qui exprime qu'une droite passe par le centre d'une conique qui n'a pas de point double. On doit substituer dans cette condition

$$A = B = 0, \qquad C = 1$$

de sorte que l'on trouve comme condition que la droite passe par le centre de la courbe

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation de condition peut se trouver directement de la manière suivante. Le centre de la courbe est déterminé par les équations

$$\left.\begin{array}{l} ax + hy + g = 0 \\ hx + by + f = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Et pour que la droite

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

passe par le centre de la courbe il faut que les valeurs de x et de y qui satisfont aux équations (α) satisfassent en même temps à l'équation (β), ce qui exige

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Coordonnées Quadriplanaires.

4. **Déterminer la condition qui exprime qu'un plan passe par le pôle d'un autre plan par rapport à une surface du second degré.**

Une raisonnement tout-à-fait analogue à celui du numéro 1 nous fait voir: Quand la surface n'a pas de point double, la condition nécessaire et suffisante pour que le plan

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0$$

passe par le pôle du plan

$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta = 0$$

par rapport à la surface

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta + 2p\alpha\delta + 2q\beta\delta + 2r\gamma\delta =$$

est

$$G_{12} = \begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ p & q & r & d & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & \end{vmatrix} = 0.$$

5. Des raisonnements analogues à ceux des numéros 2 e
nous apprennent encore:

Pour que le plan

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0$$

passe par le point double d'une surface du sec
degré il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ p & q & r & d & D_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que le plan

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0$$

passe par le centre d'une surface du second de
qui n'a pas de point double il faut qu'on ait

$$G_1 = \begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ p & q & r & d & D_1 \\ A & B & C & D & \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Quand l'équation d'une surface du sec
degré en coordonnées ordinaires est

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2nxy + 2lyz + 2mxz + 2px + 2qy + 2rz + d = ($$

et l'équation d'un plan est

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\text{ou} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

toutes les équations de condition précédentes ne changent pas pour ce système, à l'exception de la condition qui exprime qu'un plan passe par le centre d'une surface qui n'a pas de point double. On doit substituer dans cette condition

$$A = B = C = 0, \qquad D = 1$$

de sorte que l'on trouve comme condition que le plan passe par le centre de la surface

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p \\ n & b & l & q \\ m & l & c & r \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut trouver cette équation de condition d'une manière toute-à-fait analogue à la manière dont on a trouvé l'équation à la fin du numéro 3.

6. De l'équation précédente s'ensuit immédiatement que les conditions qui expriment qu'une droite passe par le centre d'une surface du second degré sont

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p \\ n & b & l & q \\ m & l & b & r \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & n & m & p \\ n & b & l & q \\ m & l & c & r \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Déterminer les conditions qui expriment que deux droites sont conjuguées par rapport à une surface du 2^d degré qui n'a pas de point double.

Pour que deux droites soient conjuguées il est nécessaire et suffisant que de chacun des plans qui déterminent la première droite le pôle soit situé dans chacun des plans qui déterminent l'autre droite.

Ainsi: pour que les droites

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0, \qquad A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta = 0$$

et

$$A_3\alpha + B_3\beta + C_3\gamma + D_3\delta = 0, \qquad A_4\alpha + B_4\beta + C_4\gamma + D_4\delta = 0$$

soient conjuguées il est nécessaire et suffisant qu'on ait $G_{13} = G_{14} = G_{23} = G_{24} = 0$. ($G_{13}$, G_{14}, G_{23}, G_{24} ont même forme que G_{12} dans le numéro 4).

7. Déterminer les conditions qui expriment qu'une droite donnée soit située dans une surface du second degré.

Les deux plans

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0,$$

$$\text{et} \quad A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta = 0$$

qui déterminent la droite sont tangents à la surface. En outre, de chacun des plans le pôle est situé dans la droite d'intersection des deux plans. L'un des deux plans contient donc le pôle de l'autre. Ainsi nous avons comme conditions nécessaires

$$G_{11} = G_{22} = G_{12} = 0.$$

Que ces conditions sont suffisantes, peut se démontrer de la manière suivante. Les deux plans étant différents, leurs points de contact ou en d'autres mots leurs pôles sont differents. Chacun des plans tangents a donc deux points de commun avec la surface, puisque chacun des plans passe par son pôle et par le pôle de l'autre plan. Mais quand un plan tangent a deux points différents de commun avec la surface, la droite qui passe par ces deux points se trouve entièrement dans le plan tangent et dans la surface. Donc la droite d'intersection des deux plans ou la droite qui joint leurs points de contact est une droite qui se trouve entièrement dans la surface.

On peut trouver les mêmes conditions de la manière suivante. Pour que la droite soit située dans la surface il est nécessaire et suffisant que tout plan qui passe par la droite soit tangent à la surface. D'un tel plan l'équation est

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta + \lambda(A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta) = 0$$

où λ peut avoir toutes les valeurs possibles. Ce plan est tangent à la surface, quand on a

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1+\lambda A_2 \\ n & b & l & q & B_1+\lambda B_2 \\ m & l & c & r & C_1+\lambda C_2 \\ p & q & r & d & D_1+\lambda D_2 \\ A_1+\lambda A_2 & B_1+\lambda B_2 & C_1+\lambda C_2 & D_1+\lambda D_2 & \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation doit être identique par rapport à λ. Or, quand on range d'après λ, le coefficient de λ^2 est G_{22}, le coefficient de λ

est $2G_{12}$, et le terme où λ ne se trouve pas est G_{11}. On trouve donc de nouveau que les conditions

$$G_{11} = G_{12} = G_{22} = 0$$

sont nécessaires et suffisantes.

8. Trois plans qui passent par le centre d'une surface du second degré s'appellent des plans diamétraux conjugués, quand de chacun des plans le pôle se trouve sur l'intersection des deux autres. Les équations de trois plans diamétraux conjugués soient

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0,$$

$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta = 0,$$

$$A_3\alpha + B_3\beta + C_3\gamma + D_3\delta = 0.$$

Ces trois plans doivent passer par le centre de la surface ce qui s'exprime par les équations

$$G_1 = G_2 = G_3 = 0.$$

De chacun des plans le pôle doit se trouver dans chacun des autres ce qui s'exprime par

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.$$

Nous avons donc: pour que les trois plans soient des plans diamétraux conjugués il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$G_1 = G_2 = G_3 = G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.$$

Coordonnées tangentielles.

9. L'équation d'une conique en coordonnées tangentielles soit

$$\varphi = a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 + 2f\mu\nu + 2g\nu\lambda + 2h\lambda\mu = 0.$$

Des raisonnements tout-à-fait analogues à ceux des numéros 1 et 2 nous apprennent les propriétés suivantes.

Quand la conique ne consiste pas en deux points, la condition nécessaire et suffisante pour que deux points

$$A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu = 0, \qquad A_2\lambda + B_2\mu + C_2\nu = 0$$

soient conjugués par rapport à la conique est

$$\begin{vmatrix} a & h & g & A_2 \\ h & b & f & B_2 \\ g & f & c & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que le point

$$A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu = 0$$

soit situé dans la droite qui passe par les deux points qui forment la conique il faut qu'on ait

$$\begin{Vmatrix} a & h & g & A_1 \\ h & b & f & B_1 \\ g & f & c & C_1 \end{Vmatrix} = 0.$$

Pour que deux points

$$A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu = 0, \qquad A_2\lambda + B_2\lambda + C_2\nu = 0$$

forment un système harmonique avec les deux points qui forment la conique, il faut que zéro soient tous les déterminants mineurs du 3me degré de

$$\begin{vmatrix} a & h & g & A_2 \\ h & b & f & B_2 \\ g & f & c & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \end{vmatrix}$$

10. L'équation du centre est $\frac{\partial\varphi}{\partial A}\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial B}\mu + \frac{\partial\varphi}{\partial C}\nu = 0$. La droite A_1, B_1, C_1 passe par le centre, quand on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A}A_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial B}B_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial C}C_1 = 0.$$

De même $A_1B_1C_1$ passe par le pôle de $A_2B_2C_2$ quand on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A_1}A_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial B_1}B_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial C_1}C_2 = 0.$$

Pour que les deux droites $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ soient des diamètres conjugués il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A_1}A_2+\frac{\partial\varphi}{\partial B_1}B_2+\frac{\partial\varphi}{\partial C_1}C_2=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A}A_1+\frac{\partial\varphi}{\partial B}B_1+\frac{\partial\varphi}{\partial C}C_1=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A}A_2+\frac{\partial\varphi}{\partial B}B_2+\frac{\partial\varphi}{\partial C}C_2=0.$$

Coordonnées Planaires.

11. L'équation d'une surface du second degré en coordonnées planaires soit

$$\varphi=a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2+d\varrho^2+2l\mu\nu+2m\nu\lambda+2n\lambda\mu+2p\lambda\varrho+2q\mu\varrho+2r\nu\varrho=0.$$

Les propriétés que nous avons trouvées pour l'équation rapportée à des coordonnées quadriplanaires sont pour le système de coordonnées planaires les suivantes.

Quand la surface n'est pas une conique, la condition nécessaire et suffisante pour que les points

$$A_1\lambda+B_1\mu+C_1\nu+D_1\varrho=0$$

$$A_2\lambda+B_2\mu+C_2\nu+D_2\varrho=0$$

soient conjugués par rapport à la surface est

$$G_{12}=\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1\\ n & b & l & q & B_1\\ m & l & c & r & C_1\\ p & q & r & d & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & \end{vmatrix}=0.$$

Pour que le point

$$A_1\lambda+B_1\mu+C_1\nu+D_1\varrho=0$$

soit situé dans le plan où se trouvent tous les points d'une surface du second degré il faut qu'on ait

$$\begin{Vmatrix} a & n & m & p & A_1\\ n & b & l & q & B_1\\ m & l & c & r & C_1\\ p & q & r & d & D_1 \end{Vmatrix}=0.$$

Pour que le plan $A_1B_1C_1D_1$ passe par le centre d'une surface du second degré il faut qu'on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A} A_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial B} B_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial C} C_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial D} D_1 = 0.$$

Pour que le plan $A_1B_1C_1D_1$ passe par le pôle du pl
$A_2B_2C_2D_2$ il faut qu'on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A_1} A_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial B_1} B_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} C_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial D_1} D_2 = 0.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu
les deux droites

$$A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu + D_1\varrho = 0,$$

$$A_2\lambda + B_2\mu + C_2\nu + D_2\varrho = 0,$$

et

$$A_3\lambda + B_3\mu + C_3\nu + D_3\varrho = 0,$$

$$A_4\lambda + B_4\mu + C_4\nu + D_4\varrho = 0$$

soient conjuguées par rapport à une surface du
degré qui n'est pas une conique, sont

$$G_{13} = G_{14} = G_{23} = G_{24} = 0.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour q
la droite

$$A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu + D_1\varrho = 0,$$

$$A_2\lambda + B_2\mu + C_2\nu + D_2\varrho = 0$$

soit située dans une surface du second degré sont

$$G_{11} = G_{22} = G_{12} = 0.$$

Quand la droite est donnée comme l'intersection des pla

$$A_1B_1C_1D_1, \qquad A_2B_2C_2D_2,$$

les conditions précédentes deviennent

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A_1} A_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial B_1} B_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} C_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial D_1} D_2 = 0,$$

$$\varphi(A_1B_1C_1D_1) = \varphi(A_2B_2C_2D_2) = 0.$$

Pour que les trois plans

$$A_1B_1C_1D_1 \qquad A_2B_2C_2D_2, \qquad A_3B_3C_3D_3$$

soient des plans diamétraux conjugués il est néce
saire et suffisant qu'on ait

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A}A_1+\frac{\partial\varphi}{\partial B}B_1+\frac{\partial\varphi}{\partial C}C_1+\frac{\partial\varphi}{\partial D}D_1=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A}A_2+\frac{\partial\varphi}{\partial B}B_2+\frac{\partial\varphi}{\partial C}C_2+\frac{\partial\varphi}{\partial D}D_2=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A}A_3+\frac{\partial\varphi}{\partial B}B_3+\frac{\partial\varphi}{\partial C}C_3+\frac{\partial\varphi}{\partial D}D_3=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A_1}A_2+\frac{\partial\varphi}{\partial B_1}B_2+\frac{\partial\varphi}{\partial C_1}C_2+\frac{\partial\varphi}{\partial D_1}D_2=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A_1}A_3+\frac{\partial\varphi}{\partial B_1}B_3+\frac{\partial\varphi}{\partial C_1}C_3+\frac{\partial\varphi}{\partial D_1}D_3=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A_2}A_3+\frac{\partial\varphi}{\partial B_2}B_3+\frac{\partial\varphi}{\partial C_2}C_3+\frac{\partial\varphi}{\partial D_2}D_3=0.$$

Coordonnées trilinéaires.

12. L'équation d'une conique passant par les quatre points ntersection des coniques

$$\varphi = a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta=0,$$

$$\psi = a_1\alpha^2+b_1\beta^2+c_1\gamma^2+2f_1\beta\gamma+2g_1\gamma\alpha+2h_1\alpha\beta=0$$

ıt s'écrire dans la forme

$$\varphi+\lambda\psi=0$$

λ est indéterminé. Quand on veut déterminer λ en sorte que

$$\varphi+\lambda\psi=0$$

un point double, on trouve une équation du 3me degré en λ.

$$\begin{vmatrix} a+a_1\lambda & h+h_1\lambda & g+g_1\lambda \\ h+h_1\lambda & b+b_1\lambda & f+f_1\lambda \\ g+g_1\lambda & f+f_1\lambda & c+c_1\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Il y a donc trois coniques qui passent par les points d'inter- :tion de $\varphi=0$ et de $\psi=0$ et qui ont un point double. Quand $=0$ a un point double, le coefficient de λ^3 dans l'équation pré- lente est zéro. Une des valeurs de λ est ∞ alors ou en ,utres mots l'une des trois coniques coïncide avec ψ. Les tres valeurs de λ peuvent se trouver à l'aide de l'équation écédente. Mais ces deux valeurs sont les racines d'une équation

plus simple que l'on obtient de la manière suivante. $\psi = 0$ ayant un point double ψ peut s'écrire dans la forme d'un produit

$$2(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)(A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma).$$

Pour que

$$\varphi + 2\lambda(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)(A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma) = \varphi + 2\lambda xy = 0$$

ait un point double il faut que le discriminant de $\varphi + \lambda xy$ soit zéro. Ce discriminant est la résultante des équations

$$\begin{aligned}
a\alpha + h\beta + g\gamma + \lambda x A_2 + \lambda y A_1 &= 0\\
h\alpha + b\beta + f\gamma + \lambda x B_2 + \lambda y B_1 &= 0\\
g\alpha + f\beta + c\gamma + \lambda x C_2 + \lambda y C_1 &= 0\\
A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma - x \qquad &= 0\\
A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma \qquad - y &= 0.
\end{aligned}$$

La condition pour que

$$\varphi + 2\lambda xy = 0$$

ait un point double est donc

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \lambda A_2 & \lambda A_1 \\ h & b & f & \lambda B_2 & \lambda B_1 \\ g & f & c & \lambda C_2 & \lambda C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & -1 & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant consiste en trois parties:

1e. la partie dans laquelle aucun des éléments -1 ne trouve;

2e. la partie dans laquelle les deux éléments -1 trouvent;

3e. la partie dans laquelle se trouve l'un des éléments -

Nous avons donc

$$\begin{vmatrix} a & h & g & A_2 & A_1 \\ h & b & f & B_2 & B_1 \\ g & f & c & C_2 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \end{vmatrix} \lambda^2 - 2 \begin{vmatrix} a & h & g & A_2 \\ h & b & f & B_2 \\ g & f & c & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \end{vmatrix} \lambda + \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} =$$

ou

$$\begin{vmatrix} h & g & A_1 & A_2 \\ b & f & B_1 & B_2 \\ f & c & C_1 & C_2 \\ B_1 & C_1 & & \\ B_2 & C_2 & & \end{vmatrix} \lambda^2 + 2 \begin{vmatrix} a & h & g & A_2 \\ h & b & f & B_2 \\ g & f & c & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \end{vmatrix} \lambda - \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0,$$

$$V\lambda^2 + 2W\lambda - H = 0.$$

Discussion de cette équation.

$V = 0$ est la condition qui exprime que le point d'intersection des droites x et y soit un point de φ.

$W = 0$ est la condition qui exprime que le pôle de x par rapport à φ soit un point de y.

$H = 0$ est la condition qui exprime que φ ait un point double.

Les racines de l'équation quadratique coïncident, quand

$$W^2 + VH = 0;$$

es sont réelles, quand

$$W^2 + VH > 0;$$

es sont imaginaires, quand

$$W^2 + VH < 0.$$

Mais on a identiquement

$$\begin{vmatrix} a & h & g & A_1 \\ h & b & f & B_1 \\ g & f & c & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & h & g & A_2 \\ h & b & f & B_2 \\ g & f & c & C_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \end{vmatrix} - W^2 = V \times H,$$

$$X \times Y - W^2 = V \times H,$$

$$W^2 + VH = XY.$$

D'après ce qui précède les deux valeurs de λ et par conséent les deux coniques coïncident, quand on a $X = 0$, ou $= 0$, ou $X = Y = 0$, c'est à dire, quand l'une des droites et y ou toutes les deux sont tangentes à φ.

Les deux coniques sont imaginaires, quand $XY < 0$, c'est à dire, quand X et Y ont des signes contraires, ou quand les points d'intersection de φ et de l'une des deux droites x et y sont réels tandis que les points d'intersection de φ et de l'autre des deux droites sont imaginaires.

Les deux coniques sont réelles, quand $XY > 0$, c'est à dire quand X et Y ont même signe, ou quand les quatre points d'intersection de φ et des deux droites x et y sont tous réels ou qu'ils sont tous imaginaires.

Quand on a $X > 0$ et $Y > 0$ les quatre points d'intersection sont réels et les droites qui passent par ces points sont réelles aussi. Les deux coniques sont donc deux paires de droites réelles.

Quand on a $X < 0$ et $Y < 0$ les points d'intersection sont imaginaires.

13. **Déterminer les conditions qui expriment que de l'une des deux coniques le point double soit situé dans la droite à distance infinie**, ou en d'autres mots déterminer les conditions qui expriment que l'une des deux coniques consiste en deux droites parallèles ou en un seul point situé à distance infinie.

Les valeurs de α, β, γ, x, y, qui satisfont au système d'équations linéaires du numéro précédent doivent satisfaire en même temps à l'équation de la droite à distance infinie

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Outre la condition du numéro précédent, on a donc

$$\begin{vmatrix} a & h & g & A_2\lambda & A_1\lambda \\ h & b & f & B_2\lambda & B_1\lambda \\ A & B & C & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & -1 & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, quand on développe comme dans le numéro précédent,

$$\begin{vmatrix} a & h & g & A_1 & A_2 \\ h & b & f & B_1 & B_2 \\ A & B & C & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \end{vmatrix} \lambda^2 + \begin{vmatrix} a & h & g & A_2 \\ h & b & f & B_2 \\ A & B & C & \\ A_1 & B_1 & C_1 & \end{vmatrix} \lambda + \begin{vmatrix} a & h & g & A_1 \\ h & b & f & B_1 \\ A & B & C & \\ A_2 & B_2 & C_2 & \end{vmatrix} \lambda - \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

$$= 0,$$

ou
$$V_1\lambda^2 + 2W_1\lambda - H_1 = 0$$
ensemble avec la condition trouvée dans le numéro précédent
$$V\lambda^2 + 2W\lambda - H = 0.$$

Pour que ces deux équations puissent être vérifiées par une même valeur de λ, il faut qu'un système de valeurs de λ^3, λ^2, λ vérifie en même temps les équations

$$\begin{array}{llll} V\lambda^3 & +2W\lambda^2 - & H\lambda & =0 \\ & V\lambda^2 & +2W\lambda - H & =0 \\ V_1\lambda^3 & +2W_1\lambda^2 - & H_1\lambda & =0 \\ & V_1\lambda^2 & +2W_1\lambda - H_1 & =0 \end{array}$$

ce qui exige qu'on ait entre les coefficients de φ, de x, et de y la relation

$$\begin{vmatrix} V & 2W & -H & \\ & V & 2W & -H \\ V_1 & 2W_1 & -H_1 & \\ & V_1 & 2W_1 & -H_1 \end{vmatrix} = 0.$$

14. Pour que les deux coniques aient chacune un point double situé dans la droite à distance infinie il faut que les équations

$$V_1\lambda^2 + 2W_1\lambda - H_1 = 0,$$
$$V\lambda^2 + 2W\lambda - H = 0$$

soient identiques, ce qui exige

$$\frac{V_1}{V} = \frac{W_1}{W} = \frac{H_1}{H}.$$

Des quatre points d'intersection de deux coniques x et y.

15. Regardons les droites qui passent par les points d'intersection. Une paire de droites passant par les quatre points d'intersection est représentée par l'équation

$$x + \lambda y = 0,$$

où λ est l'une des racines de l'équation.

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & h+\lambda h_1 & g+\lambda g_1 \\ h+\lambda h_1 & b+\lambda b_1 & f+\lambda f_1 \\ g+\lambda g_1 & f+\lambda f_1 & c+\lambda c_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou
$$\Delta + \varphi\lambda + \varphi_1\lambda^2 + \Delta_1\lambda^3 = 0.$$

A l'égard des points d'intersection Salmon dit dans ses Sections coniques:

$$\varphi^2\varphi_1^2 + 18\Delta\Delta_1\varphi\varphi_1 - 27\Delta^2\Delta_1^2 - 4\Delta\varphi_1^3 - 4\Delta_1\varphi^3 = 0$$

is the condition that the two conics should touch.

When it is positive the roots of the equation in λ are all real. When it is negative two of the roots are imaginary.

In the latter case, x and y intersect in 2 real and 2 imaginary points. In the former case, they intersect in 4 real or 4 imaginary points. These last two cases have not been distinguished by any simple criterion.

On peut discerner entre les deux cas de la manière suivante, bien simple:

Quand les quatre points d'intersection sont réels, les trois paires de droites qui passent par ces points sont réelles aussi.

Quand les quatre points d'intersection sont imaginaires, deux paires de droites sont imaginaires et une paire est réelle.

Dans le premier cas, d'après Tome L page 161, on doit avoir, quand on substitue pour λ une des racines de l'équation du 3me degré en λ,

$$P = \begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & h+\lambda h_1 & g+\lambda g_1 & A \\ h+\lambda h_1 & b+\lambda b_1 & f+\lambda f_1 & B \\ g+\lambda g_1 & f+\lambda f_1 & c+\lambda c_1 & C \\ A & B & C & \end{vmatrix} > 0,$$

ou

$$P = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & h+\lambda h_1 \\ h+\lambda h_1 & b+\lambda b_1 \end{vmatrix} < 0.$$

Or

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & h+\lambda h_1 & g+\lambda g_1 \\ h+\lambda h_1 & b+\lambda b_1 & f+\lambda f_1 \\ g+\lambda g_1 & f+\lambda f_1 & c+\lambda c_1 \end{vmatrix}$$

etant zéro, quand P n'est pas zéro, il a le signe contraire de

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & h+\lambda h_1 \\ h+\lambda h_1 & b+\lambda b_1 \end{vmatrix}.$$

On a donc pour quatre points d'intersection réels

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & h+\lambda h_1 \\ h+\lambda h_1 & b+\lambda b_1 \end{vmatrix} < 0,$$

quand on prend pour λ une des racines de l'équation du 3me degré en λ.

De même pour quatre points d'intersection imaginaires

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & h+\lambda h_1 \\ h+\lambda h_1 & b+\lambda b_1 \end{vmatrix}$$

est négatif pour l'une des trois valeurs de λ et positif pour les autres valeurs de λ.

16. Appliquons ce qui précède aux points d'intersection de

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 2\gamma^2 = 0$$

et

$$-2\beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\gamma + 6\beta\gamma + \gamma^2 = 0.$$

Pour former l'équation du 3me degré en λ on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda & -2(1+\lambda) \\ 1+\lambda & -(1+2\lambda) & +3(1+\lambda) \\ -2(1+\lambda) & +3(1+\lambda) & 2+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou après quelques réductions

$$-(21 + 50\lambda + 35\lambda^2 + 7\lambda^3) = 0,$$

ou

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + \frac{50}{7}\lambda + 3 = 0.$$

$$5^2 - \frac{50^2}{7^2} + 18.3.5.\frac{50}{7} - 27.9 - 4.\frac{50^3}{7^3} - 4.3.5^3$$

étant positif les trois valeurs de λ sont réelles, et d'après la règle de Descartes ces valeurs sont négatives.

Reste encore à discerner si les quatre points d'intersection sont réels ou imaginaires.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda \\ 1+\lambda & -(1+2\lambda) \end{vmatrix} = -(1+2\lambda) - (1+\lambda)^2 = -(\lambda^2 + 4\lambda + 2) = Q$$

Q est égal à -2 pour $\lambda = 0$, donc

Q est négatif de $\lambda = 0$ à $\lambda = -2 + \sqrt{2}$,

Q est positif de $\lambda = -2 + \sqrt{2}$ à $\lambda = -2 - \sqrt{2}$,

Q est négatif pour $\lambda < -2 - \sqrt{2}$.

De ceci résulte que les quatre points d'intersection sont réels, quand aucune des trois valeurs de λ ne se trouve entre

$$-2+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad -2-\sqrt{2},$$

et que ces points sont imaginaires, quand deux des valeurs de λ se trouvent entre les nombres précédents.

Le théorème de Sturm nous apprend que des trois valeurs de λ deux se trouvent entre

$$-2+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad -2-\sqrt{2},$$

d'où suit que les quatre points d'intersection sont tous réels.

Autre exemple. Soient données les coniques

$$\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma+4\gamma\alpha-6\alpha\beta=0$$

$$2\alpha^2-\beta^2 \qquad -4\beta\gamma \qquad +2\alpha\beta=0.$$

L'équation du 3me degré en λ est

$$\begin{vmatrix} 1+2\lambda & -3+\lambda & 2 \\ -3+\lambda & 2-\lambda & -1-2\lambda \\ 2 & -1-2\lambda & -1 \end{vmatrix}=0.$$

$$\begin{vmatrix} 1+2\lambda & -3+\lambda \\ -3+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}=-7+9\lambda-3\lambda^2=0$$

ayant ses racines imaginaires le premier membre de cette équation ne saurait changer de signe. Et ce premier membre étant négatif pour $\lambda=0$ il est toujours négatif. Mais alors les trois paires de droites et par conséquent les quatre points d'intersection sont réels.

17. A présent la question se présente ce qui arrive, quand le premier membre de l'équation du 2^d degré est toujours positif. Mais ce membre a la forme

$$(a+b\lambda)(c+d\lambda)-(e+f\lambda)^2$$

et quand il a même signe pour toutes les valeurs de λ, il est négatif pour

$$\lambda=-\frac{a}{b} \quad \text{et pour} \quad \lambda=-\frac{c}{d};$$

ou quand on a $b=d=0$ et ac positif, on peut pendre λ assez grand pour avoir

$$(e+f\lambda)^2>ac.$$

Nous avons donc: Quand le déterminant mineur du 2^d degré a toujours même signe, il est négatif, et

Quand ce déterminant mineur est positif pour une certaine valeur de λ, il n'a pas toujours même signe.

18. D'après tout ce qui précède nous avons la règle suivante pour déterminer combien des quatre points d'intersection de deux coniques sont réels.

Formez le déterminant P du 3me degré en λ.

Egalez à zéro un déterminant mineur symétrique du 2^d degré de P. Quand les racines de cette équation du 2^d degré sont imaginaires, les quatre points d'intersection sont réels.

Quand ces racines sont réelles, déterminez les et voyez entre quelles valeurs de λ le premier membre de l'équation quadratique est positif et entre quelles valeurs de λ il est négatif.

Réduisez P à la forme ordinaire d'une équation et formez une série de fonctions de Sturm. Quand deux racines de $P=0$ sont imaginaires, deux points d'intersection sont réels et deux points d'intersection sont imaginaires.

Quand les racines de $P=0$ sont toutes réelles, voyez si deux de ces racines se trouvent entre les limites des valeurs qui rendent positif le premier membre de l'équation quadratique. Si bien, les points d'intersection sont tous imaginaires, si non, ils sont tous réels.

Coordonnées tangentielles.

19. L'équation d'une conique qui est tangente aux quatre tangentes communes des coniques

$$\varphi = a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 + 2f\mu\nu + 2g\nu\lambda + 2h\lambda\mu = 0$$

$$\psi = a_1\lambda^2 + b_1\mu^2 + c_1\nu^2 + 2f_1\mu\nu + 2g_1\nu\lambda + 2h_1\lambda\mu = 0$$

peut s'écrire dans la forme

$$\varphi + p\psi = 0$$

où p est indéterminé. Quand on veut déterminer p en sorte que tous les points de

$$\varphi + p\psi = 0$$

soient situés en ligne droite, on trouve une équation du 3me degré en p.

$$\begin{vmatrix} a+a_1p & h+h_1p & g+g_1p \\ h+h_1p & b+b_1p & f+f_1p \\ g+g_1p & f+f_1p & c+c_1p \end{vmatrix} = 0.$$

Il y a donc trois coniques qui touchent aux tangentes communes de φ et de ψ et dont tous les points sont situés en ligne droite. Quand $\psi = 0$ consiste en deux points, le coefficient de p^3 dans l'équation précédente est zéro. Une des valeurs de p est ∞ alors, ou, en d'autres mots, une des trois coniques coïncide avec ψ. Les autres valeurs de p peuvent se trouver de l'équation précédente. Mais ces deux valeurs sont les racines d'une équation plus simple que l'on obtient de la manière suivante.

$\psi = 0$ consistant en deux points, ψ peut s'écrire dans la forme

$$2(A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu)(A_2\lambda + B_2\mu + C_2\nu) = 2xy.$$

Pour que

$$\varphi + 2pxy = 0$$

consiste en deux points il faut que le discriminant de

$$\varphi + 2pxy$$

soit zéro. Poursuivant ces raisonnements analogues à ceux du numéro 12 on trouve que les deux valeurs de p sont les racines de l'équation

$$Vp^2 + 2Wp - H = 0.$$

Discussion de cette équation.

$V = 0$ est la condition qui exprime que la droite qui passe par les points x et y soit tangente à φ.

$W = 0$ est la condition qui exprime que x et y soient deux points conjugués par rapport à φ.

$H = 0$ est la condition qui exprime que φ consiste en deux points.

Les racines de l'équation du 2^d degré en p, coïncident, quand

$$W^2 + VH = 0;$$

elles sont réelles, quand

$$W^2 + VH > 0;$$

elles sont imaginaires, quand

$$W^2 + VH < 0.$$

Mais on a tout comme dans le numéro 12

$$W^2 + VH = XY.$$

D'après ce qui précède les deux valeurs de p et par conséquent les deux coniques coïncident, quand on a, $X = 0$, ou $Y = 0$, ou $X = Y = 0$, c'est-à-dire, quand l'un des points x et y ou tous les deux sont des points de φ.

Les deux coniques sont imaginaires, quand $XY < 0$, c'est-à-dire, quand X et Y ont des signes contraires, ou quand l'un des deux points x et y est extérieur à φ et que l'autre est intérieur à φ.

Les deux coniques sont réelles, quand on a $XY > 0$, c'est-à-dire quand X et Y ont même signe ou quand x et y sont tous les deux extérieurs à φ ou qu'ils sont tous les deux intérieurs à φ.

Quand on a $X > 0$ et $Y > 0$, les quatre droites qui passent par x ou par y et qui sont tangentes à φ, sont réelles, et les deux couples de points formés par l'intersection de ces tangentes sont réels aussi.

Quand on a $X < 0$ et $Y < 0$, les quatre tangentes sont imaginaires, en même temps que les deux paires de points. Mais les droites passant par l'une de ces paires de points sont réelles.

Des quatre tangentes communes de deux coniques x et y.

20. Regardons les points d'intersection des quatre tangentes. Une paire de points d'intersection des quatre tangentes est représentée par l'équation

$$x + py = 0,$$

où p est l'une des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a+pa_1 & h+ph_1 & g+pg_1 \\ h+ph_1 & b+pb_1 & f+pf_1 \\ g+pg_1 & f+pf_1 & c+pc_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou $$\varDelta+\varphi p+\varphi_1 p^2+\varDelta' p^3=0.$$

L'analogue de ce qui est dit dans le numéro 15 à l'égard des quatre points d'intersection de deux coniques est ce qui suit.

Quand l'équation précédente a deux racines imaginaires, x et y ont deux tangentes communes réelles.

Quand l'équation précédente a deux racines coïncidentes, les coniques x et y se touchent.

Quand l'équation précédente a trois racines réelles, les quatre tangentes sont toutes réelles ou toutes imaginaires.

Les deux derniers cas peuvent se distinguer de la manière suivante:

Quand les quatre tangentes sont réelles, les trois paires de points d'intersection de ces tangentes sont réelles aussi.

Quand les quatre tangentes sont imaginaires, deux paires de points sont imaginaires et une paire est réelle.

Dans le premier cas d'après Theil LI page 53 on doit avoir, quand on substitue pour p une des racines de l'équation du 3me degré en p,

$$\begin{vmatrix} a+pa_1 & h+ph_1 \\ h+ph_1 & b+pb_1 \end{vmatrix} < 0.$$

On a donc pour quatre tangentes réelles

$$\begin{vmatrix} a+pa_1 & h+ph_1 \\ h+ph_1 & b+pb_1 \end{vmatrix} < 0,$$

quand on prend pour p une racine quelconque de l'équation du 3me degré en p.

De même pour quatre tangentes imaginaires

$$\begin{vmatrix} a+pa_1 & h+ph_1 \\ h+ph_1 & b+pb_1 \end{vmatrix}$$

est négatif pour l'une des trois valeurs de p et positif pour les autres valeurs de p.

Remarque. L'application de ce qui précède aux cas particuliers est tout-à-fait analogue à l'application dans le numéro 16, et conduit à un résultat qui ne diffère pas de ce qui se trouve dans le numéro 18, quand on dit tangente au lieu de point d'intersection.

21. A l'égard de la discussion des quatre points d'intersection de deux coniques rapportées à des coordonnées trilinéaires et de la discussion des quatre tangentes communes de deux coniques rapportées à des coordonnées tangentielles il est à remarquer que pour les mêmes coniques on doit trouver deux tangentes réelles quand on trouve deux points d'intersection réels, et réciproquement.

Quand l'une des deux coniques est intérieure à l'autre, on doit trouver les tangentes communes toutes imaginaires en même temps que les quatre points d'intersection.

Quand l'une des deux coniques est extérieure à l'autre, on doit trouver les tangentes réelles et les points d'intersection imaginaires.

Quand les deux coniques ont les quatre points d'intersection réels, elles doivent avoir en même temps les quatre tangentes communes réelles.

Et réciproquement; quand les quatre points d'intersection sont réels en même temps que les quatre tangentes communes, l'une des deux coniques est intérieure à l'autre;

quand les quatre points d'intersection sont imaginaires, et que les tangentes communes sont réelles, chacune des deux coniques est extérieure à l'autre.

22. Quand les équations de deux coniques sont rapportées à des coordonnées trilinéaires, pour appliquer ce qui est dit dans le numéro précédent, il nous faut une équation du 3me degré en λ pour discuter les points d'intersection; cette équation se trouve dans le numéro 15. Et il nous faut une équation du 3me degré en p pour discuter les tangentes communes. Quand les équations des coniques sont rapportées à des coordonnées trilinéaires l'équation du 3me degré en p est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta}{\partial a}+p\frac{\partial \Delta_1}{\partial a_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial h}+p\frac{\partial \Delta_1}{\partial h_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial g}+p\frac{\partial \Delta_1}{\partial g_1} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial h}+p\frac{\partial \Delta_1}{\partial h_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial b}+p\frac{\partial \Delta_1}{\partial b_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial f}+p\frac{\partial \Delta_1}{\partial f_1} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial g}+p\frac{\partial \Delta_1}{\partial g_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial f}+p\frac{\partial \Delta_1}{\partial f_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial c}+p\frac{\partial \Delta_1}{\partial c_1} \end{vmatrix} = 0$$

ou
$$\Delta^2+p\Delta\varphi_1+p^2\Delta_1\varphi+p^3\Delta_1{}^2=0.$$

Des coefficients de l'équation en λ

$$\varDelta + \varphi\lambda + \varphi_1\lambda^2 + \varDelta_1\lambda^3 = 0$$

on peut donc calculer les coefficients de l'équation en p.

Coordonnées quadriplanaires.

23. L'équation d'une surface du 2^d degré passant par la courbe d'intersection des surfaces

$$\varphi = a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2+2l\beta\gamma+2m\gamma\alpha+2n\alpha\beta+2p\alpha\delta+2q\beta\delta+2r\gamma\delta = 0$$

$$\psi = a_1\alpha^2+b_1\beta^2+c_1\gamma^2+d_1\delta^2+2l_1\beta\gamma+2m_1\gamma\alpha+2n_1\alpha\beta+2p_1\alpha\delta+2q_1\beta\delta+2r_1\gamma\delta = 0$$

peut s'écrire dans la forme

$$\varphi + \lambda\psi = 0$$

λ étant indéterminé. Quand on veut déterminer λ en sorte que

$$\varphi + \lambda\psi = 0$$

ait un point double, on trouve une équation du 4me degré en λ

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & n+\lambda n_1 & m+\lambda m_1 & p+\lambda p_1 \\ n+\lambda n_1 & b+\lambda b_1 & l+\lambda l_1 & q+\lambda q_1 \\ m+\lambda m_1 & l+\lambda l_1 & c+\lambda c_1 & r+\lambda r_1 \\ p+\lambda p_1 & q+\lambda q_1 & r+\lambda r_1 & d+\lambda d_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Il y a donc quatre surfaces du second degré qui passent par la courbe d'intersection de $\varphi = 0$ et de $\psi = 0$ et qui ont un point double. Quand $\psi = 0$ consiste en deux plans, tous les déterminants mineurs du 3me degré de

$$\begin{vmatrix} a_1 & n_1 & m_1 & p_1 \\ n_1 & b_1 & l_1 & q_1 \\ m_1 & l_1 & c_1 & r_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 & d_1 \end{vmatrix}$$

sont zéro. Par conséquent dans l'équation précédente le coefficient de λ^4 et celui de λ^3 sont zéro, ou en d'autres mots deux des quatre surfaces coïncident avec ψ. Les autres valeurs de λ peuvent se trouver de l'équation précédente. Mais ces deux valeurs sont les racines d'une équation plus simple qu'on obtient de la manière suivante.

$\psi = 0$ consistant en deux plans ψ peut s'écrire dans la forme .n produit

$$2(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta)(A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta).$$

Pour que la surface

$$+ 2\lambda(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta)(A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta) = \varphi + 2\lambda xy = 0$$

it un point double il faut que le discriminant de $\varphi + \lambda xy$ soit éro. Ce discriminant est la résultante des equations

$$\begin{array}{l}
a\alpha + n\beta + m\gamma + p\delta + \lambda x A_2 + \lambda y A_1 = 0\\
n\alpha + b\beta + l\gamma + q\delta + \lambda x B_2 + \lambda y B_1 = 0\\
m\alpha + l\beta + c\gamma + r\delta + \lambda x C_2 + \lambda y C_1 = 0\\
p\alpha + q\beta + r\gamma + d\delta + \lambda x D_2 + \lambda y D_1 = 0\\
A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta - x = 0\\
A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta - y = 0.
\end{array}$$

La condition pour que

$$\varphi + \lambda xy = 0$$

t un point double est donc

$$\begin{vmatrix}
a & n & m & p & \lambda A_2 & \lambda A_1\\
n & b & l & q & \lambda B_2 & \lambda B_1\\
m & l & c & r & \lambda C_2 & \lambda C_1\\
p & q & r & d & \lambda D_2 & \lambda D_1\\
A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & -1 & \\
A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & -1
\end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant consiste en trois parties:

1e. la partie dans laquelle aucun des éléments -1 ne se trouve;

2e. la partie dans laquelle les deux éléments -1 se trouvent;

3e. la partie dans laquelle se trouve l'un des éléments -1.

Nous avons donc

$$\begin{vmatrix}
a & n & m & p & A_2 & A_1\\
n & b & l & q & B_2 & B_1\\
m & l & c & r & C_2 & C_1\\
p & q & r & d & D_2 & D_1\\
A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\
A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & &
\end{vmatrix} \lambda^2 - 2 \begin{vmatrix}
a & n & m & p & A_2\\
n & b & l & q & B_2\\
m & l & c & r & C_2\\
p & q & r & d & D_2\\
A_1 & B_1 & C_1 & D_1 &
\end{vmatrix} \lambda + \begin{vmatrix}
a & n & m & p\\
n & b & l & q\\
m & l & c & r\\
p & q & r & d
\end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A_2 \\ n & b & l & q & B_1 & B_2 \\ m & l & c & r & C_1 & C_2 \\ p & q & r & d & D_1 & D_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & \end{vmatrix} \lambda^2 + 2 \begin{vmatrix} a & n & m & p & A_2 \\ n & b & l & q & B_2 \\ m & l & c & r & C_2 \\ p & q & r & d & D_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \end{vmatrix} \lambda - \begin{vmatrix} a & n & m & p \\ n & b & l & q \\ m & l & c & r \\ p & q & r & d \end{vmatrix} = 0,$$

ou $$V\lambda^2 + 2W\lambda - H = 0.$$

Discussion de cette équation.

$V = 0$ est la condition qui exprime que la droite d'intersection des plans x et y soit tangente à φ.

$W = 0$ est la condition qui exprime que le pôle de x par rapport à φ soit un point de y.

$H = 0$ est la condition qui exprime que φ ait un point double.

Les racines de l'équation du 2[d] degré en λ coïncident, quand

$$W^2 + VH = 0;$$

elles sont réelles, quand

$$W^2 + VH > 0;$$

elles sont imaginaires, quand

$$W^2 + VH < 0.$$

Mais on a identiquement

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ p & q & r & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & n & m & p & A_2 \\ n & b & l & q & B_2 \\ m & l & c & r & C_2 \\ p & q & r & d & D_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & \end{vmatrix} - W^2 = V \times H$$

ou $$X \times Y - W^2 = V \times H,$$

ou $$W^2 + VH = XY.$$

D'après ce qui précède les deux valeurs de λ et par conséquent les deux surfaces coïncident, quand on a $X = 0$, ou $Y = 0$, ou $X = Y = 0$; c'est-à-dire, quand l'un des plans x et y ou tous les deux sont tangents à φ.

Les deux surfaces sont imaginaires, quand on a $XY < 0$, c'est-à-dire, quand la courbe d'intersection de φ et de l'un des deux plans est réelle, tandis que la courbe d'intersection de φ et de l'autre des deux plans est imaginaire.

Les deux surfaces sont réelles, quand on a $XY > 0$, c'est-à-dire, quand les courbes d'intersection de φ et des deux plans sont réelles toutes les deux ou qu'elles sont imaginaires toutes les deux.

Quand la droite d'intersection des plans donnés est tangente à la surface, on a $V = 0$, et l'équation du 2^d degré en λ devient

$$2\lambda W - H = 0,$$

de sorte qu'il y a une seule surface à point double et cette surface est réelle. L'autre des deux surfaces correspond à $\lambda = \infty$, c'est-à-dire qu'elle coïncide avec les deux plans donnés.

Quand $H = 0$, la surface $\varphi = 0$ a un point double et l'équation

$$\lambda^2 V + 2\lambda W = 0$$

ou

$$\lambda(\lambda V + 2W) = 0$$

nous dit que l'une des deux surfaces coïncide avec φ, tandis que l'autre surface est réelle.

Quand les deux plans donnés coïncident, l'une des deux surfaces coïncide avec φ et l'autre est tangente à φ le long de la courbe d'intersection de φ et des deux plans.

24. Déterminer la condition qui exprime que de l'une des deux surfaces le point double soit situé dans le plan à distance infinie, ou en d'autres mots déterminer la condition qui exprime que l'une des deux surfaces soit un cylindre ou un seul point situé à distance infinie.

Les valeurs de α, β, γ, δ, x, y, qui satisfont au système d'équations linéaires du numéro précédent doivent satisfaire en même temps à l'équation du plan à distance infinie

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0.$$

Outre la condition du numéro précédent on a donc

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_2\lambda & A_1\lambda \\ n & b & l & q & B_2\lambda & B_1\lambda \\ m & l & c & r & C_2\lambda & C_1\lambda \\ A & B & C & D & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & -1 & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, quand on développe comme dans le numéro précédent,

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A_2 \\ n & b & l & q & B_1 & B_2 \\ m & l & c & r & C_1 & C_2 \\ A & B & C & D & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & \end{vmatrix} \lambda^2 + \begin{vmatrix} a & n & m & p & A_2 \\ n & b & l & q & B_2 \\ m & l & c & r & C_2 \\ A & B & C & D & \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \end{vmatrix} \lambda + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ A & B & C & D & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & n & m & p \\ n & b & l & q \\ m & l & c & r \\ A & B & C & D \end{vmatrix} = 0.$$

ou $$V_1\lambda^2 + 2W_1\lambda - H = 0;$$

ensemble avec la condition du numéro précédent

$$V\lambda^2 + 2W\lambda - H = 0.$$

Pour que ces deux équations peuvent être vérifiées par u même valeur de λ, il faut qu'un système de valeurs de λ^3, λ^2, vérifie en même temps les équations

$$\begin{aligned} V\lambda^3 + 2W\lambda^2 - H\lambda \qquad &= 0 \\ V\lambda^2 + 2W\lambda - H &= 0 \\ V_1\lambda^3 + 2W_1\lambda^2 - H_1\lambda \qquad &= 0 \\ V_1\lambda^2 + 2W_1\lambda - H_1 &= 0 \end{aligned}$$

ce qui exige que l'on ait la relation

$$\begin{vmatrix} V & 2W & -H & \\ & V & 2W & -H \\ V_1 & 2W_1 & -H_1 & \\ & V_1 & 2W_1 & -H_1 \end{vmatrix} = 0.$$

25. Pour que les deux surfaces aient chacune un point double situé dans le plan à distance infinie, il faut que les équations

$$V\lambda^2 + 2W\lambda - H = 0$$

$$V_1\lambda + 2W_1\lambda - H_1 = 0$$

soient identiques, ce qui exige

$$\frac{V_1}{V} = \frac{W_1}{W} = \frac{H_1}{H}.$$

26. Quand on veut appliquer à une surface du 2^d degré rapportée à des coordonnées planaires des raisonnements tout-à-fait analogues à ceux du numéro 23, on doit remplacer les deux plans par deux points donnés. Au lieu de deux courbes d'intersection on trouve deux cônes qui enveloppent la surface donnée et dont chacun a pour sommet un des points donnés. Le résultat est qu'il y a deux courbes du second degré qui sont enveloppées par les deux cônes.

Salmon dans ses „Sections coniques" a appliqué une notation particulière au cas où une conique est rapportée à des coordonnées trilinéaires, et que le triangle de référence a pour côtés deux tangentes de la conique et la droite qui passe par les deux points de contact. Dans cette notation un point de la conique est déterminé par une seule quantité. Dans ce qui suit une notation analogue est appliquée à d'autres systèmes de coordonnées.

Coordonnées tangentielles.

27. Quand l'équation d'une droite rapportée à des coordonnées trilinéaires est

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$$

λ, μ, ν sont les coordonnées tangentielles de cette droite. De cela résulte immédiatement que

$$1, \quad 0, \quad 0$$

sont les coordonnées de la droite qui rapportée à des coordonnées trilinéaires est représentée par l'équation

$$\alpha = 0.$$

Donc, quand ABC est le triangle de référence,

les coordonnées de la droite BC sont 1, 0, 0;

- - - - - CA - 0, 1, 0;

- - - - - AB - 0, 0, 1.

28. Quand l'équation tangentielle d'un point est

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0,$$

les coordonnées trilinéaires de ce point sont

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma.$$

De cela résulte immédiatement que le point A, dont les coordonnées trilinéaires sont

$$\alpha_1, \quad 0, \quad 0,$$

est représenté en coordonnées tangentielles par l'équation

$$\lambda = 0.$$

De même l'équation de B est $\mu = 0$, et
l'équation de C est $\nu = 0$.

Trouver l'équation de la conique qui est tangente à AC dans le point A et à BC dans le point B.

L'équation générale d'une conique soit

$$a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 + 2f\mu\nu + 2g\nu\lambda + 2h\lambda\mu = 0.$$

La conique étant tangente à la droite AC ou 0, 1, 0 dans le point A ou $\lambda = 0$, il faut que les deux tangentes de la conique qui passent par ce point coïncident avec la droite 0, 1, 0. Donc, quand on substitue $\lambda = 0$ dans l'équation de la conique, il faut que l'équation que l'on obtient après la substitution

$$b\mu^2 + c\nu^2 + 2f\mu\nu = 0$$

soit satisfaite par deux valeurs égales $\nu = 0$, ce qui exige

$$b = f = 0.$$

La conique étant tangente à BC ou 1, 0, 0 dans le point B ou $\mu = 0$, il faut que les deux tangentes de la conique qui passent par le point $\mu = 0$ coïncident avec la droite 1, 0, 0; ce qui exige

$$a = g = 0.$$

Les conditions trouvées

$$b = f = a = g = 0$$

sont nécessaires et en même temps suffisantes.

Donc l'équation cherchée est

$$c\nu^2 + 2h\lambda\mu = 0.$$

Quand on pose

$$-\frac{2h}{c} = k^2,$$

cette équation devient

$$\nu^2 = k^2\lambda\mu.$$

Remarque. La conique est une parabole, quand elle est tangente à la droite située à l'infinie et qui a pour coordonnées A, B, C. Ou, en d'autres termes, la conique est une parabole, quand on a

$$C^2 = k^2 AB.$$

30. Le produit des équations

$$\nu = \omega k\lambda$$

$$\nu = \frac{1}{\omega} k\mu$$

étant identique avec l'équation de la conique

$$\nu^2 = k^2\lambda\mu,$$

les deux points qui sont représentés par la première et la deuxième équation se trouvent sur une même tangente de la courbe representée par la troisième équation. Cela est vrai pour une valeur quelconque de ω.

Des deux points qui déterminent la tangente l'un est situé dans la droite AC, et l'autre dans la droite BC. Réciproquement, chaque tangente de la courbe est déterminée par les deux points où elle est rencontrée par les droites AC et BC. Donc, on peut désigner une tangente quelconque de la courbe par ω.

Nous désignerons le point d'intersection de deux de ces droites ω et ω_1 par $\omega\omega_1$.

31. Trouver l'équation du point d'intersection des tangentes ω et ω_1.

L'équation du point soit

$$p\lambda + q\mu + r\nu = 0,$$

alors on doit déterminer p, q et r.

Pour que le point soit situé dans la droite

$$\nu = \omega k\lambda, \qquad \nu = \frac{1}{\omega} k\mu$$

il faut qu'on ait

$$\frac{p}{\omega k} + \frac{q\omega}{k} + r = 0$$

ou

$$\frac{p}{\omega} + q\omega + kr = 0.$$

De même

$$\frac{p}{\omega_1} + q\omega_1 + kr = 0.$$

De ces équations résulte

$$p:q:r = \begin{vmatrix} \omega & k \\ \omega_1 & k \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} k & \frac{1}{\omega} \\ k & \frac{1}{\omega_1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega} & \omega \\ \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \end{vmatrix},$$

ou, après quelques réductions

$$p:q:r = k\omega\omega_1 : k : -(\omega + \omega_1).$$

Donc, l'équation du point $\omega\omega_1$ est

$$k\omega\omega_1\lambda + k\mu = (\omega + \omega_1)\nu.$$

32. Trouver l'équation du point de contact de tangente ω.

Puisqu'on peut regarder le point de contact comme le p d'intersection de deux tangentes consécutives, on obtient l'équa du point de contact, en substituant $\omega = \omega_1$ dans l'équatio point d'intersection de ω et de ω_1, ce qui donne

$$k\omega^2\lambda + k\mu = 2\omega\nu.$$

33. Trouver l'équation de la polaire du point ω

La polaire de $\omega\omega_1$ passe par le point de contact de ω e le point de contact de ω_1. Les coordonnées de la polaires par conséquent, déterminées par les équations

$$k\omega^2\lambda + k\mu = 2\omega\nu$$
$$k\omega_1{}^2\lambda + k\mu = 2\omega_1\nu.$$

De ces équations résulte que les coordonnées de la polaire sont

$$2, \quad 2\omega\omega_1, \quad k(\omega + \omega_1).$$

34. Trouver la condition qui exprime qu'un point donné soit un point de la conique.

Soit

$$p\lambda + q\mu + r\nu = 0$$

l'équation du point donné. Pour que ce point soit un point de la conique, il doit être le point de contact d'une tangente de la courbe. Donc, pour une certaine valeur de ω, l'équation donnée doit être identique avec l'équation

$$k\omega^2\lambda + k\mu = 2\omega\nu,$$

ce qui exige

$$\frac{p}{k\omega^2} = \frac{q}{k} = -\frac{r}{2\omega}$$

ou, quand on élimine ω,

$$4pq = k^2r^2.$$

35. Quand on veut des équations précédentes faire l'application à des exemples, il est utile de faire les remarques suivantes.

Quand on élimine ν entre les équations de deux points de la courbe

$$k\omega^2\lambda + k\mu = 2\omega\nu$$
$$k\omega_1{}^2\lambda + k\mu = 2\omega_1\nu$$

on obtient

$$\omega\omega_1\lambda = \mu$$

Et cette équation représente le point d'intersection de la droite

$$\lambda = \mu = 0$$

ou $\quad 0, \quad 0, \quad 1$

avec la droite qui passe par les points donnés.

Par conséquent, si les deux points se meuvent en sorte qu'on ait toujours

$$\omega\omega_1 = s,$$

la droite qui passe par les deux points, passe en même temps par un point fixe

$$s\lambda = \mu$$

situé dans la droite

$$\lambda = \mu = 0.$$

L'équation du point d'intersection des deux tangentes est

$$k\omega\omega_1\lambda + k\mu = (\omega + \omega_1)\nu.$$

Si l'on substitue

$$\omega\omega_1 = s$$

dans cette équation, on obtient

$$ks\lambda + k\mu = (\omega + \omega_1)\nu.$$

Par conséquent, si les deux points se meuvent en sorte qu'on ait toujours

$$\omega\omega_1 = s,$$

le point d'intersection des tangentes dans les deux points donnés se meut le long de la droite fixe

$$s\lambda + \mu = 0, \quad \nu = 0$$

ou

$$1, \quad -s, \quad 0,$$

qui passe par le point C.

L'équation du point d'intersection de la droite AB et de la tangente ω ou

$$\nu = \omega k\lambda, \quad \nu = \frac{1}{\omega} k\mu$$

étant

$$\mu = \omega^2\lambda,$$

les deux tangentes ω et $-\omega$ passent par un même point de AB.

Quand on remplace dans l'équation de la conique k par k_1, on obtient l'équation d'une conique

$$\nu^2 = k_1{}^2\lambda\mu$$

qui a avec la première conique un double contact suivant la corde AB. L'équation du point d'intersection des tangentes ω

et ω_1 étant indépendante de k, les tangentes ω et ω_1 de toutes les coniques qui ont un double contact dans les points A et B passent par un même point de AB. Nous dirons que la tangente $+\omega$ de l'une des coniques correspond **directement** à la tangente $+\omega$, et **inversement** à la tangente $-\omega$ d'une autre conique du système; et que le point d'intersection de deux tangentes d'une conique correspond au point d'intersection des tangentes correspondantes d'une autre conique du système.

36. **Un triangle est inscrit dans une conique, deux de ses côtés passent par deux points fixes: trouver l'enveloppe du troisième côté.**

Prenons pour lignes de référence la droite qui passe par les deux points fixes et les tangentes dans les points d'intersection A et B de cette droite et de la conique.

Les points fixes soient

$$r\lambda = \mu \quad \text{et} \quad s\lambda = \mu.$$

L'équation de la conique est de la forme

$$\nu^2 = k^2\lambda\mu.$$

Pour que la droite qui passe par deux points de la conique passe en même temps par le point

$$r\lambda = \mu$$

il faut, d'après le numéro précédent, que le produit des ω des tangentes en ces points soit r. Donc, quand ω est un sommet du triangle inscrit, les autres sommets sont les points de contact des tangentes

$$\frac{r}{\omega} \quad \text{et} \quad \frac{s}{\omega}.$$

La droite qui passe par ces points de contact est

$$\lambda : \mu : \nu = 2 : \frac{2rs}{\omega^2} : k\frac{r+s}{\omega}$$

ou

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\omega^2\mu}{2rs} = \frac{\omega\nu}{k(r+s)}.$$

Et, quand on élimine ω entre les équations de cette droite, on obtient

$$\frac{\lambda\mu}{4rs} = \frac{\nu^2}{k^2(r+s)^2} \quad \text{ou} \quad \nu^2 = \frac{k^2(r+s)^2}{4rs}\lambda\mu,$$

d'où l'on voit que le troisième côté du triangle enveloppe une conique qui a un double contact avec la conique donnée dans les points où celle-ci est coupée par la droite qui passe par les points fixes.

Remarque. D'une manière analogue on trouve que le lieu du sommet d'un triangle circonscrit à une conique, et dont les autres sommets glissent sur des droites fixes est une conique qui a un double contact avec la conique donnée suivant la polaire du point d'intersection des droites fixes.

37. Un sommet d'un triangle est un point d'une conique donnée, les côtés qui passent par ce sommet passent en même temps par deux points fixes de la conique, et les autres sommets glissent sur deux droites fixes: trouver l'enveloppe du troisième côté.

Prenons pour lignes de référence la droite qui passe par les points fixes (A et B) et les tangentes en ces points. Alors l'équation de la conique est

$$\nu^2 = k^2\lambda\mu.$$

Les droites fixes soient

$$\lambda_1, \quad \mu_1, \quad \nu_1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2, \quad \mu_2, \quad \nu_2.$$

La droite qui passe par A et par le point de contact de la tangente ω a pour coordonnées

$$0, \qquad 2\omega, \qquad k;$$

et le point d'intersection de cette droite et de la droite fixe

$$\lambda_1, \qquad \mu_1, \qquad \nu_1$$

est représenté par l'équation

$$k(\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu) = 2\omega(\lambda\nu_1 - \lambda_1\nu).$$

La droite qui passe par B et par le point de contact de ω a pour coordonnées

$$2, \qquad 0, \qquad k\omega;$$

et le point d'intersection de cette droite et de la droite fixe

$$\lambda_2, \qquad \mu_2, \qquad \nu_2$$

est représenté par l'équation

$$k\omega(\lambda\mu_2 - \lambda_2\mu) = 2(\mu_2\nu - \mu\nu_2).$$

Eliminant ω entre les équations des deux points d'intersection, on obtient l'équation

$$k^2(\lambda\mu_1-\lambda_1\mu)(\lambda\mu_2-\lambda_2\mu)=4(\lambda\nu_1-\lambda_1\nu)(\mu_2\nu-\mu\nu_2)$$

qui représente une conique tangente aux deux droites fixes.

38. Trouver le lieu du point d'intersection des tangentes $\omega\operatorname{tg}\varphi$ et $\omega\cot\varphi$, quand φ est constant et que ω est variable.

D'après le numéro 31, l'équation du point d'intersection est

$$k\omega^2\lambda+k\mu=\omega(\operatorname{tg}\varphi+\cot\varphi)\nu,$$

et comme on a

$$\operatorname{tg}\varphi+\cot\varphi=2\operatorname{cosec}2\varphi,$$

l'équation du point d'intersection est

$$k\sin2\varphi\times\lambda+k\sin2\varphi\times\mu=2\omega\nu.$$

D'après le numéro 32, cette équation représente le point de contact de la tangente ω à la conique

$$\nu^2=k^2\sin^22\varphi\lambda\mu.$$

Donc, le lieu du point d'intersection est une conique qui a un double contact avec la conique donnée suivant la droite AB.

Remarque. On prouverait de même que la polaire du point d'intersection des tangentes $\omega\operatorname{tg}\varphi$, $\omega\cot\varphi$ enveloppe la conique

$$\nu^2=k^2\operatorname{cosec}^22\varphi\lambda\mu.$$

39. Un sommet d'un triangle est un point d'une conique donnée, les autres côtés qui passent par ce sommet sont tangents à une conique qui a un double contact avec la première conique, et les autres sommets glissent sur deux tangentes fixes de la seconde conique: trouver l'enveloppe du troisième côté.

Soient

$$\nu^2=k^2\lambda\mu,\qquad \nu^2=k^2\sin^22\varphi\lambda\mu$$

les équations des deux coniques: la tangente ω de la dernière conique a pour point de contact le point d'intersection des tangentes $\omega\operatorname{tg}\varphi$, $\omega\cot\varphi$ de la première conique. Ce point soit le premier sommet du triangle; d'ailleurs, ω_1 et ω_2 étant les tangentes fixes, les autres sommets sont

$$k\omega\omega_1\lambda\operatorname{tg}\varphi + k\mu = (\omega_1 + \omega\operatorname{tg}\varphi)\nu$$
$$k\omega\omega_2\lambda\cot\varphi + k\mu = (\omega_2 + \omega\cot\varphi)\nu,$$

et en éliminant ω on trouve pour l'équation de l'enveloppe

$$(k\omega_1\lambda - \nu)(\omega_2\nu - k\mu)\operatorname{tg}^2\varphi = (k\omega_2\lambda - \nu)(\omega_1\nu - k\mu).$$

40. Le rapport anharmonique des points suivants lesquels une tangente mobile est coupée par quatre tangentes fixes est constant.

Les tangentes fixes soient ω^I, ω^{II}, ω^{III}, ω^{IV} et la tangente mobile soit ω. Les points d'intersection de la tangente mobile et des autres tangentes sont

$$k\omega\omega^I\lambda + k\mu = (\omega + \omega^I)\nu$$
$$k\omega\omega^{II}\lambda + k\mu = (\omega + \omega^{II})\nu$$
$$k\omega\omega^{III}\lambda + k\mu = (\omega + \omega^{III})\nu$$
$$k\omega\omega^{IV}\lambda + k\mu = (\omega + \omega^{IV})\nu$$

et le rapport anharmonique de ces points étant

$$\frac{(\omega^I - \omega^{II})(\omega^{III} - \omega^{IV})}{(\omega^I - \omega^{III})(\omega^{II} - \omega^{IV})}$$

est indépendant de la tangente ω.

On appelle, pour abréger, rapport anharmonique de quatre tangentes d'une conique le rapport anharmonique des points d'intersection de ces tangentes avec une cinquième tangente.

41. L'expression du rapport anharmonique de quatre tangentes d'une conique ne change pas, lorsque tous ces points changent de signe; donc le rapport anharmonique de quatre des tangentes qui passent par quatre points de AB est égal au rapport anharmonique des quatre autres tangentes $(-\omega^I, -\omega^{II}, -\omega^{III}, -\omega^{IV})$ qui passent par ces points. (Voir numéro 35.)

Pour la même raison, le rapport anharmonique de quatre tangentes d'une conique est égal au rapport anharmonique des quatre tangentes correspondantes d'une autre conique. De plus, la valeur du rapport anharmonique de quatre tangentes ne changeant pas, quand on y remplace ω par $\omega\operatorname{tg}\varphi$, ou $\omega\cot\varphi$: Lorsque deux coniques S et S_1 ont un double contact, le rapport anharmonique de

quatre des tangentes de S qui passent par quatre points de S_1 est égal au rapport anharmonique des quatre autres tangentes de S qui passent par ces points, ainsi qu'a celui des quatre droites qui sont tangentes à S_1 dans ces points. Ce dernier théorème est le réciproque d'un théorème du à M. Townsend.

Coordonnées Quadriplanaires.

Soit $ABCD$ le tétraèdre de reférence. La notation de Salmon n'est pas appliquable à l'équation

$$\alpha^2 = l\beta\gamma + q\beta\delta + r\gamma\delta$$

qui représente une surface tangente aux droites AB, AC, AD dans les points B, C, D.

Une notation analogue peut s'appliquer dans les cas suivants.

Premier cas.

42. Prenons l'équation

$$\beta^2 \pm k^2\gamma^2 - l^2\delta^2 = 0,$$

qui représente un cône dont le sommet est A.

Les équations

$$\beta = \omega(+k\gamma + l\delta)$$

$$\beta = \frac{1}{\omega}(-k\gamma + l\delta)$$

représentent une droite dont tous les points vérifient l'équation du cône ; donc, cette droite est une arête du cône. A chaque valeur de ω correspond une arête du cône; cette arête est déterminée dès que ω est déterminée. Nous désignerons cette droite par ω, et le plan qui passe par ω et ω_1 sera désigné par $\omega\omega_1$.

43. Déterminer l'équation du plan $\omega\omega_1$.

Comme ce plan passe par A_1 nous pouvons le représenter par l'équation

$$M\beta + N\gamma + P\delta = 0.$$

Que les deux droites soient situées dans ce plan, s'exprime par les équations

$$2klM\omega + lN(1-\omega^2) + kP(1+\omega^2) = 0$$

$$2klM\omega_1 + lN(1-\omega_1^2) + kP(1+\omega_1^2) = 0$$

d'où s'ensuit

$$M:N:P = (\omega+\omega_1):k(1-\omega\omega_1):-l(1+\omega\omega_1)$$

de sorte que l'équation du plan $\omega\omega_1$ est

$$(\omega+\omega_1)\beta + (1-\omega\omega_1)k\gamma - (1+\omega\omega_1)l\delta = 0.$$

44. **Trouver l'équation du plan tangent le long l'arête ω.**

En substituant $\omega_1 = \omega$ dans l'équation précédente, on trou immédiatement

$$2\omega\beta + (1-\omega^2)k\gamma - (1+\omega^2)l\delta = 0.$$

45. **Trouver les conditions qui expriment qu' plan est tangent au cône.**

L'équation du plan soit

$$L\alpha + M\beta + N\gamma + P\delta = 0.$$

Cette équation doit être identique avec une équation de forme

$$2\omega\beta + (1-\omega^2)k\gamma - (1+\omega^2)l\delta = 0$$

ce qui exige $L = 0$, et

$$\frac{M}{2\omega} = \frac{N}{k(1-\omega^2)} = \frac{-P}{l(1+\omega^2)}.$$

Eliminant ω on trouve comme conditions

$$M^2 + \frac{N^2}{k^2} - \frac{P^2}{l^2} = 0 \text{ et } L = 0.$$

Deuxième cas.

46. **Considérons l'équation**

$$\alpha^2 + l^2\beta^2 - m^2\gamma^2 - p^2\delta^2 = 0$$

ou

$$\alpha^2 - p^2\delta^2 = m^2\gamma^2 - l^2\beta^2,$$

qui réprésente une surface à l'égard de laquelle ABC est un tétraèdre autopolaire.

Les équations

$$\alpha + p\delta = \omega(m\gamma + l\beta)$$

$$\alpha - p\delta = \frac{1}{\omega}(m\gamma - l\beta)$$

représentent une droite qui est située dans la surface. Nous désignerons cette droite par ω.

Quand on remplace dans les équations précédentes ω par une autre valeur ω_1, on obtient une droite qui ne saurait rencontrer la première droite, puisqu'alors les quatre équations des deux droites donneraient

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0,$$

ce qui est impossible.

D'un autre côté, prenons les équations

$$\alpha + p\delta = \omega_1(m\gamma - l\beta)$$

$$\alpha - p\delta = \frac{1}{\omega_1}(m\gamma + l\beta)$$

qui représentent une droite située dans la surface; et cette droite coupe la droite ω, puisque pour toutes les valeurs possibles de ω et de ω_1, les quatre équations qui représentent ces droites peuvent se réduire à trois, leur résultante étant

$$\begin{vmatrix} 1 & p & m\omega & l\omega \\ 1 & -p & \frac{m}{\omega} & -\frac{l}{\omega} \\ 1 & p & m\omega_1 & -l\omega_1 \\ 1 & -p & \frac{m}{\omega_1} & +\frac{l}{\omega_1} \end{vmatrix} = plm \begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega & -\omega \\ 1 & -1 & \frac{1}{\omega} & -\frac{1}{\omega} \\ 1 & 1 & \omega_1 & -\omega_1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{\omega_1} & \frac{1}{\omega_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qui précède nous donne les propriétés connues: que sur une surface réglée du second degré il y a deux systèmes de droites; que deux droites d'un même système n'ont aucun point de commun; et qu'une droite quelconque de l'un des systèmes coupe toutes les droites de l'autre système.

On peut désigner par $\omega\omega_1$ le plan qui passe par une droite ω du premier système et une droite ω_1 de l'autre système. Chaque plan $\omega\omega_1$ est un plan tangent.

Troisième cas.

47. Appliquons la notation de Salmon à l'équation

$$k^2\alpha^2 - l^2\beta^2 = \gamma\delta.$$

Quand on substitue dans cette équation $\beta = \gamma = 0$, on trouve deux valeurs $\alpha = 0$, de sorte que la droite AD est tangente à la surface dans le point D. De même AC est tangente en C, BD en D et BC en C. Donc, la surface est tangente au plan ABC en C et au plan ABD en D.

La droite représentée par les équations

$$k\alpha + l\beta = \omega\gamma$$

$$k\alpha - l\beta = \frac{1}{\omega}\delta$$

est située dans la surface quelle que soit la valeur de ω. Nous désignerons cette droite par ω.

Un autre système de droites est représentée par

$$k\alpha - l\beta = \omega_1\gamma$$

$$k\alpha + l\beta = \frac{1}{\omega_1}\delta.$$

De la même manière que dans le numéro précédent on trouve les mêmes propriétés de ces deux systèmes de droites.

48. On peut désigner par $\omega\omega_1$ le plan qui passe par une droite ω du premier système et une droite ω_1 de l'autre système. Chaque plan $\omega\omega_1$ est un plan tangent. L'équation du plan $\omega\omega_1$ est

$$-k(\omega + \omega_1)\alpha + l(\omega - \omega_1)\beta + \omega\omega_1\gamma + \delta = 0.$$

49. Trouver la condition qui exprime qu'un plan donné soit tangent à la surface.

Pour qu'un plan donné

$$L\alpha + M\beta + N\gamma + P\delta = 0$$

soit tangent à la surface, il faut que ce plan passe par une droite de la surface. Cela exige que l'équation

$$L\alpha + M\beta + \frac{N}{\omega}k\alpha + \frac{N}{\omega}l\beta + P\omega k\alpha - P\omega l\beta = 0$$

soit identique à l'égard de α et β, ce qui s'exprime par

$$L + \frac{Mk}{\omega} + P\omega k = 0$$

$$M + \frac{Nl}{\omega} - P\omega l = 0.$$

Éliminant ω de ces équations, on trouve comme condition

$$\frac{L^2}{k^2} - \frac{M^2}{l^2} = 4NP.$$

Pour que la surface soit un paraboloïde hyperbolique, il faut qu'elle soit tangente au plan

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + P\delta = 0$$

ce qui exige

$$\frac{A^2}{k^2} - \frac{B^2}{l^2} = 4CD.$$

Quatrième cas.

50. Appliquons la notation de Salmon à l'équation

$$k^2\alpha^2 + l^2\beta^2 = \gamma\delta.$$

Remarquons que pour des valeurs réelles de ω les équations

$$k\alpha + l\beta\sqrt{-1} = \omega\gamma$$

$$k\alpha - l\beta\sqrt{-1} = \frac{1}{\omega}\delta$$

ne représentent que les points de la surface qui sont situés dans le plan $\beta = 0$.

Quand on prend les équations

$$k\alpha + l\beta\sqrt{-1} = \omega\gamma(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$

$$k\alpha - l\beta\sqrt{-1} = \frac{1}{\omega}\delta(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})$$

dont le produit est l'équation de la surface, pour des valeurs réelles il faut avoir

$$k\alpha = \omega\gamma\cos\varphi,$$

$$k\alpha = \frac{1}{\omega}\delta\cos\varphi,$$

$$l\beta = \omega\gamma\sin\varphi,$$

$$l\beta = \frac{\delta}{\omega}\sin\varphi.$$

Et comme ces quatre équations peuvent se réduire à trois, elles représentent pour des valeurs quelconques de ω et de φ un point réel de la surface. Nous désignerons ce point par $\omega\varphi$.

51. **Trouver l'équation du plan qui est tangent à la surface dans le point $\omega\varphi$.**

Qu'un plan coupe la surface en deux droites imaginaires qui ont un point d'intersection réel, s'exprime par la même équation que la condition que ce plan est tangent à la surface en ce point réel.

Donc, au lieu de déterminer la condition qui exprime que

$$L\alpha + M\beta + N\gamma + P\delta = 0$$

touche à la surface, on peut déterminer la condition qui exprime, que ce plan passe par une droite dont les équations sont de la forme

$$k\alpha + l\beta\sqrt{-1} = \omega\gamma(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$

$$k\alpha - l\beta\sqrt{-1} = \frac{\delta}{\omega}(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}).$$

Eliminant α et β entre ces équations et l'équation du plan, on doit trouver une équation qui est identique par rapport à γ et δ. Cela nous donne

$$N + \frac{L\omega\cos\varphi}{2k} + \frac{M\omega\sin\varphi}{2l} = 0,$$

$$P + \frac{L\cos\varphi}{2k\omega} + \frac{M\sin\varphi}{2l\varphi} = 0,$$

$$\frac{L\sin\varphi}{k} - \frac{M\cos\varphi}{l} = 0.$$

De ces équations s'ensuit

$$\frac{B}{A} = \frac{l}{k}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{C}{A} = -\frac{\omega}{2k\cos\varphi},$$

$$\frac{D}{A} = -\frac{1}{2k\omega\cos\varphi}$$

de sorte que du plan tangent l'équation est

$$2k\cos\varphi.\alpha + 2l\sin\varphi.\beta - \omega\gamma - \frac{\delta}{\omega} = 0.$$

52. **Trouver la condition qui exprime qu'un plan donné soit tangent à la surface.**

L'équation du plan donné soit

$$L\alpha + M\beta + N\gamma + P\delta = 0.$$

Il faut que cette équation soit identique avec une équation de la forme

$$2k\cos\varphi.\alpha + 2l\sin\varphi.\beta - \omega\gamma - \frac{\delta}{\omega} = 0$$

ce qui exige

$$\frac{L}{2k\cos\varphi} = \frac{M}{2l\sin\varphi} = -\frac{N}{\omega} = -P\omega.$$

Eliminant ω et φ on trouve la condition

$$\frac{L^2}{k^2} + \frac{M^2}{l^2} = 4NP,$$

qui résulte de la condition du numéro 49, quand on remplace $-l^2$ par $+l^2$.

Pour que la surface soit un paraboloïde, il faut qu'elle soit tangente au plan

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0$$

ce qui s'exprime par

$$\frac{A^2}{k^2} + \frac{B^2}{l^2} = 4CD.$$

Cinquième cas.

53. La notation de Salmon peut encore s'appliqu à l'équation

$$\alpha\beta = k^2\gamma\delta$$

qui représente une surface passant par les droites

$$\alpha = \gamma = 0,$$

$$\alpha = \delta = 0,$$

$$\beta = \gamma = 0,$$

$$\beta = \delta = 0.$$

Il y a deux systèmes de droites situées dans la surface représentées par les équations

$$\alpha = \omega k\gamma, \qquad \beta = \frac{1}{\omega}k\delta;$$

$$\alpha = \omega k\delta, \qquad \beta = \frac{1}{\omega}k\gamma.$$

Remarque. Ce cas ne diffère pas essentiellement du tr sième cas.

Groningue, 1. Octobre 1870.

XXX.

Strahlenbrechung in der Atmosphäre der Planeten.

Von

dem Herrn Grafen *L. v. Pfeil*
in Gnadenfrei in Schlesien.

(Figuren s. Taf. XI.)

Werden Planeten, welche mit einer Atmosphäre umgeben sind, von der Erde aus betrachtet, so müssen sie um den Betrag ihrer Horizontal-Strahlenbrechung grösser erscheinen, als sie sind, und als sie ohne eine solche Atmosphäre sich darstellen würden. Ebenso muss ein Planet, welcher vor der Sonne vorüber geht, seiner eigenen Strahlenbrechung wegen, etwas zu klein erscheinen. Ja es muss ein solcher Planet sogar ein doppeltes Bild geben, einen durch die Strahlenbrechung vergrösserten Ausschnitt aus der Sonnenscheibe, und ein, durch die Strahlenbrechung verkleinertes Bild der dunkeln Seite des Planeten. Ob beide Bilder und welches derselben sichtbar ist, wird von optischen Bedingungen abhängen, auf welche ich später zurückkommen werde.

Das hier Gesagte erhellt aus folgenden Gründen. Es sei abB in Fig. I. der Lichtstrahl, welchen der Rand a eines Planeten nach dem Auge des Beobachters auf der Erde aussenden würde, wenn keine Strahlenbrechung in der Atmosphäre des Planeten vorhanden wäre. Vermöge der Strahlenbrechung aber wird der Lichtstrahl in der Richtung abo abgelenkt werden. Es wird mithin ein Beobachter in o den Punkt a an der Stelle a' erblicken, also Ca' für den Halbmesser des Planeten halten, anstatt Ca, diesen Halbmesser also um aa' zu gross schätzen.

Geht der Planet vor der Sonne vorüber, so wird die Wirkung der Strahlenbrechung eine doppelte und zwar in entgegengesetztem Sinne sein. Denn nicht nur gelangen Strahlen der Sonnenscheibe noch in der Richtung $S'S$ an den Rand des Planeten beim Punkt a, und diese Strahlen erreichen das Auge des Beobachters ebenfalls bei o, nicht nur gelangen ausserdem alle Strahlen zwischen S'' und S' in das Auge des Beobachters in o, sondern es gehen auch noch die Strahlen von S'' an dem Horizont des Planeten bei a und b vorüber und reichen etwa bis b''.

Der Beobachter in o wird also zu gleicher Zeit ein Leuchten der Sonne erblicken, welches einmal einen Planeten von dem vergrösserten Halbmesser $a'C$, oder richtiger $a'C'$ umgiebt, und zugleich einen zweiten Planeten von dem Halbmesser $b''C''$ *). Strahlen, welche bis b'' reichen, müssen aber ein verkleinertes Bild des Planeten geben, wiewohl sie durch die Strahlenbrechung ebenfalls gegen den Beobachter auf der Erde in o gehoben werden. Es scheint, als müsse ein Theil des hellen Sonnenbildes gleichsam vor der Scheibe des vorübergehenden Planeten gesehen werden, indem nicht nur der Rand des Planeten beleuchtet erscheint, sondern auch directe Strahlen der, auf dem Planeten in b'' auf- oder untergehenden Sonne in das Auge des Beobachters auf der Erde gelangen.

Die scheinbare Verkleinerung des Planeten durch seine Refraction wird etwas weniger betragen, als seine Vergrösserung durch die gleiche Ursache. Die Strahlen, welche, zwischen S'' und S' entspringend, über a in das Auge des Beobachters auf der Erde gelangen, gehen durch die Atmosphäre des Planeten und müssen optische Erscheinungen bewirken, indem sie, mit dem directen Sonnenlichte vereinigt, das Auge treffen. Am Rande der Sonne werden sie, vor diesem vorspringend, sichtbar sein. Ich werde darauf zurückkommen.

Wird der Durchmesser eines Planeten vermöge seiner Strahlenbrechung zu gross oder zu klein angenommen, so muss die, aus seiner Masse entwickelte Dichtigkeit zu klein und bezüglich zu gross erscheinen. Wäre darum die Dichtigkeit des Planeten aus irgend welchen Umständen bekannt, z. B. der Dichtigkeit der Erde gleich gesetzt, und wäre die scheinbare Grösse des Pla-

---

*) Nur durch die Uebertreibung in der Zeichnung stellen sich die Punkte C' und C'' von C getrennt dar.

neten mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmt, so würde es möglich sein, daraus seine Horizontalrefraction abzuleiten *).

Denn setze ich in Fig. I. den scheinbaren Halbmesser eines Planeten $Ca' = r'$, den wahren $Ca = r$, die scheinbare (die aus dem scheinbaren Halbmesser abgeleitete) Dichtigkeit $= D'$, die wahre Dichtigkeit $= D$, so ist

$$r : r' = \sqrt[3]{D'} : \sqrt[3]{D},$$

also:

$$r = r' \sqrt[3]{\frac{D'}{D}}.$$

Die Senkrechte aa', um welche bei directer Betrachtung der Halbmesser eines Planeten zu gross erscheint, ist

$$aa' = r' - r = r'\left(1 - \sqrt[3]{\frac{D'}{D}}\right).$$

Setze ich D gleich der Dichtigkeit der Erde $= 1$, so folgt

$$aa' = r' - r = r'(1 - \sqrt[3]{D'}).$$

Die Grösse aa', welche sich gleich bleibt, ob der Planet aus grösserer oder geringerer Entfernung beobachtet wird, drückt die Horizontalrefraction des Planeten im Verhältniss zum Halbmesser desselben aus.

Um diesen Werth in einen Winkel zu verwandeln, wie derselbe vom Planeten aus wahrgenommen werden würde, ziehe ich auf die Punkte a und a' die Tangenten aB und $a'B'$ so lang, dass beide $= r'$ sind. Es ist dann $BB' = aa'$. Setze ich den Winkel BaB', die Horizontalrefraction des Planeten, $= \varrho$, so ist

$$\varrho : 90^0 = BB' : BB'Z \text{ (dem Quadranten)}$$

indem die gerade Linie BB' wegen ihrer Kleinheit als ein Kreisbogen betrachtet werden kann.

Es ist also

$$\varrho : 90^0 = (r' - r) : \frac{2r'\pi}{4}$$

*) Ein besseres Mittel soll später, am Schluss dieses Aufsatzes, angedeutet werden.

und

$$\varrho = \frac{(r' - r) . 90^0 . 4}{2 r' \pi}.$$

Substituirt man in dieser Gleichung den vorstehenden Wer von $aa' = r' - r$, so erhält man

$$\varrho = \frac{r'(1 - \sqrt[3]{D'}) . 360^0}{2 r' \pi}$$

oder

$$\varrho = \frac{(1 - \sqrt[3]{D'}) . 180^0}{\pi}.$$

Um ein Zahlenbeispiel zu geben, nehme ich (vorbehaltlic der hinlänglichen Richtigkeit der Daten) aus Littrow, 5. Aufl S. 1002:

Die Dichtigkeit von Venus = 0,956; so folgt deren Horizontal-Strahlenbrechung:

$D' = 0{,}956$	$\frac{1}{3}\log = 9{,}9934860$
$\sqrt[3]{D'} = 0{,}98511$	
$1 - \sqrt[3]{D'} = 0{,}01489$	$\log = 8{,}1728947$
$\frac{180^0}{\pi} = \frac{648000''}{\pi}$	$\log = 5{,}3144251$
$\varrho = 3071{,}3'' = 0^0 51' 11{,}3''$	$\log = 3{,}4873198$

Es lässt sich aus der Umkehrung dieser Formel auch finden, wie gross die Dichtigkeit der Erde einem Beobachter von ausserhalb derselben erscheinen würde, wenn dieser seiner Berechnung denjenigen Durchmesser der Erde zu Grunde gelegt hätte, welchen ihm die Strahlenbrechung auf der Erde vergrössert zeigte.

Man findet aus der Formel

$$\varrho = \frac{(1 - \sqrt[3]{D'}) 180^0}{\pi}$$

den Werth

$$D' = \left(1 - \frac{\varrho \pi}{180^0}\right)^3.$$

I n Z a h l e n:

$\varrho = 34'54{,}1'' = 2094{,}1''$	$\log = 3{,}3209974$
$180^0 = 648000''$	$-\log = 4{,}1884250$
π	$\log = 0{,}4971499$
$\frac{\varrho\pi}{180^0} = 0{,}01015248$	$\log = 8{,}0065723$
$1 - \frac{\varrho\pi}{180^0} = 0{,}98984752$	$\log = 9{,}9955683$ $\times 3$
$D' = 0{,}96985$	$\log = 9{,}9867049$

Sind die Durchmesser der Planeten aus Vorübergängen vor der Sonne bestimmt worden, so würde sich fast dieselbe Formel anwenden lassen. Es leuchtet nämlich die Sonne auf der dunkeln Fläche des Planeten mit abnehmender Lichtstärke ebensoweit, als dessen Horizontal-Strahlenbrechung beträgt. Gelangte mithin der Lichtstrahl von der Grenze des dunkeln Randes b'' Fig. I. ohne gebrochen zu werden, in das Auge des Beobachters auf der Erde, so würde letzterer den Planeten nur bis b'', also mit dem Halbmesser $b''C''$ verdunkelt erblicken, wie bereits erwähnt wurde.

Es würde also, wie oben,

$$r = r' \sqrt[3]{\frac{D'}{D}}$$

sein, aber, weil hier

$$r > r',$$

so würde

$$r - r' = r'(\sqrt[3]{D'} - 1)$$

und

$$\varrho = \frac{(\sqrt[3]{D'} - 1) \,.\, 180^0}{\pi}$$

werden.

Da jedoch der Strahl von b'' aus nach dem Auge des Beobachters auf der Erde abermals gebrochen wird, und zwar um den Betrag der Strahlenbrechung, welche auf dem Planeten ein Stern zeigen würde, der an der Stelle der Erde sich befände (welchen Werth ich ϱ' nennen will), so wird in der Formel für ϱ der um diese Strahlenbrechung verminderte Werth $\varrho - \varrho'$ zu setzen sein.

Es wird mithin die Gleichung

$$\varrho - \varrho' = \frac{(\sqrt[3]{D'} - 1) . 180^0}{\pi}$$

den Werth der Strahlenbrechung auf dem Planeten ergeben.

Als Zahlenbeispiel wähle ich die Masse Merkurs. Bessel mass aus dem Durchgang von 1832 den Durchmesser und berechnete daraus die Dichtigkeit zu 1,2453 unter Anwendung der Encke'schen Sonnenparallaxe. Leverrier legte seinen Tafeln die Hansen'sche Parallaxe zu Grunde, und so verkleinerte sich der Durchmesser verhältnissmässig, und die Dichtigkeit erhöhte sich dadurch auf die Ziffer 1,403. Hiernach die Angaben in Littrow S. 988 und 1002.

Gestattet man die, wohl nicht unwahrscheinliche Annahme, dass die Dichtigkeit Merkurs der der Erde gleich sei, und dass die dunkle Seite des Planeten durch die Strahlenbrechung verkleinert, gemessen worden, so würde sich, die Richtigkeit der Daten vorausgesetzt, der Betrag der Strahlenbrechung, und somit der wahre Durchmesser des Planeten aus jener angenommenen Dichtigkeit und der Masse des Planeten finden lassen.

Die Rechnung stellt sich, wie folgt:

$D' = 1,403$	$\frac{1}{3}\log = 0,0490192$
$\sqrt[3]{D'} = 1,119487$	
$\sqrt[3]{D'} - 1 = 0,119487$	$\log = 9,0773207$
$\frac{180 . 3600''}{\pi}$	$\log = 5,3144251$
$\varrho - \varrho' = 24646'' = 6^0 50' 46''$	$\log = 4,3917458$

Nehme ich das Verhältniss der Strahlenbrechung analog dem auf der Erde, so ist dasselbe auf dieser bei $8^0 20$ zur Horizontalparallaxe wie $6' 15,2''$ zu $34' 54,1'' = 375,2'' : 2094,1$ (nach Bessel, Bremikers Logarithmen-Tafeln S. 565.)

Hiernach würde

$$\varrho' = \frac{375,2}{2094,1} \cdot \varrho$$

sein, und also

$$\varrho - \frac{375,2}{2094,1} \cdot \varrho = 24646'',$$

woraus

$$\varrho = 30026'' = 8^{0}20'26''$$

folgt.

Es würde sich hiernach die Refraction auf der Erde zu der auf Venus und Merkur verhalten, wie 34′54,1″ zu 51′11″ zu 8°20′ also wie 1:1,47:14,34. Erwägt man, dass die Refraction mit der Erhöhung der Temperatur steigt, so hat das hier angedeutete Verhältniss wohl nichts Unwahrscheinliches, gewiss aber ist es weniger unwahrscheinlich, als eine erheblich verschiedene Dichtigkeit der drei Planeten.

Dass der Centralkörper des Systems, die Sonne, nicht eine geringere Dichtigkeit haben kann, als die ihn zunächst umgebenden Planeten, dieses liegt auf der Hand. Es ist auch nicht zu bezweifeln, dass die Lichtkugel in der sie umgebenden Wasserstoffgasatmosphäre durch die Strahlenbrechung vergrössert erscheint. Hätte die Annahme Grund, (wie sie ihn nicht hat) dass die uns sichtbare Hülle der Sonne ein fester oder tropfbar flüssiger Körper von der Dichtigkeit der Erde wäre, welcher durch die Strahlenbrechung bis zu der sichtbaren Grösse ausgebreitet erschiene, so würde sich die Horizontalrefraction auf der Sonne für diesen supponirten Fall in folgender Weise berechnen:

Es ist in Fig. I

$$\varrho = BaB',$$

also

$$\operatorname{tang}\varrho = \operatorname{tang} BaB' = \frac{BB'}{Ba} = \frac{aa'}{r'} = \frac{r'(1-\sqrt[3]{D'})}{r'},$$

mithin

$$\operatorname{tang}\varrho = 1 - \sqrt[3]{D'}.$$

Hieraus berechnete sich die Horizontalrefraction auf der Sonne

$$\varrho = 20^{0}8'54'' \text{ *)}.$$

---

*) (Nach Littrow S. 1002 ist)

$D' = 0,254$	$\frac{1}{3}\log = 9,8016112$
$\sqrt[3]{D'} = 0,6333025$	
$1 - \sqrt[3]{D'} = 0,3666975$	$\log =$
$\varrho = 20^{0}8'54''$	$\log\operatorname{tang} = 9,5645567$

Diese Angabe würde indess, wie gesagt, nur unter der Voraussetzung richtig sein, dass die uns sichtbare Lichtsphäre der Sonnenkörper selbst wäre. Wir können jedoch in dieser Lichtsphäre nur ein flammendes Gasmeer erkennen, in welches und durch welches fortwährend Gase, insbesondere Wasserstoffgase, aus dem weit tiefer liegenden, und vollkommen unsichtbaren Sonnenkörper emporsteigen.

Die Versuche der Spectralanalyse widersprechen dem keineswegs. Wenn das Wasserstoffgas, und sogar Spuren von Wasserdunst in und über der Lichtsphäre durch die Spectralanalyse mit grösster Bestimmtheit nachgewiesen worden sind, so versteht es sich ganz von selbst, dass das chemische Complement dieses Gases, also das Sauerstoffgas, irgendwo, mithin dass es unter der Lichtsphäre vorhanden sein muss, ebenso wie das Vorkommen des Sauerstoffgases in unserer Atmosphäre, neben andern starken Gründen, das Vorhandensein des Wasserstoffgases über derselben bedingt. (Vergl. meinen Aufsatz im Archiv, Bd. 45: Beiträge zur Lehre von der Atmosphäre) *).

---

*) Der Mond hat wohl unzweifelhaft dieselben Bestandtheile, wie unsere, ihm so nahe Erde; mit Ausschluss des Wassers und aller der chemischen Verbindungen, welche aus seiner Zersetzung sich bilden können und gebildet haben. Sein geringes specifisches Gewicht, 0,619, sowie seine erheblich unregelmässige Gestalt (Littrow S. 468) scheint zu beweisen, dass er im Innern nur aus einer lockeren Zusammenhäufung von Körpern, wahrscheinlich meteorischen Ursprungs, besteht, und dass Schmelzungen nur seine Oberfläche erreicht haben. Hätte er sich jemals in seiner ganzen Masse in flüssigem Zustande befunden, wie man es von der Erde, wohl irriger Weise, annimmt, so würde seine Form eine vollkommen regelmässige sein, und er würde sich auch, der Erde gegenüber, um seine Achse drehen.

Das Gleiche gilt wohl von Mars, wenn auch in weit geringerer Ausdehnung. Eine wesentliche Verschiedenheit seiner Stoffe, oder der Stoffe irgend eines Weltkörpers von den Stoffen, aus denen unsere Erde besteht, ist gewiss nicht anzunehmen, zumal seit die Spectralanalyse die Gleichheit der Stoffe auch in den entferntesten Fixsternen so gut wie erwiesen hat. Es bleiben mithin als Erklärungsgründe für die geringere Dichtigkeit von Mars, 0,79 (Littrow S. 1002) nur eine sehr ausgedehnte Gletscherbildung an seiner Oberfläche, oder eine mehr lockere Zusammenhäufung seiner Bestandtheile, oder beides vereinigt übrig, so dass die Gletscher, tief in das Innere des Planeten eindringend, seine hohlen Räume theilweise ausgefüllt haben.

Ebenso geben für die geringere Dichtigkeit der entfernteren grossen Planeten Oceane aus Schnee wohl die einzige genügende Erklärung. (Archiv Bd. 45).

Es leidet keinen Zweifel, dass eine Atmosphäre der unteren Planeten die Bestimmung des Augenblicks ihres Durchgangs durch die Sonne wesentlich verändern, und so lange unsicher machen muss, bis man die Mittel kennt, die optischen Wirkungen einer solchen Atmosphäre in Rechnung zu bringen.

Beim Eintreten erfolgt die Annäherung des Planeten an den Sonnenrand, bezüglich dessen Entfernung von demselben, in dem Verhältniss wie $pq:ps$ in Fig. II., also wie $\cos m:1$.

Je grösser der Winkel m wird, der Winkel, welchen die Bahn des Planeten mit einer Linie bildet, die man sich durch die Mittelpunkte der Scheibe der Sonne und des Planeten gezogen denkt, um so kleiner wird sein Cosinus. Es wird darum beim Eintreten des Planeten die Annäherung an den Sonnenrand schneller erfolgen, als das Verlassen desselben. Umgekehrt beim Austreten des Planeten, und zwar in gleichem Verhältniss.

Die äussere Berührung des Planeten bei seinem Eintritt in die Sonnenscheibe wird notirt werden, sobald der Sonnenrand die Spur eines Ausschnittes zeigt. Ebenso beim Austritt. Die äussere Berührung muss gesehen werden, sobald die, um ihre Strahlenbrechung vergrösserte Scheibe des Planeten den Sonnenrand berührt, also beim Eintritt zu früh, beim Austritt zu spät. Die innere Berührung wird notirt werden, sobald die um ihre Strahlenbrechung vergrösserte Scheibe des Planeten den Sonnenrand von innen berührt, also beim Eintreten zu spät; umgekehrt beim Austritt zu früh. Wäre das Verhältniss der Annäherung und Entfernung bei der äusseren und inneren Berührung gleich, so würde sich der, durch die Strahlenbrechung des Planeten verursachte Fehler ausgleichen. Diese Gleichheit findet jedoch nicht statt. Nach dem Gesagten erfolgt beim Eintritt die Annäherung des Planeten gegen den Sonnenrand schneller, als dessen Entfernung vom Sonnenrande. Der Sonnenrand ist also bezüglich kürzere und längere Zeit der strahlenbrechenden Kraft der Atmosphäre des Planeten ausgesetzt. Umgekehrt beim Austritt. Werden nun die Mittel genommen, so muss das Mittel sich nach den inneren Berührungen hinneigen, also beim Eintritt zu spät angesetzt werden, beim Austritt zu früh. Die Summe beider Fehler wird die Zeitdauer geben, um welche der Planet scheinbar zu kurz vor der Sonne verweilt.

Ich setze als fingirtes Beispiel den Austritt eines Planeten aus der Sonne.

Wirkliche innere Berührung	$10^h\ 5'\ 10''$
„ äussere Berührung	10 5 50
Mittel	$10^h\ 5'\ 30''$
Scheinbare innere Berührung	$10^h\ 5'\ 2''$
„ äussere Berührung	10 5 54
Mittel	$10^h\ 5'\ 28''$

Es würde mithin das scheinbare Mittel beim Austritt 2″ früher angesetzt werden, als das wirkliche.

Während die geographische Länge der Beobachtungsorte in dieser Beziehung einen minder erheblichen Einfluss übt, insofern man Eintritte mit Eintritten und Austritte mit Austritten vergleicht, (wie es bei der Berechnung der Venus-Durchgänge von 1761 und 1769 geschehen ist,) so muss dagegen die geographische Breite sehr erheblich einwirken, weil sie den Winkel wesentlich ändert, in welchem der Planet die Sonnenscheibe erreicht. Erfolgte der Durchgang z. B. auf der nördlichen Seite der Sonne, und ein nördlicher Beobachter sähe denselben an der Stelle *ab* in Fig. III. so wird ein mehr südlicher Beobachter den Durchgang bei *a′b′* erblicken. Beim nördlichen Beobachter musste beim Eintritt in *a* die äussere Berührung in einem geringeren Maasse zu früh, die innere in einem geringern Maasse zu spät angesetzt werden, als beim südlichen Beobachter, welcher den Eintritt in *a′* wahrnimmt, weil bei *a′* der Planet sich langsamer dem Sonnenrande nähert, bezüglich sich von ihm entfernt, als bei *a*. Ebenso wird beim Austreten des Planeten der mehr nördliche Beobachter in *b* um einen geringeren Betrag die innere Berührung zu früh, und die äussere zu spät erblicken, als der mehr südliche Beobachter sie in *b′* sieht.

So weit war ich etwa mit meinen Erwägungen gelangt, ohne zu wissen, ob man bei den Durchgängen von 1761 und 1769 irgend welche Spuren einer Venusatmosphäre wahrgenommen habe oder nicht, als eine Durchsicht der Encke'schen Schriften:

„Die Entfernung der Sonne von der Erde, hergeleitet aus dem Venusdurchgange von 1761“

desgleichen deren Fortsetzung

„Der Venusdurchgang von 1769“,

jeden Zweifel darüber zerstreute.

Ich fand nämlich mit Befriedigung, dass die Spuren der Venus-

atmosphäre allerdings von mehreren Beobachtern sehr deutlich wahrgenommen worden sind, aber zugleich entdeckte ich mit Befremden, dass keiner der Rechner der Wirksamkeit jener Atmosphäre, welche alle Beobachtungen unzweifelhaft beeinflussen musste, auch nur die allermindeste Beachtung geschenkt hat*). Ja man behandelte die Thatsache als eine „Störung, hervorgebracht durch Trübungen der Gläser, oder der Augen, ja als ein Spiel der Phantasie.“ So drückt sich Encke (und dieser berühmte Gelehrte gewiss nicht allein,) darüber so aus: (Durchgang von 1761 S. 87) .... „obgleich Hirst in Madras eine Art Nebel 2″ bis 3″ vor der äusseren Berührung gesehen und diese genau beobachtet haben wollte; drei Beobachter sollten darin übereingestimmt haben. Indess zeigt die Rechnung, dass hier, sei es durch den Zustund der Atmosphäre, oder durch Schuld des Fernrohrs eine Täuschung stattgefunden;“ etc. Ueber „Röhl's Merkwürdigkeiten von den Durchgängen der Venus durch die Sonne, Greifswald 1768 schreibt Encke (S. 123): „Er scheint sich vorgenommen zu haben, auf eine etwaige Atmosphäre der Planeten besonders seine Aufmerksamkeit zu richten“ etc. „Indess ist es zweifelhaft, ob dieses nicht seiner Einbildung zuzuschreiben ist“ etc. Ebenso beim Durchgange von 1769 S. 13: „Einige, worunter leider auch die Beobachter von Otahaite, sprechen von einem Halbschatten, den die aufmerksamsten Astronomen sonst nicht wahrgenommen haben“ etc. (S. 66.) „Die wenigsten der angeführten näheren Umstände sind der Art, dass sie der Rechnung unterworfen werden können. .... ein lichter Ring, oder ein farbiger um die Venus, nur von Wenigen gesehen“ etc.

Stellen wir diesen Ansichten gegenüber zunächst die, mit Recht berühmte Encke'sche Parallaxenrechnung selbst. Für die beobachteten Durchgänge ist gewiss die Annahme zulässig, dass die Beobachtung der inneren Berührung, insbesondere beim Eintritt, wenn zuerst ein Lichtfaden zwischen Venus und dem Sonnenrande zusammenhängend sichtbar ist, ebenso genau erfolgte, als die äussere Berührung beim Austritt (Encke D. v. 1761 S. 104). Lässt man diese Annahme gelten, so muss die Zwischenzeit, welche zwischen dem Erscheinen des Lichtfadens beim Eintritt und dem Verschwinden des Planeten beim Austritt verläuft, das

---

*) Auch Littrow führt unter anderem (S. 364) die Morgen- und Abenddämmerung auf Venus als entscheidenden Grund für das Dasein einer Atmosphäre an. Schröder schätzt deren Horizontalrefraction zu einem halben Grade (*ib*).

Verweilen des Planeten vor der Sonne ergeben. Findet nun I den so beobachteten Zwischenzeiten gegenüber den berechnet Verweilungen ein Unterschied statt, welcher über die wahrsche lichen Grenzen der Beobachtungsfehler hinausgeht, so kann (solcher Unterschied nur von der Strahlenbrechung in der Atn sphäre des Planeten herrühren.

Die beobachteten Verweilungen waren nun folgende (Encl 1769 S. 58):

Wardehus (Lappland) 70° 22′ 36″ N. B.

	Sternzeit zu Paris.
Eintritt (Lichtfaden)	9^h 32′ 0,8″
Austritt, äussere Berührung des Sonnenrandes	15 43 28,4
Verweilung	6^h 11′ 27,6″

Hudsonsbai, 58° 47′ 32″ N. B.

Eintritt	1^h 13′ 10,2″
Austritt	7 17 8,2
Verweilung	6^h 3′ 58,0″

Californien (St. Joseph) 23° 3′ 13″ N. B.

Eintritt	0^h 15′ 11,8″
Austritt	6 10 42,3
Verweilung	5^h 55′ 30,5″

Otahaite 17° 29′ 15″ S. B.

Eintritt	21^h 41′ 49,2″
Austritt	3 29 57,3
Verweilung	5^h 48′ 8,1″

Die berechneten Verweilungen gegenüber den beobachteten würden dagegen folgende sein *):

---

*) Nach Encke (D. v. 1769 S. 15). Nennt man T die Zeit der geocentrischen Dauer und Π die Horizontalsonnenparallaxe, so war die Dauer

$T + 78\Pi$ in Lappland,
$T + 24\Pi$ an der Hudsonsbai,
$T - 31\Pi$ in Californien,
$T - 82\Pi$ auf Otahaite.

Setzt man $S = 6^h\, 0'\, 56{,}8''$ (Encke S. 2)
$\Pi = 8{,}5776''$ (ib. S. 108)

Wardhus,	Berechnet	6^h 12′ 5,9″
	Beobachtet	6 11 27,6
	Differenz	+ 38,3″
Hudsonsbai,	Berechnet . . .	6^h 4′ 22,7″
	Beobachtet . . .	6 3 58,0
	Differenz	+ 24,7″
St. Joseph,	Berechnet	5^h 56′ 30,9″
	Beobachtet	5 55 30,5
	Differenz	+ 1′ 0,4″
Otahaite,	Berechnet	5^h 49′ 13,4″
	Beobachtet	5 48 8,1
	Differenz	+ 1′ 5,3″

s sind also die beobachteten Verweilungen überall kürzer, e nach der Berechnung hätten sein müssen, und zwar t der Betrag der Verkürzung um so mehr, je :r die Verweilung wird, mit Ausnahme von Wardhus : Beobachtung angezweifelt wird *).

orrigirt man jedoch letztere Beobachtung um 40″, um welchen ; der Eintritt nach Lexell zu spät angesetzt worden sei, ce 1769 S. 27 Z. 13 v. u.) so folgt:

Wardhus Eintritt (Lichtfaden) . .	9^h 32′ 0,8″
Correctur nach Lexell	—40,0
Eintritt corrigirt	9^h 31′ 20,8″
Austritt corrigirt	15 43 28,4
Beobachtete Verweilung . . .	6^h 12′ 7,6″
Berechnete Verweilung	6 12 5,9
Unterschied	—1,7″

:hnet sich

für Lappland Π	log = 0,9333658
78	log = 1,8920946
78Π = 669,05″ = + 0° 11′ 9,05″	log = 2,8254604
+ 6^h 0′ 56,8″	
Berechnete Verweilung 6^h 12′ 5,9″	

Encke 1769 S. 17—20; S. 24—27, insbesondere S. 18 Z. 4 v. u. und :. 13 v. u.

Es würden also die Unterschiede der beobachteten und der berechneten Verweilungen, von Norden nach Süden gezählt, folgende sein:

Wardhus	—1,7″
Hudsonsbai	+24,7″
St. Joseph	+1′ 0,4″
Otahaite	+1′ 5,3″

Nimmt man bei Wardhus den Fehler der Beobachtung nur ein wenig geringer an, als ihn **Lexell** setzt, geringer als 40″, so dass die Differenz der beobachteten und der berechneten Verweilung ebenfalls positiv wird *), **so erscheinen die beobachteten Verweilungen um so mehr zu kurz, je weiter man von Norden nach Süden fortrückt**, d. h. **je mehr die scheinbare Bahn der Venus gegen den äusseren Sonnenrand**, nach $a'b'$ Fig. III., **rückt**.

Das gleiche Resultat ergiebt sich aus Verweilungen, welche man aus Eintritten und Austritten an verschiedenen Orten berechnet (ib. S. 16). Obwohl man also aus den Verweilungen mit grosser Sicherheit das gewünschte Resultat würde erhalten haben (ib. S. 15), so musste doch dieses Prüfungsmittel völlig vernachlässigt werden (ib. S. 14) und es blieb nichts übrig, als nur Eintritte mit Eintritten und Austritte mit Austritten zu vergleichen, auch die äusseren Berührungen gänzlich zu vernachlässigen (ib. S. 83), weil sie „eine Correction des Venus-Halbmessers von mehr als einer Sekunde verlangen würden“. (S. 85). Endlich ergab sich der, aus dem Durchgang berechnete Sonnen-Halbmesser um etwa 3″ kleiner, als der aus allen mikrometrischen Messungen und aus Durchgängen am Mittagsrohre hergeleitete. (S. 95).

Nicht zweifelhaft kann es sein, dass solche Differenzen, **welche völlig ausser den Grenzen der möglichen Beobachtungsfehler liegen**, nur in optischen Ursachen begründet sein können, und zwar, dass diese Ursachen in der **Strahlenbrechung der Venusatmosphäre zu suchen sind.**

---

*) Hierzu berechtigen um so mehr die durch Herrn **von Littrow** aufgefundenen **Hell**'schen Originalpapiere; obschon die richtige Herstellung der, nachweislich gefälschten Beobachtung wohl immer ein zweifelhaftes Unternehmen bleiben wird. Was soll man damit machen? wenn **Hell** von dem Anfang der, auf den Durchgang folgenden, so wichtigen Sonnenfinsterniss schreibt: „sed mihi jam 20 circiter secundis antea cepisse videtur“. (Venusdurchgang von 1769 etc. Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahr 1835. Bd. I.).

Nicht genug aber, dass, nach dem Gesagten, die Rechnung im Vergleich mit den Beobachtungen auf die Wirkung einer Venusatmosphäre hinweist, so ist dieselbe auch von vielen und sorgfältigen Beobachtern als eine, die Venus umgebende Veränderung des Sonnenlichts *), am deutlichsten am Rande der Sonne, jedoch auch mitten vor der Sonnenscheibe, wahrgenommen worden. Die bezüglichen Stellen in Röhls Denkwürdigkeiten sind folgende: .

„Ich ward sehr bestürzt (sagt Röhl S. 118) als ich die Venus mitten in der Sonne mit einem Ringe umgeben sah, welcher ein schwächeres Sonnenlicht durchliess, als der übrige Theil der Sonnenscheibe von sich warf .... Der Planet „war schon weit in der Sonne (bis dahin von Wolken bedeckt) und ich bemerkte sogleich den oben beschriebenen Ring" .... „Ich machte zwei Beobachtungen über die Lage des Planeten in der Sonne und schloss daraus den Ring den vierten Theil des Halbmessers des Planeten" .... „Alle Freunde die auf dem Observatorium gegenwärtig waren, sahen eben dasselbe, durch ein zweifüssiges Refractionsfernrohr, durch ein siebenzehnfüssiges Sehrohr, durch ein Gregorianisches Telescop von $2\frac{1}{2}'$ Localdistanz und durch ein sechsschuhiges Sehrohr. Sobald der erwähnte Ring sich dem Sonnenrande näherte, trat dieser merklich aus und erhielt eine weit stärkere Krümmung, als er vorher gehabt hatte und zur Zeit an andern Punkten hatte. Das Sonnenlicht verschwand mir zwischen dem Planeten und dem Rande der Sonne nicht mit der Geschwindigkeit eines Blitzes, sondern nach und nach, so dass ich beinahe $10''$ ungewiss blieb, ob das Sonnenlicht daselbst gänzlich erloschen war oder nicht .... Das ist gewiss, dass der Planet längst den Sonnenrand berührt hatte, wenn ich seine Krümmung gegen diejenige verglich, welche dieser an andern Punkten hatte, ehe das Sonnenlicht zwischen dem Rande des Planeten und der Sonne für mich erlosch. Auch bei der äusseren Berührung der Ränder war die Krümmung des Randes der Sonne völlig hergestellt, als ich noch nicht das helle Licht der Sonne an dem Orte des Austritts hergestellt zu sehen glaubte .... Herr Professor Mayer hatte eben dieses bei seiner Beobachtung angemerkt".

Die Erhebung des Sonnenrandes in der Nähe der Venus

*) Die Angaben darüber schwanken (Encke 1769 S. 66., Röhl S. 139 etc.). Manche Beobachter sahen einen dunkleren Ring um Venus, manche einen helleren, manche einen farbigen.

haben alle Beobachter gesehen, den Ring um die Venus nicht alle. Planman beobachtete in Cajaneborg (Finnland) wie folgt: (Röhl S. 128) „Um $3^h 59' 56''$ w. Z. bemerkte ich einen kleinen Ausschnitt aus der Sonne, dessen Sehne nach einigen Secunden einige Krümmung bildete. Während eine und die zweite Minute verflossen war, bemerkte ich Venus mit einem schwachen Licht umgeben, und einen Ring von einem besondern Licht die Scheiben der Sonne und der Venus trennen. Dieser Ring schien während des ganzen Durchgangs die Venus zu umgeben".

„Um $4^h 18' 5''$ erfolgte das gänzliche Eintauchen der Venus; denn in diesem Augenblick erschien mir Venus überall vom Sonnenlicht umgeben; insofern nicht folgender Umstand diesen Augenblick um $2''$ oder $3''$ zweifelhaft machen sollte. Während nämlich Venus schon beträchtlich innerhalb des lückenhaften Umkreises der Sonne (hirsutum solis limbum) erblickt wurde, erschienen oberhalb der Venus leuchtende Theile in den Raum vorzuspringen, welcher noch dunkler in dem Umkreis der Sonne erschien; welche Funken (scintillulae) jedoch in wenigen Sekunden zusammenflossen und die Venus mit einem zusammenhängenden Licht umgaben".

„Als Venus schon aus der Sonne austrat, geschah es, dass in dem Zeitpunkt, wo du glauben würdest, es müsse sich ein Theil der runden Venusscheibe von der Sonne loslösen, dass in diesem Zeitpunkt die Figur eines stumpfen, jedoch unregelmässigen Winkels übrig blieb, welcher innerhalb weniger Secunden spitz wurde, zuletzt das Aussehen einer Schwertklinge darbot, welche in einem Augenblick verschwand".

„Die Scheibe der Venus war verschieden, je nach der Grösse des Fernrohrs, am shwärzesten in den kleineren Fernröhren" (wohl durch den stärkeren Contrast mit schwächer geblendetem Licht). „In dem Fernrohr von 21 Fuss erschien die Scheibe der Venus mit einem schwachen Lichtschein umgeben. Sogar als Venus schon fast ganz ausgetreten war, wurde sie noch ganz erblickt, jedoch der Theil, welcher der Sonne näher lag, heller als der entferntere" *). Röhl fährt fort: „Dieser geschickte Beobachter hat also während des ganzen Durchgangs der Venus einen Ring um dieselbe gesehen".

---

*) Ohne Zweifel über der, damals noch so gut wie unbekannten Corona der Sonne (Littrow S. 337).

In Upsala wurde beobachtet (Röhl S 133) und zwar beim Eintritt.

„Herr Mallet sah in dem Telescop, wie die Sonne ihre kleinen Hörner ausschoss, um die Venus zu umfassen ..... als Venus weiter in die Sonne drang, zeigten sich die Auswüchse von der kreisförmigen Gestalt, welche die kleinen Hörner bildeten, noch deutlicher".

$3^h\ 37'\ 47''$ ungefähr war dieses beschriebene Ansehen ausserordentlich merklich .... Als die innere Berührung vor sich gehen sollte, schien Venus ganz und vollständig in die Sonne hineinzugehen. Sie hatte eine vollkommene Rundung, ausser da, wo sie dem Rand der Sonne am nächsten war. Dort erschien die dunkle Venus mehr länglich, oder es erstreckte sich vielmehr eine Erhöhung auf ihr; ähnlich der Gestalt eines Wassertropfens, bis an den Rand der Sonne .... Die Venus schien nun eine Strecke in die Sonne einzudringen und den Rand, auf welchen ein dunkles Band von der Venus hergeleitet wurde, zu verlassen. Dieses Band wurde bald schmaler und hörte .... plötzlich auf.

$9^h\ 27'\ 55''$ erschien beim Austritt der Venusrand so nahe an dem der Sonne, dass Berührung hätte eintreten müssen, wenn der Sonnenrand nicht ausgebogen gewesen wäre und eine Erhöhung auf der Sonne gebildet hätte.

$9^h\ 28'\ 3''$ war der Sonnenrand so weit geöffnet, dass H. Mallet sich einbildete, die Venus wäre schon ein kleines Stück über den Sonnenrand hinausgegangen. Auch ein Schein umgab die Venus, welcher ihre runde Gestalt klar zeigte. (Wohl die Corona der Sonne) .... „Ehe Venus halb ausgetreten war, schienen die Sonnenhörner sich ausserhalb des Sonnenzirkels zu berühren und Venus zu umfassen, wie beim Eintritt. Als Venus sich von der Sonne lostrennen wollte, kam es H. Mallet vor, als hinge sie im Verhältniss zu ihrer runden Gestalt viel zu lange an der Sonne; zuletzt aber wurde man gewahr, dass der runde Rand der Venus in eine eckige Gestalt auslief, welche anfangs stumpf war, sich dann aber mehr und mehr zuspitzte.

$9^h\ 46'\ 23''$ war dieser Winkel grösser als ein Rechter.

$9^h\ 46'\ 29''$ war der Winkel ganz spitz, wie eine Degenspitze und liess in einem Augenblicke die Sonne los.

In Stockholm bemerkte Herr Wilke beim Austritt ähnliche Umstände. Wargentin sah beim Eintritt und Austritt einen schwächeren Schein die Venus umgeben (die Corona, wie gesagt)

und während des Durchgangs glaubte er auch einige Male, dass die Sonne unmittelbar um den Fleck, welchen die Venus in der Sonne bildete, die Farbe veränderte, und bisweilen heller, bisweilen dunkler erschien, als der übrige Theil der Sonnenscheibe". (Röhl S. 136).

Hellant in Torne berichtet: „Während des Fortschreitens der Venus in der Sonne war deren Farbe unmittelbar am Umkreis des Flecks ein wenig heller, als der übrige Sonnenkörper *). Der helle Ring um die Venus erschien am deutlichsten, als die Sonne niedriger war, und wurde weniger merklich, als die Sonne höher am Himmel hinaufstieg". Der Berichterstatter sah übrigens eine ähnliche Erscheinung bei zwei Sonnenfinsternissen am Mondrande. (Röhl S. 137).

Von Delacaille wird berichtet: Er glaubte um Venus fortwährend eine Art von Nebel zu sehen. (Röhl S. 139).

Fünf Beobachter geben an: „Während der ganzen Dauer der Beobachtung bemerkten wir beständig um Venus eine Art von Ring, glänzender als der Rest der Sonne, und welcher schwächer wurde, je mehr er sich vom Planeten entfernte. Sogar zwei Damen bemerkten die Erscheinung. (ib.).

Desmares sah den Ring ebenfalls während des ganzen Durchgangs. (Röhl S. 140.).

Hier ist nun zunächst auffallend, dass nicht alle Beobachter die gleiche Erscheinung bemerkt haben, und dass dieselbe den berühmtesten mit den stärksten Fernröhren versehenen Astronomen entgangen ist.

Die Ursache dieser Verschiedenheit dürfte wohl gerade in der Stärke der angewendeten Fernröhre und in der Art und Weise liegen, wie man bei directen Sonnenbeobachtungen (und solche waren alle Beobachtungen des Venusdurchgangs) das Sonnenbild abblendet. Bekanntlich geschieht dieses dadurch, dass man mittels eines dunkeln Glases vor dem Ocular, die ungeheure Lichtmasse, welche man in das Fernrohr eingelassen hat, bis auf einen geringen Ueberrest wiederum vernichtet.

Dieses Verfahren bedingt es, dass die Blendgläser um so dunkler sein müssen, je mehr Licht das Fernrohr empfängt, also je stärker es ist. Nun macht aber ein dunkles Glas jedes Object

---

*) Vergl. S. 426, die Strahlen zwischen S' und S''.

unsichtbar, welches nicht eine gewisse Lichtstärke hat, und zwar in einem um so höheren Grade, je stärker das Fernrohr, also je dunkler das Glas gewählt wird. Nehme ich an, in einem schwächeren Fernrohr zerstörte das dunkle Glas 90% des Lichts, in dem stärkeren 98%, so würden in dem ersteren Gegenstände noch sichtbar werden, welche mehr als 90%, in dem letzteren nur solche, welche mehr als 98% Licht geben.

Ebenso schwächt bekanntlich eine stärkere Vergrösserung schwache Lichtunterschiede. Ich setze der Deutlichkeit wegen zwei Vergrösserungen desselben Fernrohrs, bei dem gleichen Gesichtsfelde (obwohl das Verhältniss nicht ganz in dieser Ausdehnung vorkommt) wie 1 zu 10, so würde bei der stärkeren Vergrösserung das Licht des betrachteten Gegenstandes nur ein Zehntheil so stark sein, als bei der schwächeren. Werden nun gleichzeitig mehrere Gegenstände von wenig verschiedener Lichtstärke betrachtet, so muss ihr Unterschied ebenfalls verhältnissmässig schwächer werden, und es liegt auf der Hand, dass ein so geringer Unterschied der Beobachtung leicht entgehen kann, zumal wenn der Beobachter seine Aufmerksamkeit nicht speciell darauf richtet.

Aehnliche Umstände mussten bei den Venusdurchgängen von 1761 und 1769 eintreten, insbesondere da die Fernröhre jener Zeit noch nicht die Vollkommenheit hatten, welche die heutige Technik ihnen gewährt. Nun haben aber gerade die berühmtesten Astronomen mit den stärksten Fernröhren beobachtet; um so mehr ist es also erklärlich, dass gerade ihnen die Venusatmosphäre vor der Sonnenscheibe unmerklich werden konnte.

Als Beleg für diese Erörterung führe ich die Beobachtung von Mairan wörtlich an. Derselbe sagt (Röhl S. 141):

„Während Venus durch die Sonne ging, sah ich fortwährend einen Ring am Rande von Venus, dessen Breite, welche ich mehrmals nahm, den zehnten oder eilften Theil des Durchmessers des Planeten hatte. Sein Licht war schwächer, als das der Sonnenscheibe, auf welcher es sich jedoch sehr deutlich unterscheiden liess. Ich beobachtete bald mit einem Perspectiv von 7 Fuss Brennweite, bald mit einem Spiegeltelescop von 16 Zoll durch ein rothbraunes Glas vor dem Ocular. So sah ich die Sonnenscheibe in einer schönen gelben Farbe und Venus schwarz und gut abgegrenzt, den Ring in Orange spielend. Aber um zu sehen, wie alle diese Gegenstände in einem stärkeren Fernrohr sich zeigen würden, wendete ich noch ein vortreffliches von

14 bis 15 Fuss an, mit demselben dunkeln Glase vor dem Ocular, und ich bemerkte keinen anderen Unterschied, ausser dass die äusseren Ränder des Ringes weniger entschieden waren und dass seine Färbung mehr der der Sonne sich näherte; eine gewöhnliche Wirkung grosser Gläser auf dergleichen neblichte Gegenstände, wie Kometenschweife, Nordlicht u. dgl., welche man durch kleinere Fernröhre, oder selbst mit blossen Augen, besser unterscheidet, als durch grosse".

Röhl fährt fort: „Dieses so deutlich beschriebene Phänomen, welches von so Vielen und durch so verschiedene Fernröhre gesehen worden, sollte man fast nicht mehr für einen Augentrug halten können, und gleichwohl findet sich (ausser einigen angeführten) von allen übrigen Beobachtern in Frankreich nichts davon angemerkt, und man muss hier eben schliessen, dass die Beobachter es nicht bemerkt haben".

Unter den englischen Beobachtern findet sich nur ein einziger, der mit einem 6füssigen Newton'schen Telescop von 110 bis 220facher Vergrösserung, um Venus einen sehr schmalen, wässerigen Halbschatten erblickte. Möglicher Weise trägt die trübere Atmosphäre Englands die Schuld.

Bei dem Durchgang von 1769 sind die gleichen Erscheinungen vielfach beobachtet, vielfach wieder nicht bemerkt worden, und doch musste hier durch den vorhergehenden Durchgang von 1761 die Aufmerksamkeit um so mehr geschärft sein. Encke führt die Erscheinungen (S. 66) summarisch an: „Im Allgemeinen dieselben Erscheinungen wie 1761, dasselbe schwarze Band, was bei der Vereinigung der Venus und Sonne die erstere ungebührlich verlängerte, besonders an den Orten, wo die Sonne niedrig stand, obgleich nicht überall bemerkt; ein lichter Ring oder ein farbiger um die Venus nur in der Nähe des Horizonts, und gewöhnlich nur von weniger bekannten Astronomen gesehen; keine Spur eines Trabanten; dieselbe Bestimmtheit bei Einigen in dem Zerreissen des Bandes, und Entstehung des Lichtfadens, so dass sie keine Secunde zweifelhaft sind, während andere längere Zeit ungewiss bleiben. Eine sehr schätzbare Zugabe ist die, hin und wieder bemerkte Zwischenzeit der beiden Phasen, wo die beiderseitigen Peripherien sich zu berühren schienen, und wo Venus sich zuerst von der Sonne trennte. Man sieht daraus, dass zwischen ihnen eine Zeit von 40″ bis 50″ verfliessen kann, zugleich deutet aber die grosse Verschiedenheit dieser Zwischenzeit, die manchmal nur 6″ beträgt, darauf hin, dass eine von beiden

Erscheinungen unbestimmter, und optischen Einwirkungen mehr ausgesetzt ist.

Sehr merkwürdig ist der Umstand, dass Einigen der Beobachter der Ring um Venus, während diese sich vor der Sonne befand, heller oder farbig, anderen dunkler erschien, als der übrige Theil der Sonnenscheibe. Ich wäre versucht, diese anscheinenden Widersprüche dadurch zu erklären, dass, wie oben gezeigt wurde, der Planet vor der Sonne ein doppeltes Bild giebt, ein verkleinertes der Nachtseite des Planeten bis zu seinem beleuchteten Horizont, und ein, um die Strahlenbrechung vergrössertes des Planeten selbst. Zwischen diesen beiden Bildern muss ein dunklerer Halbschatten den Planeten umgeben, mit zunehmendem Licht nach aussen, wie man es in der That gesehen hat. Ueber die Scheibe des Planeten hinaus aber erblickt man, neben dem directen Licht der Sonne und mit diesem vereinigt noch einen Theil der hinter dem Planeten liegenden Sonnenscheibe, denselben Theil, welcher bei der inneren Berührung des Sonnenrandes aus diesem bogenförmig heraustritt. Dieses so verstärkte, und beim Durchgang durch die Atmosphäre des Planeten gefärbte Sonnenlicht erschien den Beobachtern, welche darauf aufmerksam wurden, heller als die übrige Scheibe der Sonne. Dass der Lichtunterschied, wie Beobachter mittheilen, geringer geworden sein sollte, als die Sonne höher stieg, könnte man wohl als eine Täuschung ansehen, wie sie bei Dingen, wo jedes Maass der Vergleichung fehlt, leicht möglich, und aus der Anstrengung der Sehnerven erklärlich ist. Haben nun einige Beobachter ihre Aufmerksamkeit auf den dunkleren Ring, andere auf den helleren gerichtet, so liesse sich die Verschiedenheit einigermassen erklären; wiewohl es immer auffallend bleibt, dass nicht ein dunkler und ein heller Ring über einander gesehen worden sind.

Eine englische Beobachtung scheint diese Ansicht zu bestätigen. Leider ist sie nicht recht klar, und ich gebe deshalb den Text nach dem Original (Röhl S. 143):

„I had a very clear glass next my eye, and the sun's limb appeared most perfectly defined, and at the distance of about a sixth part of Venus's diameter from its edge was the darkest part of Venus's phasis, from which to the centre an imperfect light increased and illuminated about the centre, etc.

Whilst Venus was on the sun's limb, no other penumbra appeared between the limb of Venus and the sun, than had appeared before on the sun's disk, and therefore J concluded,

there must be an athmosphere about Venus, which receiving weak impressions of light between the limbs of Venus and the sun, occasioned the uncertainty of ascertaining the exact instant of the internal contact; ....

Die sonderbaren Erscheinungen, welche sich zeigen beim Eintritt, bevor der Lichtfaden sich bildet und um den Planeten schliesst, und ebenso beim Austritt, bevor der Lichtfaden zerreisst, und ehe Venus die Sonne verlässt, sie sind aus einer Irradiation des Sonnenlichts, wie Lalande annahm, (Encke S. 96) wohl schwer zu begreifen. Da die Irradiation eine scheinbare Verbreiterung des leuchtenden Gegenstandes ist, so kann diese nur auf Kosten der dunkeln Flächen stattfinden. Es müsste also aus diesem Grunde der Planet, wenn er sich dem Sonnenrande nähert, gegen diesen abgeplattet erscheinen. Ebenso, wenn er sich von demselben entfernt; unmöglich aber könnte er sich gegen den Sonnenrand zuspitzen „wie eine Degenspitze“; ebensowenig könnte der Planet durch Irradiation den Rand der Sonnenscheibe bogenförmig nach aussen drängen, wie es gleichwohl geschah.

Aus der Strahlenbrechung der Venusatmosphäre erklären sich jene Erscheinungen dagegen sehr leicht.

Denn da der Durchmesser der Sonne um vieles grösser ist, als der von Venus, so müssen beim Eintreten des Planeten, wenn dessen innere Berührung mit dem Sonnenrande in a (Fig. IV.) erfolgen soll, die Lichtstrahlen von d, d' weit früher zu dem Beobachter gelangen, als die Strahlen von a. Solche Strahlen aber bewegen sich nicht allein in Ebenen dC, $d'C$, sondern wegen der Strahlenbrechung in der Atmosphäre des Planeten auch in Richtungen senkrecht und schräg gegen aC. Es sieht also der Beobachter Strahlen von d und d' her gegen a hin gerichtet, lange bevor er die Strahlen des Sonnenrandes bei a in der Richtung aC erblicken kann. Es muss darum der Sonnenrand nicht nur über dem Planeten eine Ausbiegung machen, sondern es wird diese Ausbiegung, welche den Planeten in Gestalt zweier Hörner umfasst, auch gegen den Punkt a hin so lange unterbrochen sein, bis der directe Lichtstrahl über a in der Ebene aC das Auge des Beobachters erreicht. Daher einmal das hörnerartige Vorspringen des Sonnenrandes über den Planeten, und dann das bandartige Zusammenhängen des letzteren mit dem Sonnenrande, bis zum plötzlichen Verschwinden der Verbindung, beides aus einer Irradiation völlig unerklärbar. In dieser Weise erklärt sich das scheinbare Zuspitzen des Planeten gegen den Sonnenrand

hin, und das längere Haften dieser Spitze am Sonnenrande bis zur plötzlichen Trennung *).

Ich gebe als Beispiel die Beobachtung einer Verweilung nach Encke 1769 S. 58 und 59.

Tahaite, Beobachter Green, Fernrohr 2 f., Spiegeltelescop, Vergrösserung 140.

Eintritt.

Umkreis der Sonne in Berührung	21^h 41′ 0,2″
Lichtfaden geschlossen	21 41 40,2

Austritt.

Lichtfaden geöffnet	3^h 11′ 50,3″
Umkreis in Berührung	3 12 38,3
Aeussere Berührung	3 30 1,5

Nach den hier entwickelten Gründen und Umständen unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass die Strahlenbrechung in der Atmosphäre der unteren Planeten von dem wesentlichsten Einfluss auf die Beobachtung und Berechnung der Durchgänge sein muss, und dass sie also wohl nicht so vernachlässigt werden kann, wie es bis jetzt geschehen ist. Der Unterschied zwischen Beobachtung und Berechnung, welcher sich bei den Verweilungen, also in der Richtung der Parallelkreise so augenscheinlich gezeigt hat, er musste in ähnlicher Weise auch in meridionaler Richtung, also bei der Vergleichung der Eintritte oder der Austritte unter einander sich kundgeben und seinen Einfluss äussern, indem er die Parallaxe scheinbar verkleinerte. Darum scheint die Hoffnung wohl nicht unbegründet, dass die Durchgänge der Venus von 1761 und 1769 noch jetzt den Astronomen ein hinreichendes Material bieten dürften, um den Einfluss jenes wichtigen Elements auf die Parallaxenrechnung zu bestimmen, und nebenbei die Strahlenbrechung auf Venus mit der auf unserer Erde zu vergleichen. Die Ermittelung dieses Werthes würde zugleich die so wünschenswerthe Vergleichung der Encke'schen und der Hansenschen Sonnen-Parallaxe vervollständigen.

---

*) Die Angabe (Encke 1761 S. 103) es sei der dunkle Faden in der Mitte zerrissen, und es habe sich das eine Ende desselben in den Sonnenrand, das andere in die Venus gezogen, widerspricht andern Berichten, wonach das Verschwinden des Fadens momentan erfolgte. Auch hat das Einziehen eines schmalen dunkeln Fadens in den hellen Sonnenrand wenig Wahrscheinlichkeit. Der Beobachter sagt auch nur darüber, wie es ihm vorkam. (Röhl S. 133.)

XXXI.

Experimentelle magnetische Untersuchungen.

(Erster Theil.)

Von

Herrn Dr. **Külp**,

Assistent der Physik am grossherzogl. Polytechnikum in Darmstadt.

I.

Ueber die Fernwirkung eines Magnetpoles.

Wirkt ein langer Magnetstab MN (Taf. X. Fig. I.) auf eine kleine Declinations-Nadel n, so kann man, ohne einen Fehler zu begehen, annehmen, dass bei hinreichender Länge des Stabes MN lediglich nur der Pol N auf die Declinations-Nadel ns eine Wirkung ausübt; in gleicher Weise kann man bei hinreichender Entfernung des Poles N von der Nadel $Nn = Nc$ setzen. Diess vorausgeschickt, haben wir nun für die Kraft ϱ, mit welcher der Pol N auf die Nadel wirkt, den Ausdruck

$$\text{A)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varrho = \frac{m\mu}{r^2},$$

wo m die magnetische Action des Poles N, r seine Entfernung von der Nadel und μ die entsprechende magnetische Action der Nadel bedeuten.

Durch den Einfluss der horizontalen Componente μH des Erdmagnetismus und der Kraft ϱ des Magnetpoles N wird indessen die Nadel ns nach $n_1 s_1$ um den Winkel $w = acb$ abgelenkt.

Zieht man jetzt $ab \perp ns$, so hat man $\operatorname{tg} w = \frac{ab}{bc}$. Da nun, wie leicht einzusehen, $ab = \varrho$ und $bc = \mu H$ ist, so haben wir:

B) . . . . $\varrho = \mu H . \operatorname{tg} w$.

Diese Gleichung, mit Gleichung A zusammengestellt, gibt

$$\frac{m\mu}{r^2} = \mu H . \operatorname{tg} w,$$

woraus

1) . . . . $\frac{m}{H} = r^2 . \operatorname{tg} w$.

Für eine zweite Entfernung r_1 haben wir

2) . . . . $\frac{m}{H} = r_1^2 . \operatorname{tg} w_1$;

daher ist

$$r^2 . \operatorname{tg} w = r_1^2 . \operatorname{tg} w_1,$$

d. h. die Producte aus den Quadraten der Entfernungen und den Tangenten der Ablenkungs-Winkel geben einen constanten Werth; oder

Die Quadrate der Entfernungen sind umgekehrt proportional den Tangenten der Ablenkungs-Winkel.

Aus diesem Satze ergibt sich ein leichtes Beobachtungsmittel zur Nachweisung des Gesetzes über die Abnahme der Intensität eines Magnetpoles mit dem Quadrate der Entfernung. Um dieses Gesetz auf besagte Weise darzuthun, bediente ich mich eines sehr langen Magnetstabes und einer an einem Coconfaden aufgehangenen kleinen Declinations-Nadel, welche letztere die Ablenkungs-Winkel bis auf 15 Min. genau auf einem getheilten Kreise angab. Hierbei erhielt ich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Resultate:

r in Meter.	Abl. W.	$\frac{m}{H}$	r in Meter.	Abl. W.	$\frac{m}{H}$
0,623	21° 45′	0,1548	0,478	34° 0′	0,1541
0,596	23° 30′	0,1544	0,457	37° 0′	0,1573
0,572	25° 0′	0,1525	0,428	40° 45′	0,1578
0,542	27° 30′	0,1529	0,413	42° 45′	0,1576
0,514	30° 15′	0,1540	0,390	45° 30′	0,1547
0,496	32° 0′	0,1537	0,362	50° 15′	0,1575

Man sieht aus dem constanten Werth $\frac{m}{H}$, dass Verfahren und Calculation richtig sind, und möchte diess Verfahren wegen der Leichtigkeit und Sicherheit der Ausführung wohl zu empfehlen sein.

Sind die abl. Winkel sehr klein, so können dieselben selbst statt der Tang. gesetzt werden.

II.

Ueber den Einfluss der Breite und des Gewichtes von Ankern auf die Tragkräfte der Magnete.

Es ist bekannt, dass die Fläche eines Ankers, welche der Polfläche eines Hufeisenmagneten gegenübersteht, einen Einfluss auf die Tragkraft dieses letzteren ausübt. Um diesen Einfluss besser kennen zu lernen, nahm ich zwei stahlharte gesättigte Hufeisenlamellen A und B und liess mir zu jeder derselben Anker verfertigen, deren Gewicht und Material gleich und deren Flächenbreiten sich zu der Polfläche der zugehörigen Hufeisenlamellen verhielten wie:

$$1:1;\ \frac{3}{4}:1;\ \frac{1}{2}:1;\ \frac{1}{4}:1;\ \frac{1}{8}:1 \text{ und weniger als } \frac{1}{8}:1.$$

Mit diesen Ankern bestimmte ich bei jeder Lamelle die verschiedenen Tragkräfte, nachdem ich die Lamellen vorher vollständig gesättigt und diese Sättigung vor jedem einzelnen Versuche wiederholt hatte. In der folgenden Tabelle habe ich die erhaltenen Resultate übersichtlich zusammengestellt und die erhaltenen Tragkräfte zugleich in Procenten der Maximaltragkraft (bei $^1/_8$ Flächenbreite) ausgedrückt.

Bezeichnung der Flächenbreite der Anker ausgedrückt in der Polfläche der Lamellen.	Bezeichnung der Hufeisenlamellen.			
	Lamelle A.		Lamelle B.	
	Tragkräfte in gr.	In Procenten der Tragkraft bei $\frac{1}{8}$ Flächenbreite.	Tragkräfte in gr.	In Procenten der Tragkraft bei $\frac{1}{8}$ Flächenbreite.
1	1971	55	2002	54
$^3/_4$	2050	57	2032	55
$^1/_2$	2417	67	2414	65
$^1/_4$	3285	91	3390	92
$^1/_8$	3577	100	3659	100
Kante	2460	68	2344	64

Bei Betrachtung dieser Tabelle ergeben sich folgende Schlüsse in Bezug der Aenderung der Tragkräfte bei Ankern von gleichem Gewichte, gleicher Materie aber verschiedenen Flächenbreiten, insofern die magnetischen Erregungen stets dieselben sind:

1) Die Maximaltragkraft ist bei den Flächenbreiten $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$ vorhanden;

2) Bei den Breiten 1 und $\frac{3}{4}$ sind die Tragkräfte nahezu gleich und annähernd der Hälfte der Maximaltragkraft;

3) Bei den Breiten $\frac{1}{2}$ sowie der Kante sind die Tragkräfte ebenfalls nicht sehr von einander verschieden.

Die beiden Hufeisenlamellen A und B waren nahezu Ersatzmagnete, dessbalb fielen auch ihre Tragkräfte nicht sehr verschieden aus.

Wenn man unter dem Tragverhältnisse, die Tragkraft der Gewichtseinheit eines Magneten (reducirte Tragkraft) versteht, so muss sich dieses nach dem Obigen offenbar auch mit der Flächenbreite der Anker ändern Berechnet man nach der bekannten Relation

$$T = a\sqrt[3]{Q^2}$$

die verschiedenen Tragverhältnisse a und stellt das Ganze zusammen, so erhält man eine Tabelle, welche für die Tragverhältnisse dieselben Schlüsse wie Oben gibt.

Um weiter den Einfluss kennen zu lernen, den verschieden schwere Anker auf die Tragkräfte äussern, so liess ich mir zu jeder der obigen Hufeisenlamellen A und B 4 Anker verfertigen, welche gleiche Flächenbreiten (gleich der Polfläche der Lamellen) hatten und deren Gewichte sich zu den Gewichten der Lamellen verhielten wie:

$$1:1;\quad \frac{3}{4}:1;\quad \frac{1}{2}:1 \text{ und } \frac{1}{4}:1.$$

Mit diesen vier Ankern bestimmte ich die jedesmalige Tragkraft der Hufeisenlamellen, nachdem ich diese letzteren vor jedem einzelnen Versuche mittelst meiner Sättigungsmethode vollständig gesättigt hatte. Die gefundenen Resultate wurden in nachstehenderTabelle zusammengestellt.

Angabe des Gewichtes der Anker ausgedrückt in dem Gewicht der Lamellen.	Lamelle A.		Lamelle B.	
	Tragkräfte in gr.	In Procenten der Tragkraft bei dem Anker $\frac{3}{4}$ d. Gew. der Lamellen.	Tragkräfte in gr.	In Procenten der Tragkraft bei dem Anker $\frac{3}{4}$ d. Gew. der Lamellen.
1	1949	81	2073	81
$^3/_4$	2400	100	2547	100
$^1/_2$	2094	87	2239	87
$^1/_4$	2040	85	2055	80

Vorstehende Tabelle liefert folgende Schlüsse in Bezug der Aenderung der Tragkraft eines Hufeisenmagneten beim Gebrauche von Ankern gleicher Materie, gleicher Flächenbreite, aber von ungleichen Gewichten, insofern die magnetischen Erregungen dieselben sind:

1) Ist das Gewicht der Anker bis zu $^3/_4$ von dem der Lamelle, so sind im Allgemeinen die Tragkräfte bei schweren Ankern grösser, als bei leichteren.

2) War das Gewicht des Ankers $^3/_4$ von dem der Lamelle, so hatte ein Maximum statt.

3) Ein Minimum fand ich für die Werthe $^1/_4$ und 1.

Berechnet man auch hier die Tragverhältnisse, so findet man, dass obige Schlüsse auch auf die Tragverhältnisse anzuwenden sind.

III.

Untersuchungen über Tragkräfte von Hufeisenlamellen und kurzen Transversalmagneten mittelst der magnetischen Compensationsmethode.

Wirkt eine an beiden Polen gleich starke Hufeisenlamelle von nicht zu grosser Weite in einer nicht zu geringen Entfernung auf eine Declinationsnadel (Taf. X. Fig. II.) so erfolgt auf den Pol n der Nadel eine Abstossung, welche durch nx und eine Anziehung, welche durch ny dargestellt werden mag. Da N und S gleich stark erregt sind, so ist auch $nx = ny$ und die Resul-

tirende nz ist parallel zu NS. Bezeichnen wir nun die Grösse nz mit R, mit ϱ die gemeinschaftlichen Componenten, und setzen

$$NS = \delta$$

und

$$Sn = nv = r,$$

so besteht die Relation:

$$\frac{R}{\varrho} = \frac{\delta}{r},$$

woraus:

$$R = \frac{\delta}{r} . \varrho.$$

Bezeichnet man weiter mit m die gemeinschaftliche Quantität des erregten Magnetismus an den Polen N und S, die entsprechende Quantität der Nadel mit μ, so ist:

$$\varrho = \frac{\mu m}{r^2},$$

folglich:

$$R = \frac{\mu m \delta}{r^3}.$$

Für eine zweite Hufeisenlamelle besteht analog der Ausdruck:

$$R_1 = \frac{\mu m_1 \delta_1}{r_1^3}.$$

Liegen nun die beiden Lamellen auf verschiedenen Seiten einer Declinationsnadel und halten sie dieselbe auf Null fest, so sind in diesem Falle die Resultirenden gleich, also $R = R_1$ woraus:

$$\text{I.} \quad \frac{m}{m_1} = \frac{r^3}{r_1^3} . \frac{\delta_1}{\delta}$$

entsteht, d. h.: Die gemeinschaftlichen Quantitäten der erregten Magnetismen zweier Hufeisenlamellen stehen im directen Verhältniss der Entfernungen von der Nadel (da diese auf Null verblieb) und im umgekehrten Verhältnisse ihrer äusseren Weiten.

Da offenbar mit einer stärkeren Quantität erregten Magnetismus auch die Tragkraft eines Magneten zunehmen muss, so kam

sich auf den Gedanken für das Verhältniss der magnetischen Momente $\frac{m}{m_1}$ das Verhältniss der Tragkräfte $\frac{T}{T_1}$ der beiden Hufeisenlamellen in Relation I. zu setzen, wodurch:

$$\text{II.} \quad \frac{T}{T_1} = \frac{r^3}{r_1^3} \cdot \frac{\delta_1}{\delta}$$

entstand.

Um die Richtigkeit dieses Ausdrucks zu prüfen, nahm ich zwei Hufeisenlamellen von gleichem Materiale, deren äussere Weiten 5,7cm und 7,7cm waren; dieselben brachten in den Entfernungen 20cm und 24,2cm die Nadel der Declinationsbussole auf Null und trugen 1793 und 2317gr.

Nach Gleichung II. hat man:

$$\frac{1793}{2317} = \frac{20^3 \cdot 7,7}{24,2^3 \cdot 5,7}$$

oder:

$$0,77 = 0,76.$$

Der geringe Unterschied von 0,01 kann vernachlässigt werden; es besteht daher der Schluss:

Die Tragkräfte zweier Hufeisenmagnete von gleichem Materiale stehen im directen Verhältniss der Kuben ihrer Entfernungen von der Declinationsnadel und im umgekehrten Verhältnisse ihrer äusseren Weiten.

Wird in Gleichung II. $\delta = \delta_1$, hat man es also mit gleichweiten Lamellen zu thun, so geht dieselbe über in:

$$\text{III.} \quad \frac{T}{T_1} = \frac{r^3}{r_1^3},$$

d. h.: **Die Tragkräfte zweier Hufeisenlamellen von gleicher Weite und gleichem Material verhalten sich wie die Kuben ihres Abstandes von der Nadel.**

Experimentell habe ich dieses Gesetz gefunden an zwei Hufeisenlamellen, deren Tragkräfte 1750gr und 1655gr und deren Entfernungen von der Nadel 28cm und 27cm waren.

Wird in Gleichung III. $r = r_1$, so wird auch $T = T_1$, d. h.: **Lamellen von gleichem Materiale, gleicher Weite und**

gleicher Entfernung von der Nadel — sogenannte Ersatzlamellen — haben gleiche Tragkräfte.

Von zwei solchen Lamellen trug die eine 182 Lth. und die andere 180 Lth., sie waren also fast gänzlich gleich bezüglich ihrer Tragkräfte.

Alle vorhergehenden Versuche wurden mit der Unterstellung gemacht, dass die Lamellen gesättigt waren; solches zu bewirken, bediente ich mich eines starken Electromagneten, indem ich zugleich die bereits mitgetheilte Sättigungsmethode anwandte. Um indessen das Gesetz auch auf nicht gesättigte Lamellen auszudehnen, nahm ich zwei Ersatzlamellen, und brachte durch Streichen die eine derselben nur auf einen bestimmten Theil der in der andern Lamelle erregten Quantität. Ich setzte nämlich $m_1 = \frac{p}{q} . m$, wo $\frac{p}{q}$ diesen bestimmten Theil bezeichnet und erhielt aus Gleichung III. die Relation:

$$\text{IV.} \quad r_1 = r\sqrt[3]{\frac{p}{q}};$$

da

$$\frac{T}{T_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{r^3}{r_1^3} = \frac{q}{p}.$$

Für $\frac{p}{q}$ nahm ich nun verschiedene Werthe an, wählte r willkürlich, bestimmte r_1 und strich die zweite Lamelle, deren magnetische Quantität m_1 war, so lange, bis sie in der Entfernung r_1 von der Nadel die letztere, welche von der ersten Lamelle in der Entfernung r abgelenkt wurde, auf Null zurückbrachte. Trat dieser Punkt ein, so mussten auch die Tragkräfte beider Lamellen im Verhältniss $\frac{p}{q}$ stehen. Ich stellte darüber viele Versuche an und fand auch das Gesetz für die Werthe $\frac{11}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{6}{12}$ bestätigt. Für geringere Werthe als $\frac{6}{12}$ hatte jedoch das Gesetz keine Gültigkeit mehr. Um nur einen dieser Versuche anzuführen, will ich den Nachweis der Richtigkeit des Gesetzes für den Werth $\frac{9}{12}$ liefern.

Die Normallamelle welche 121 Lth. trug, lag in einer Entfer-

nung von 20^{cm} von der Nadel, die andere Lamelle, deren magnetische Erregung nur $\frac{9}{12}$ von derjenigen der Normallamelle sein sollte, musste nach Gleichung IV. in der Entfernung:

$$r_1 = 20\sqrt[3]{\frac{9}{12}} = 18{,}1^{cm}$$

die Nadel auf Null zurückbringen. Durch Streichen und Gegenstreichen wurde dieser Punkt erreicht und die Lamelle trug hierauf 94 Lth., es bestehen die Verhältnisse:

$$\frac{9}{12} = \frac{94}{121},$$

welche nur einen Unterschied von 0,02 zeigen.

Für kurze Transversalmagnete habe ich dieselben Resultate, wie für Hufeisenlamellen erhalten, und gelangte durch gleiche Schlüsse zur Relation II. Es ist indessen hier zu bemerken, dass die Anker, welche ich hierzu anwandte, in der Mitte ausgeschnitten waren. Unter den zahlreichen angestellten Versuchen werden nur folgende zwei bemerkt.

1) Zwei Stäbe hatten die Längen 8^{cm} und 4^{cm} trugen 900^{gr} und 620^{gr} und brachten im Abstand 20^{cm} und 14^{cm} die Nadel zu Null. Hieraus ergibt sich nach der Gleichung II.:

$$\frac{900}{620} = \frac{\overline{20}^3}{\overline{14}^3} \cdot \frac{4}{8}$$

oder:

$$1{,}45 = 1{,}45.$$

2) Zwei gleich lange Stäbe hatten die Entfernungen 20^{cm} und 21,4^{cm} von der Nadel und trugen 710 und 900^{gr}, folglich nach Relation III.:

$$\frac{710}{900} = \frac{\overline{20}^3}{\overline{21{,}4}^3}$$

oder:

$$0{,}78 = 0{,}81.$$

Nach dem Vorhergehenden besteht allgemein der Schluss:

Die Tragkräfte zweier, aus gleichem Materiale gefertigten, gesättigten oder ihrem Sättigungspunkte nahestehenden Hufeisenlamellen oder kurzer Trans-

versalmagnete stehen im directen Verhältnisse der Kuben ihrer Entfernungen von der Declinationsnadel (in welchen die letztere auf Null verblieb) und im umgekehrten Verhältnisse ihrer äusseren Weiten oder Längen.

IV.

Unipolare und bipolare Tragkräfte.

Weiter stellte ich auch Versuche über die bipolare Tragkraft eines kurzen Transversalmagneten verglichen mit der unipolaren Tragkraft desselben an, und fand für 6 Stäbe *A, B, C, D, E, F* die in folgender Tabelle zusammengestellten Resultate.

Bezeichnung der Stäbe.	Bipolare Tragkräfte in gr.	Unipolare Tragkräfte in gr., 1. Versuchsreihe.	Unipolare Tragkräfte in gr., 2. Versuchsreihe.	Unipolare Tragkräfte in Procenten der bipolaren Tragkräfte.
A	710	320	314	45,4
B	900	215	212	21,6
C	650	157	159	24,1
D	505	136	129	26,9
E	600	131	131	21,8
F	620	157	160	25,3

Die letzte Vertikalspalte berechtigt zu folgendem Schluss:

Die unipolare Tragkraft eines kurzen Transversalmagneten ist annähernd $^1/_4$ der bipolaren Tragkraft.

Doch bleiben Abweichungen nicht ausgeschlossen, welche wohl in der Ungleichartigkeit des Materials ihren Grund haben.

Auch für stahlharte gesättigte Hufeisenlamellen fand ich das gleiche Resultat; zwei stahlharte Lamellen ergaben das Nachstehende.

Bezeichnung der Lamellen.	Bipolare Tragkraft in gr.	Unipolare Tragkraft in gr.	Unipolare Tragkraft ausgedrückt in Procenten der bipolaren.
A	1777	430	24
B	2192	580	26

XXXII.

Ein Problem aus der Optik.

Von

Herrn Dr. ***Ad. Hochheim,***
Lehrer an der höheren Gewerbeschule zu Magdeburg.

(Figuren s. Tafel XII. und XIII.)

---

§. 1.

Zwei durchsichtige Medien, deren Brechungsverhältniss $\alpha:\beta$ ist, seien durch eine Fläche von einander getrennt. In jedem der beiden Medien sei ein Punkt gegeben, von denen der eine Licht ausstrahlt. In der folgenden Untersuchung soll nachgewiesen werden, in welchem Punkte die Trennungsfläche von einem Strahl getroffen werden muss, wenn derselbe nach der Brechung durch den andern gegebenen Punkt hindurchgehen soll.

Die Gleichung der Trennungsfläche sei:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F(xyz) = 0.$$

In dem Medium M befinde sich der lichtstrahlende Punkt A mit den Coordinaten a, b, c. In dem Medium N sei der Punkt B, durch den ein Strahl nach der Brechung hindurchgehen soll, mit den Coordinaten a_1, b_1, c_1. Die Coordinaten desjenigen Punktes der Oberfläche, den der von A ausgehende Strahl treffen soll, seien x, y, z. Die Normale der Oberfläche in diesem Punkte schliesse mit dem auffallenden Strahle ϱ den Winkel λ und mit dem gebrochenen Strahle ϱ_1 den Winkel μ ein, dann ist:

$$\sin\lambda : \sin\mu = \alpha : \beta.$$

Die Richtungscosinusse des Strahles ϱ sind:

$$\xi = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}},$$

$$\eta = \frac{b-y}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}},$$

$$\zeta = \frac{c-z}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}};$$

die des gebrochenen Strahles ϱ_1:

$$\xi_1 = \frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}},$$

$$\eta_1 = \frac{y-b_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}},$$

$$\zeta_1 = \frac{z-c_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}}.$$

Mit Hülfe der Richtungscosinusse der Normale im Punkte x, y, z ergeben sich für $\cos\lambda$ und $\cos\mu$ folgende Werthe:

$$\cos\lambda = \frac{(a-x)\frac{dF}{dx}+(b-y)\frac{dF}{dy}+(c-z)\frac{dF}{dz}}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{(x-a_1)\frac{dF}{dx}+(y-b_1)\frac{dF}{dy}+(z-c_1)\frac{dF}{dz}}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}.$$

Die oben angegebene Proportion kann auch die Form annehmen:

$$\sqrt{1-\cos^2\lambda} : \sqrt{1-\cos^2\mu} = \alpha : \beta.$$

Setzt man in diese die für $\cos\lambda$ und $\cos\mu$ gefundenen Werthe ein, so entsteht die Gleichung:

(2)

$$\beta^2-\alpha^2=$$

$$\frac{\beta^2\left\{(a-x)\frac{dF}{dx}+(b-y)\frac{dF}{dy}+(c-z)\frac{dF}{dz}\right\}^2}{\{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\}\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right\}}$$

$$-\frac{\alpha^2\left\{(x-a_1)\frac{dF}{dx}+(y-b_1)\frac{dF}{dy}+(z-c_1)\frac{dF}{dz}\right\}^2}{\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2\}\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right\}}.$$

Der einfallende Strahl und der gebrochene Strahl liegen stets mit dem Einfallslothe in einer Ebene; die Punkte A und B müssen demnach in einer Normalebene der Oberfläche

$$F(xyz)=0$$

liegen. Die Gleichungen dieser Normalebene sind:

$$c-z\ =f(a-x\ )+g(b-y\ ),$$

$$z-c_1=f(x-a_1)+g(y-b_1);$$

in denen aber f und g der Bedingungsgleichung:

$$1+f\frac{dz}{dx}+g\frac{dz}{dy}=0$$

genügen müssen.

Durch Elimination von f und g ergiebt sich die Gleichung:

(3)

$$(a-x)(y-b_1)-(x-a_1)(b-y)$$

$$+\frac{dz}{dx}\{(y-b_1)(c-z)-(b-y)(z-c_1)\}$$

$$+\frac{dz}{dy}\{(a-x)(z-c_1)-(x-a_1)(c-z)\}=0.$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) enthalten nur die 3 Unbekannten x, y, z, sie werden demnach zur Bestimmung derselben ausreichen.

§. 2.

Die Trennungsfläche zwischen den beiden Medien möge eine Ebene sein, deren Gleichung sei:

(4) . . . . . . $x\cos p + y\cos q + z\cos r - \delta = 0;$

dann ist:

$$\frac{dF}{dx} = \cos p, \qquad \frac{dF}{dy} = \cos q, \qquad \frac{dF}{dz} = \cos r.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (2) eingesetzt, so ergiebt sich:

$$\beta^2 - \alpha^2 =$$
$$\frac{\beta^2\{(a-x)\cos p + (b-y)\cos q + (c-z)\cos r\}^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$
$$-\frac{\alpha^2\{(x-a_1)\cos p + (y-b_1)\cos q + (z-c_1)\cos r\}^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}$$

oder:

(5)

$$\beta^2 - \alpha^2 =$$
$$\frac{\beta^2\{a\cos p + b\cos q + c\cos r - \delta\}^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$
$$-\frac{\alpha^2\{\delta - a_1\cos p - b_1\cos q - c_1\cos r\}^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}$$

Die Gleichung (3) endlich erhält die Form:

(6)

$$\cos r\{(a-x)(y-b_1) - (x-a_1)(b-y)\}$$
$$-\cos p\{(y-b_1)(c-z) - (b-y)(z-c_1)\}$$
$$-\cos q\{(a-x)(z-c_1) - (x-a_1)(c-z)\} = 0.$$

Durch die Gleichungen (4), (5), (6) sind die Werthe von x, y, z bestimmt.

Um möglichst einfache Resultate zu erhalten, wollen wir annehmen, dass die Trennungsebene der beiden Medien die xy-Ebene des Coordinatensystems sei, und dass der Punkt A in der z-Axe liege; es wird dann

$$\cos p = 0, \quad \cos q = 0, \quad \cos r = 1, \quad \delta = 0, \quad a = 0, \quad b = 0.$$

Da z in diesem Falle $=0$ wird, so sind nur die Coordinaten xy zu bestimmen.

Die Gleichungen (4), (5), (6) nehmen nun folgende Gestalt an:

$$z=0,$$

$$\beta^2-\alpha^2=\frac{\beta^2c^2}{x^2+y^2+c^2}-\frac{\alpha^2c_1{}^2}{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+c_1{}^2},$$

$$xb_1=ya_1,$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, dass der gesuchte Punkt xy in der xy-Ebene auf einer geraden Linie liegt, die mit der x-Axe einen Winkel einschliesst, dessen Tangente $=\frac{b_1}{a_1}$ ist; es ist daher nur nöthig, den Abstand r des betreffenden Punktes vom Anfangspunkte des Coordinatensystems zu suchen.

Da $y=r\sin\varphi$ und $x=r\cos\varphi$ ist, so nimmt die Gleichung (5) die Gestalt an:

$$\beta^2-\alpha^2=\frac{\beta^2c^2}{r^2+c^2}-\frac{\alpha^2c_1{}^2}{(r\sin\varphi-a_1)^2+(r\cos\varphi-b_1)^2+c_1{}^2},$$

oder:

$$\beta^2-\alpha^2=\frac{\beta^2c^2}{r^2+c^2}-\frac{\alpha^2c_1{}^2}{r^2-2mr+l^2},$$

wo

$$m=\sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2}$$

und

$$l^2=a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2$$

ist. Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung mit

$$(r^2+c^2)(r^2-2mr+l^2),$$

so ergiebt sich:

$$(7)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; r^4-2mr^3+pr^2+qr+s=0,$$

wo

$$p=\frac{\beta^2l^2-\alpha^2l^2-\alpha^2c^2+\alpha^2c_1{}^2}{\beta^2-\alpha^2},$$

$$q=\frac{2\alpha^2c^2m}{\beta^2-\alpha^2},$$

$$s=\frac{-\alpha^2c^2l^2+\alpha^2c^2c_1{}^2}{\beta^2-\alpha^2}$$

ist.

Damit das zweite Glied wegfällt, möge $u + \frac{1}{4}m$ statt r eingesetzt werden; die zu lösende Gleichung ist dann:

$$u^4 + Au^2 + Bu + C = 0,$$

wo

$$A = p - {}^3/_2 m^2,$$

$$B = -m^3 + q + mp,$$

$$C = {}^1/_4 m^2 p + s - {}^3/_{16} m^4 + {}^1/_2 mq$$

ist.

Die vier Wurzeln dieser Gleichung sind:

(8)

$$u = -\tfrac{1}{2}k \pm \sqrt{\left(+\frac{B}{2k} - \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{1}{2}A\right)},$$

$$u = +\tfrac{1}{2}k \pm \sqrt{\left(-\frac{B}{2k} - \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{1}{2}A\right)}.$$

Der Werth k, der hier einzuführen ist, ergiebt sich aus der kubischen Gleichung:

$$y^3 + 2Ay^2 + (A^2 - 4C)y - B^2 = 0,$$

in der $y = k^2$ ist.

Addirt man $\frac{1}{4}m$ zu jeder der Wurzeln u, so erhält man die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung. Von diesen wird aber nur eine einzige für unsern Zweck brauchbar sein und zwar muss dieselbe reell und positiv sein.

§. 3.

Die Trennungsfläche zwischen den beiden Medien M und N möge eine Kugeloberfläche sein, deren Gleichung

(9) . . . . $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

sei; dann ist:

$$\frac{dF}{dx} = 2x, \qquad \frac{dF}{dy} = 2y, \qquad \frac{dF}{dz} = 2z.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (2) eingesetzt, so nimmt dieselbe folgende Form an:

(10)

$$\beta^2-\alpha^2 = \frac{\beta^2\{2(a-x)x+2(b-y)y+2(c-z)z\}^2}{\{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\}\{4(x^2+y^2+z^2)\}}$$
$$-\frac{\alpha^2\{2(x-a_1)x+2(y-b_1)y+2(z-c_1)z\}^2}{\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2\}\{4(x^2+y^2+z^2)\}},$$

oder:

$$(\beta^2-\alpha^2)r^2 = \frac{\beta^2\{ax+by+cz-r^2\}^2}{\{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\}}$$
$$-\frac{\alpha^2\{r^2-(a_1x+b_1y+c_1z)\}^2}{\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2\}}.$$

Die Gleichung (3) erhält dann die Gestalt:

$$z\{(a-x)(y-b_1)-(x-a_1)(b-y)\}$$
$$-x\{(y-b_1)(c-z)-(b-y)(z-c_1)\}$$
$$-y\{(a-x)(z-c_1)-(x-a_1)(c-z)\}=0$$

oder:

$$(11) \quad . \;.\; . \quad x(b_1c-bc_1)+y(ac_1-a_1c)+z(a_1b-ab_1)=0.$$

Durch diese Gleichungen (9), (10), (11) sind die Werthe von x, y, z bestimmt.

Die Gleichung (11) repräsentirt eine Ebene, welche durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems geht; der gesuchte Punkt muss demnach auf dem grössten Kugelkreise liegen, in dem die Kugel von der Ebene geschnitten wird. Der Ort desselben wird näher bestimmt durch die Gleichung (10).

Da die Gleichung der Kugel nicht verändert wird, wie wir auch immer das rechtwinklige Coordinatensystem um das Centrum als Anfangspunkt drehen mögen, so können wir die Richtung der z-Axe so annehmen, dass sie durch den Punkt A geht. Die Gleichungen (10) und (11) werden dann eine einfachere Gestalt annehmen, weil a und b gleich 0 zu setzen sind.

(12)

$$(\beta^2-\alpha^2)r^2 = \frac{\beta^2(cz-r^2)^2}{r^2+c^2-2cz} - \frac{\alpha^2\{r^2-(a_1x+b_1y+c_1z)\}^2}{r^2-2(a_1x+b_1y+c_1z)+l^2},$$

$$(13) \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \quad xb_1-ya_1=0.$$

Die Gleichung (13) ist die Gleichung einer geraden Linie in der xy-Ebene, in welcher sich der Fusspunkt der Ordinate z befindet. Um die Lage des Punktes x, y, z festzustellen, wird es daher nur nöthig sein, den Abstand s dieses Fusspunktes vom

Anfangspunkte des Coordinatensystems und die Länge der Ordinate z zu berechnen.

Führen wir s statt $\sqrt{x^2+y^2}$ ein, so erhalten wir:

$$s^2+z^2=r^2,$$

$$(\beta^2-\alpha^2)r^2=\frac{\beta^2(cz-r^2)^2}{r^2+c^2-2cz}-\frac{\alpha^2(r^2-s\sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2}-c_1z)^2}{r^2-2(s\sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2}+c_1z)+l^2}.$$

Durch Elimination von s entsteht dann die Gleichung:

(14)

$$\begin{aligned}r^2(\beta^2-\alpha^2)(r^2+c^2-2cz)\{r^2-2(\sqrt{(r^2-z^2)(a_1{}^2+b_1{}^2)}+c_1z)+l^2\}\\ =\quad \beta^2(cz-r^2)^2\{r^2-2(\sqrt{(r^2-z^2)(a_1{}^2+b_1{}^2)}+c_1z)+l^2\}\\ -\alpha^2(r^2-\sqrt{(r^2-z^2)(a_1{}^2+b_1{}^2)}-c_1z)^2(r^2+c^2-2cz),\end{aligned}$$

durch welche der Werth von z bestimmt wird.

Nimmt man an, dass der Punkt B ebenfalls in der z-Axe liegt und zwar auf dem negativen Theile derselben, so werden die Coordinaten a_1, b_1 ebenfalls $=0$ und c_1 wird negativ. Die Gleichung (13) verschwindet dann, die Gleichung (12) dagegen geht über in:

(15)

$$x^2+y^2+z^2+2z\cdot\frac{(\beta^2c^2c_1+\alpha^2cc_1{}^2)}{\beta^2c^2-\alpha^2c_1{}^2}+\frac{c^2c_1{}^2(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^2c^2-\alpha^2c_1{}^2}=0,$$

(16) . . . . $x^2+y^2=0$.

Die erste dieser beiden Gleichungen ist die einer Kugel, deren Mittelpunkt auf der z-Axe liegt und zwar in der Entfernung:

$$\frac{\beta^2c^2c_1+\alpha^2cc_1{}^2}{\alpha^2c_1{}^2-\beta^2c^2}$$

vom 0-Punkte.

Der Radius derselben ist:

$$\frac{\alpha\beta(c^2c_1+cc_1{}^2)}{\beta^2c^2-\alpha^2c_1{}^2}.$$

Die beiden Kugeln werden sich in einem Kreise durchschneiden, dessen Mittelpunkt auf der z-Axe liegt und vom 0-Punkte die Entfernung

$$\frac{c^2(\alpha^2c_1{}^2-r^2\beta^2)+c_1{}^2(r^2\alpha^2-c^2\beta^2)}{2cc_1(\beta^2c+\alpha^2c_1)}$$

hat.

Aus der Gleichung (16) folgt endlich noch, dass $z=r$ ist.

Befindet sich also der Punkt B in einem Durchmesser d Kugel, in dessen Verlängerung auf der entgegengesetzten Sei vom Mittelpunkte der lichtstrahlende Punkt A liegt, so trifft de jenige Strahl, der sich von A aus in der Richtung des Durc messers fortpflanzt, den Punkt B; ausserdem aber wird jed Strahl des Strahlenkegels, der die Kugeloberfläche in dem vo erwähnten Schnittkreise trifft, nach der Brechung durch de Punkt B gehen.

§. 4.

Wir wollen endlich annehmen, dass die Trennungsfläch zwischen den beiden Medien M und N ein dreiaxiges Ellipsoi sei, die Gleichung desselben:

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

es wird dann:

$$\frac{dF}{dx} = 2Ax, \qquad \frac{dF}{dy} = 2By, \qquad \frac{dF}{dz} = 2Cz$$

sein.

Werden diese Werthe in die Gleichung (2) eingesetzt, so wird dieselbe folgende Gestalt annehmen:

$$(18)$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{\beta^2\{(a-x)Ax + (b-y)By + (c-z)Cz\}^2}{\{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2\}\{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2\}} - \frac{\alpha^2\{(x-a_1)Ax + (y-b_1)By + (z-c_1)Cz\}^2}{\{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2\}\{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2\}}$$

Die Gleichung (3) endlich wird die Form annehmen:

$$\begin{aligned} &Cz\{(a-x)(y-b_1) - (x-a_1)(b-y)\} \\ &- Ax\{(y-b_1)(c-z) - (b-y)(z-c_1)\} \\ &- By\{(a-x)(z-c_1) - (x-a_1)(c-z)\} = 0 \end{aligned}$$

oder:

$$(19)$$

$$\begin{aligned} &xy(c-c_1)(B-A) + xz(b-b_1)(A-C) \\ &+ yz(a-a_1)(C-B) + xA(b_1c - bc_1) \\ &+ yB(ac_1 - a_1c) + zC(a_1b - ab_1) = 0. \end{aligned}$$

Durch diese 3 Gleichungen (17), (18), (19) ist der Punkt xy in dem der Strahl die Oberfläche treffen muss, bestimmt. Di

Entwicklung der Werthe von xyz aus diesen Gleichungen würde mit grossen Schwierigkeiten verknüpft sein; wir wollen uns daher darauf beschränken, einige specielle Fälle näher zu betrachten.

1) Der leuchtende Punkt möge in der Verlängerung der grössten Axe des Ellipsoides, die mit der x-Axe zusammenfällt liegen, dagegen der andere Punkt in dem Anfangspunkte des Coordinatensystems; es wird dann:

$$b = 0, \quad c = 0, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0.$$

Die Gleichung (18) erhält die Gestalt:

$$(20)$$
$$(\beta^2-\alpha^2)(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)((a-x)^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$= \beta^2(Aax-1)^2(x^2+y^2+z^2)-\alpha^2((a-x)^2+y^2+z^2),$$

die Gleichung (19) dagegen verschwindet.

Zur Bestimmung des Punktes xyz sind demnach nur noch die beiden Gleichungen vorhanden: (17) die des Ellipsoides und (20) die einer Oberfläche 6ten Grades; wir erhalten demnach in diesem Falle nicht einen einzigen Punkt, sondern eine Reihe von Punkten, die alle in einer Curve doppelter Krümmung liegen, in der die beiden Oberflächen sich schneiden.

Befindet sich also der leuchtende Punkt in der x-Axe, so werden alle von ihm ausgehenden Strahleu, welche das Ellipsoid in der doppelt gekrümmten Curve treffen, nach der Brechung durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems hindurchgehen.

2) Der leuchtende Punkt A liege wieder in der Verlängerung der grössten Axe in der Entfernung a vom Anfangspunkte des Coordinatensystems; der Punkt B dagegen in dem Brennpunkte auf dem negativen Theile derselben; es wird dann

$$b = 0, \quad c = 0, \quad a_1 = -e, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe erhält die Gleichung (18) die Gestalt:

$$(21)$$
$$(\beta^2-\alpha^2)(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)((a-x)^2+y^2+z^2)((x+e)^2+y^2+z^2)$$
$$= \quad \beta^2\{Aax-1\}^2((x+e)^2+y^2+z^2)$$
$$-\alpha^2\{1+Aex\}^2((a-x)^2+y^2+z^2),$$

die Gleichung (19) verschwindet wieder.

Zur Bestimmung von xyz sind also nur noch 2 Gleichungen

vorhanden, wir erhalten demnach eine ganze Reihe von Punkten, deren geometrischer Ort die Curve doppelter Krümmung ist, in der sich das Ellipsoid und die Oberfläche, deren Gleichung (19) ist, schneiden.

Alle von dem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen, die das Ellipsoid in dieser Curve doppelter Krümmung treffen, werden also nach der Brechung durch den Punkt $-e$ gehen müssen.

Aehnliche Resultate werden sich ergeben, wenn man den Punkt B in irgend einem Punkte des negativen Theils der grössten Axe legt, oder wenn man den Punkt B in irgend einer der beiden andern Axen des Ellipsoides und den lichtstrahlenden Punkt in der Verlängerung derselben annimmt.

§. 5.

Wir wollen jetzt unsere vorige Betrachtung auf eine Ebene übertragen, d. h. wir wollen annehmen, die beiden Punkte A und B befänden sich in einer Ebene und zwischen beiden liege in derselben Ebene eine ebene Curve, die die beiden verschiedenen Medien trenne. Die Gleichungen (1), (2), (3) werden dann eine einfachere Gestalt annehmen. Nehmen wir zu unserer Betrachtung die xy-Ebene, so haben wir jedes $z=0$ zu setzen. Die Gleichung der trennenden Curve wird dann:

$$(1^a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F(xy)=0.$$

Die Gleichung (2) geht über in:

$$(2^a)$$

$$\beta^2-\alpha^2 = \frac{\beta^2\left\{(a-x)\frac{dF}{dx}+(b-y)\frac{dF}{dy}\right\}^2}{\{(a-x)^2+(b-y)^2\}\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right\}}$$

$$-\frac{\alpha^2\left\{(x-a_1)\frac{dF}{dx}+(y-b_1)\frac{dF}{dy}\right\}^2}{\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\}\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right\}}.$$

Die Gleichung (3) endlich verschwindet ganz, da es sich hier von selbst versteht, dass der einfallende und der gebrochene Strahl in ein und derselben Ebene liegen müssen.

Die Gleichungen (1^a), (2^a) werden ausreichen zur Bestimmung des Punktes, in dem die gegebene Curve von dem einfallenden Strahl getroffen werden muss.

§. 6.

Die beiden Medien seien von einander geschieden durch die Peripherie eines Kreises, dessen Gleichung:

$$(22) \quad x^2 + y^2 = r^2;$$

dann ist:

$$\frac{dF}{dx} = 2x, \qquad \frac{dF}{dy} = 2y.$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung (2^a) ein, so ergiebt sich:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{\beta^2\{(a-x)2x + (b-y)2y\}^2}{((a-x)^2 + (b-y)^2)(4x^2+4y^2)} - \frac{\alpha^2\{(x-a_1)2x + (y-b_1)2y\}^2}{((x-a_1)^2 + (y-b_1)^2)(4x^2+4y^2)},$$

oder nach einigen Umformungen:

$$(23) \quad \frac{\beta^2(bx-ay)^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \frac{\alpha^2(a_1 y - b_1 x)^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}.$$

Allgemein erhält man also die Gleichung einer Curve 4ten Grades, die den Kreis in den Punkten schneidet, in denen er von den auffallenden Strahlen getroffen werden muss. Zur Bestimmung der Abscissen dieser Schnittpunkte dient die Gleichung:

$$\frac{\beta^2\{x^2(b^2-a^2) - 2abx\sqrt{r^2-x^2} + a^2r^2\}}{a^2 + b^2 + r^2 - 2(ax + b\sqrt{r^2-x^2})}$$
$$= \frac{\alpha^2\{a_1{}^2r^2 + x^2(b_1{}^2 - a_1{}^2) - 2a_1b_1x\sqrt{r^2-x^2}\}}{a_1{}^2 + b_1{}^2 + r^2 - 2(a_1x + b_1\sqrt{r^2-x^2})}.$$

Fassen wir einige besondere Fälle näher ins Auge:

1) Die beiden Punkte mögen auf der y-Axe liegen, wir haben dann a und $a_1 = 0$ zu setzen und b_1 negativ zu nehmen. Die Gleichung (23) erhält dann eine einfachere Gestalt, sie zerfällt in:

$$(24) \ldots\ldots \quad \frac{\beta^2 b^2}{x^2+(b-y)^2} = \frac{\alpha^2 b_1^2}{x^2+(y+b_1)^2}$$

und

$$(25) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = 0.$$

Multipliciren wir beide Seiten der Gleichung (24) mit

$$(x^2+(b-y)^2)(x^2+(y+b_1)^2),$$

so ergiebt sich:

$$x^2+y^2+2y\,\frac{\beta^2 b^2 b_1+\alpha^2 b b_1^2}{\beta^2 b^2-\alpha^2 b_1^2} = \frac{b^2 b_1^2(\alpha^2-\beta^2)}{\beta^2 b^2-\alpha^2 b_1^2}.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt in

$$\left(0,\ -\frac{\beta^2 b^2 b_1+\alpha^2 b b_1^2}{\beta^2 b^2-\alpha^2 b_1^2}\right)$$

liegt, und dessen Radius

$$= \frac{\alpha\beta b b_1(b+b_1)}{\beta^2 b^2-\alpha^2 b_1^2}$$

ist. Er schneidet im Allgemeinen den gegebenen Kreis in 2 Punkten, deren Coordinaten sich mit Hülfe der vorstehenden Gleichungen leicht bestimmen lassen.

Aus den Gleichungen (24) und (25) folgt demnach, dass 3 von A ausgehende Strahlen nach dem Punkte B gelangen. Der mittlere bewegt sich in der Richtung der y-Axe ohne Brechung fort, die beiden Seitenstrahlen treffen den gegebenen Kreis in den Punkten, wo er von dem Kreise (24) geschnitten wird. Wird $b_1 = 0$, oder positiv, so fallen die Seitenstrahlen weg und nur der mittlere bleibt bestehen.

2) Der lichtstrahlende Punkt A liege auf der y-Axe. Es möge der Punkt der Peripherie des Kreises bestimmt werden, der getroffen werden muss, damit der gebrochene Strahl die x-Axe lothrecht schneidet.

Wir setzen in der Gleichung (23) $a = 0$, $b_1 = 0$ und $x = a_1$, dann geht dieselbe über in:

$$(26) \ldots\ldots\ldots \quad (y-b)^2+x^2 = \frac{\beta^2 b^2}{\alpha^2}$$

und

$$(27) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = 0.$$

Die Gleichung (26) ist die eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der y-Axe gerade im leuchtenden Punkte liegt und dessen Radius $\frac{\beta b}{a}$ ist. Er schneidet den gegebenen Kreis in 2 Punkten, deren Coordinaten

$$x = \pm\sqrt{r^2 - \frac{(r^2\alpha^2 + b^2\alpha^2 - b^2\beta^2)^2}{4b^2\alpha^2}},$$

$$y = \frac{r^2\alpha^2 + b^2\alpha^2 - b^2\beta^2}{2b\alpha^2}$$

sind.

Die Peripherie des Kreises wird also wieder von 3 Strahlen getroffen, von denen der mittelste mit der y-Axe zusammenfällt.

§. 7.

Die beiden Medien mögen durch eine Parabel von einander geschieden sein. Wir benutzen die Scheitelgleichung der Parabel:

(28) . . . . $y^2 = px.$

$$\frac{dF}{dx} = -p, \qquad \frac{dF}{dy} = 2y.$$

Nach Einsetzung dieser Werthe nimmt die Gleichung (2^a) folgende Gestalt an:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{\beta^2\{-(a-x)p + (b-y)2y\}^2}{\{(a-x)^2 + (b-y)^2\}\{p^2 + 4y^2\}} - \frac{\alpha^2\{-(x-a_1)p + (y-b_1)2y\}^2}{\{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2\}\{p^2 + 4y^2\}},$$

oder nach einigen Umformungen:

(29)

$$\frac{\beta^2\{(b-y)p + (a-x)2y\}^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \frac{\alpha^2\{(y-b_1)p + (x-a_1)2y\}^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}.$$

Es ergiebt sich also die Gleichung einer Curve 6ten Grades, welche die Parabel in dem Punkte schneidet, in der sie der auffallende Strahl treffen muss.

Wir wenden uns wieder der Betrachtung einiger Specialfälle zu:

1) Die beiden Punkte mögen sich auf der x-Axe befinden. Der lichtstrahlende Punkt A auf dem negativen Theile, der Punkt B auf dem positiven Theile derselben. Die Coordinaten der beiden Punkte sind dann:

$$-a,\ 0 \quad \text{und} \quad +a_1,\ 0.$$

Nach Einsetzung dieser Werthe zerfällt die Gleichung (29) in:

$$(30)\qquad y^2 = \frac{\alpha^2\{p+2(x-a_1)\}^2(a+x)^2-\beta^2\{p+2(a+x)\}^2(x-a_1)^2}{\beta^2(p+2(a+x))^2-\alpha^2(p+2(x-a_1))^2}$$

und

$$(31)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ y = 0.$$

Aus Gleichung (31) folgt, dass ein Strahl in der Richtung der x-Axe ungebrochen durch den Scheitel der Parabel geht. Ausser diesem einen Strahl werden aber auch noch die, welche die Parabel in den Punkten treffen, welche sie mit der Curve 4ten Grades (30) gemein hat, nach der Brechung durch den Punkt B gehen.

2) Der lichtstrahlende Punkt A liege auf dem positiven Theile der x-Axe. In welchem Punkte muss die Parabel von einem Lichtstrahle getroffen werden, damit derselbe nach der Brechung der x-Axe parallel läuft? Der Fall ist nur dann möglich, wenn $\beta > \alpha$ ist. Wir setzen:

$$b = 0, \qquad a_1 = 0, \qquad b_1 = y;$$

dann geht die Gleichung (29) über in:

$$(32)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ y = 0$$

und

$$(33)\ \ldots\ldots\ \beta^2\{p-2(a-x)\}^2 = 4\alpha^2\{(a-x)^2+y^2\}$$

oder:

$$\left\{x - \frac{4a(\beta^2-\alpha^2)-2p\beta^2}{4(\beta^2-\alpha^2)}\right\}^2 - y^2\,\frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} = \frac{\alpha^2\beta^2p^2}{4(\beta^2-\alpha^2)^2};$$

dies ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Mittelpunktscoordinaten:

$$\frac{4a(\beta^2-\alpha^2)-2p\beta^2}{4(\beta^2-\alpha^2)},\ 0$$

und deren Halb-Axen:

$$\frac{\alpha\beta p}{2(\beta^2-\alpha^2)} \quad \text{und} \quad \frac{\beta p}{2\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$$

sind.

Ausser dem Strahle also, der sich in der Richtung der x-Axe fortpflanzt, werden auch diejenigen, welche die Schnittpunkte der Parabel und Hyperbel treffen, nach der Brechung die y-Axe lothrecht durchschneiden.

§. 8.

Die Grenze zwischen beiden Medien sei gebildet durch eine Ellipse, deren Gleichung:

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad Ax^2+By^2=1$$

ist; dann ist:

$$\frac{dF}{dx}=2Ax, \qquad \frac{dF}{dy}=2By.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung (2^a) ergiebt sich:

$$(35)$$

$$\frac{\beta^2\{Ax(b-y)-By(a-x)\}^2}{(a-x)^2+(b-y)^2}=\frac{\alpha^2\{Ax(y-b_1)-By(x-a_1)\}^2}{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}.$$

Die Ellipse muss in den Punkten, wo sie von dieser Curve 6ten Grades geschnitten wird, von den auffallenden Strahlen getroffen werden.

Wir wollen jetzt annehmen:

1) Der leuchtende Punkt A liege auf der Verlängerung der grösseren Axe, der Punkt B dagegen im Anfangspunkte des Coordinatensystems; es ist dann:

$$b=0, \qquad a_1=0, \qquad b_1=0$$

und die Gleichung (35) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$(36) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\beta^2\{Ax+B(a-x)\}^2}{(a-x)^2+y^2}=\frac{\alpha^2x^2(B-A)^2}{x^2+y^2},$$

$$(37) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad y=0$$

und nach einigen Umformungen geht die Gleichung (36) über in:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{Lx^2 - 2x(r-s) + (p-q)}{-Lx^2 - 2sx + q}},$$

wo

$$L = (\alpha^2 - \beta^2)(B-A)^2,$$
$$s = \beta^2 aB(B-A),$$
$$q = \beta^2 B^2 a^2,$$
$$r = \alpha^2 a(B-A)^2,$$
$$p = \alpha^2 a^2 (B-A)^2$$

ist.

Die Curve, welche dieser Gleichung entspricht, hat die in Fig. I. angegebene Form; sie besteht aus 2 getrennten Theilen, von denen sich jeder symmetrisch zur x-Axe ausbreitet. Der eine liegt zwischen

$$x_1 = -\frac{s}{L} + \frac{\sqrt{qL+s^2}}{L}$$

und

$$x_2 = +\frac{r-s}{L} + \frac{\sqrt{(r-s)^2-(p-q)L}}{L};$$

der zweite zwischen

$$x_3 = -\frac{s}{L} - \frac{\sqrt{qL+s^2}}{L}$$

und

$$x_4 = +\frac{r-s}{L} - \frac{\sqrt{(r-s)^2-(p-q)L}}{L}.$$

Für jeden Werth von x, der nicht zwischen diesen Intervallen liegt, wird y imaginär.

Die Arme des links liegenden Theiles schneiden die x-Axe in x_4 und im 0-Punkte und erstrecken sich für x_3 in die Unendlichkeit. Die Arme des rechts liegenden Theiles gehen vom Punkte x_2 aus und erstrecken sich für x_1 in die Unendlichkeit. Asymptoten der Curve sind die in x_1 und x_3 auf der x-Axe errichteten Lothe. Zwischen dem Anfangspunkte des Coordinatensystems und x_4 besitzt die Curve zwei Culminationspunkte, zwischen x_1 und x_2 zwei Beugungspunkte. Der rechts liegende Theil der

Curve hat mit der gegebenen Ellipse keinen Punkt gemein. Der links liegende Theil dagegen schneidet die Ellipse im Allgemeinen in vier Punkten. Doch sind hier nur die beiden Punkte brauchbar, in denen die Schleife die Ellipse schneidet. Die Strahlen, welche von a kommend diese Punkte treffen, gehen nach der Brechung durch den 0-Punkt. Aus Gleichung (37) folgt endlich, dass der Strahl, welcher der Richtung der x-Axe folgt, ohne Brechung zum 0-Punkte gelangt.

2) Der leuchtende Punkt A liege auf der x-Axe. In welchen Punkten muss die Ellipse von den auffallenden Strahlen getroffen werden, damit die gebrochenen Strahlen der x-Axe parallel laufen?

Es wird in diesem Falle

$$b = 0, \qquad a_1 = 0, \qquad b_1 = y;$$

dann zerfällt die Gleichung (35) in:

$$(38) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta^2\{Ax + B(a-x)\}^2 = \alpha^2 B^2\{(a-x)^2 + y^2\},$$

$$(39) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = 0.$$

(38) ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Mittelpunkts. coordinaten:

$$-\frac{a(\beta^2 AB - \beta^2 B^2 + \alpha^2 B^2)}{\beta^2(A-B)^2 - \alpha^2 B^2}, \quad 0$$

und deren Halbaxen:

$$\frac{\alpha\beta ABa}{\beta^2(A-B)^2 - \alpha^2 B^2}$$

und

$$\frac{\alpha\beta ABa}{\alpha B\sqrt{\beta^2(A-B)^2 - \alpha^2 B^2}}$$

sind.

Schneidet diese Hyperbel die gegebene Ellipse rechts von der y-Axe, so werden die Strahlen, welche auf diese Schnittpunkte treffen, nach der Brechung lothrecht auf der y-Axe stehen. Aus Gleichung (39) endlich folgt, dass sich ausserdem ein Strahl in der Richtung der x-Axe fortbewegt.

§. 9.

Die beiden Punkte A und B mögen sich jetzt in ein und demselben durchsichtigen Medium befinden, welches durch die Oberfläche

$$1^b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(xyz) = 0$$

begrenzt werde. Wir wollen untersuchen, in welchem Punkte die Oberfläche durch einen von A ausgehenden Strahl getroffen werden muss, damit der reflektirte Strahl durch den Punkt B gehe. Die Coordinaten des Punktes A mögen wieder a, b, c sein, die des Punktes B a_1, b_1, c_1 und die Coordinaten des gesuchten Punktes auf der Oberfläche x, y, z. Da der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel sein muss, so werden auch die Cosinusse derselben gleich sein müssen; die Gleichung (2) geht demnach jetzt über in:

$$(2^b)$$

$$\frac{\left\{(a-x)\frac{dF}{dx}+(b-y)\frac{dF}{dy}+(c-z)\frac{dF}{dz}\right\}^2}{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}$$
$$=\frac{\left\{(x-a_1)\frac{dF}{dx}+(y-b_1)\frac{dF}{dy}+(z-c_1)\frac{dF}{dz}\right\}^2}{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}.$$

Da ferner der einfallende und der reflektirte Strahl mit dem Einfallslothe in ein und derselben Ebene liegen müssen, so müssen auch die Punkte A und B in einer Normalebene der Oberfläche $F(xyz) = 0$ liegen. Die Gleichung derselben ist:

$$(3^b)$$

$$(a-x)(y-b_1)-(x-a_1)(b-y)$$
$$+\frac{dz}{dx}\cdot\{(y-b_1)(c-z)-(b-y)(z-c_1)\}$$
$$+\frac{dz}{dy}\cdot\{(a-x)(z-c_1)-(x-a_1)(c-z)\}=0.$$

Diese drei Gleichungen werden zur Bestimmung von x, y, z ausreichen.

§. 10.

Die Oberfläche sei eine Ebene, die Gleichung derselben:

$$(40) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x\cos p + y\cos q + z\cos r - \delta = 0,$$

dann ist:

$$\frac{dF}{dx} = \cos p, \quad \frac{dF}{dy} = \cos q, \quad \frac{dF}{dz} = \cos r.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe erhält die Gleichung (2^b) die Form:

$$\frac{\{(a-x)\cos p + (b-y)\cos q + (c-z)\cos r\}^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$
$$= \frac{\{(x-a_1)\cos p + (y-b_1)\cos q + (z-c_1)\cos r\}^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2},$$

oder:

(41)

$$\frac{\{a\cos p + b\cos q + c\cos r - \delta\}^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$
$$= \frac{\{\delta - (a_1\cos p + b_1\cos q + c_1\cos r)\}^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}.$$

Die Gleichung (3^b) endlich nimmt die Gestalt an:

(42)

$$\cos r\{(a-x)(y-b_1) - (x-a_1)(b-y)\}$$
$$-\cos p\{(y-b_1)(c-z) - (b-y)(z-c_1)\}$$
$$-\cos q\{(a-x)(z-c_1) - (x-a_1)(c-z)\} = 0.$$

Ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, können wir annehmen, dass die gegebene Ebene mit der xy-Ebene des Coordinatensystems zusammenfällt und der Punkt A, der die Lichtstrahlen aussendet, in der z-Axe liegt. Die vorstehenden Gleichungen werden dann sehr einfache Gestalten annehmen, da $\cos p = 0$, $\cos q = 0$, $\cos r = 1$, $\delta = 0$, $a = 0$ und $b = 0$ zu setzen ist.

$$z = 0,$$

$$\frac{c^2}{x^2 + y^2 + c^2} = \frac{c_1^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + c_1^2},$$

$$y = \frac{b_1}{a_1}x.$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, dass der getroffene Punkt in einer geraden Linie liegt, die durch den 0-Punkt geht und mit der x-Axe einen Winkel einschliesst, dessen Tangente

$= \frac{b_1}{a_1}$ ist. Eliminiren wir aus den beiden letzten Gleichungen so ergiebt sich zur Bestimmung von x folgende Relation:

$$c(x - a_1) = \pm c_1 x,$$

daraus folgt:

$$x = \frac{ca_1}{c \mp c_1}.$$

Von diesen beiden Werthen können wir hier nur den ein $\frac{a_1 c}{c + c_1}$ gebrauchen, weil sonst für $c_1 > c$ x negativ werden würd Für y dagegen findet man den Werth:

$$\frac{b_1 c}{c + c_1}.$$

Trifft also ein von A ausgehender Lichtstrahl die spiegeln xy-Ebene in dem Punkte

$$\left(\frac{a_1 c}{c + c_1}, \quad \frac{b_1 c}{c + c_1}\right),$$

so geht er nach der Reflexion durch den Punkt a_1, b_1, c_1.

§. 11.

Die Grenzfläche für das Medium möge eine Kugel sein, der Gleichung:

$$(43) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

dann ist:

$$\frac{dF}{dx} = 2x, \quad \frac{dF}{dy} = 2y, \quad \frac{dF}{dz} = 2z.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung (2^b) halten wir:

$$\frac{\{(a-x)2x + (b-y)2y + (c-z)2z\}^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

$$= \frac{\{(x-a_1)2x + (y-b_1)2y + (z-c_1)2z\}^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2},$$

oder:

$$\frac{\{2ax+2by+2cz-2r^2\}^2}{r^2-2(ax+by+cz)+l^2}=\frac{\{2r^2-(2a_1x+2b_1y+2c_1z)\}^2}{r^2-2(a_1x+b_1y+c_1z)+l_1^2}. \tag{44}$$

Die Gleichung (3^b) endlich geht nach einigen Umformungen über in:

$$(45)\ .\ .\ .\ x(b_1c-bc_1)+y(ac_1-a_1c)+z(a_1b-ab_1)=0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems geht und die Kugel also in einem grössten Kugelkreise schneidet. Auf diesem Kreise muss der Punkt x, y, z liegen, sein Ort wird näher bestimmt durch die Gleichung (44).

Da die Gleichung der Kugel unverändert bleibt, wie wir auch immer das Coordinatensystem um den Anfangspunkt drehen mögen, so können wir annehmen, dass die z-Axe durch den lichtstrahlenden Punkt A geht. Die Coordinaten a und b sind dann $=0$ zu setzen und die Gleichungen (44) und (45) gehen demnach über in:

$$\begin{aligned}(cz-r^2)^2\{r^2-2(a_1x+b_1y+c_1z)+l_1^2\}\\ =\{r^2-(a_1x+b_1y+c_1z)\}^2(r^2-2cz+c^2)\end{aligned} \tag{46}$$

und

$$(47)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ xb_1-ya_1=0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen und (43) x und y, so erhält man zur Bestimmung von z die Relation:

$$\begin{aligned}(cz-r^2)^2(r^2-2(\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{r^2-z^2}+c_1z)+l_1^2)\\ =(r^2-(\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{r^2-z^2}+c_1z))^2(c^2-2cz+r^2).\end{aligned}$$

Bezeichnen wir kurz den hier brauchbaren Werth von z mit M, so ist:

$$x=\pm a_1\sqrt{\frac{r^2-M^2}{a_1^2+b_1^2}}$$

und

$$y=\pm b_1\sqrt{\frac{r^2-M^2}{a_1^2+b_1^2}}.$$

Wir wollen hier ebenso wie früher den besonderen Fall in's Auge fassen, dass A und B auf demselben Durchmesser der

Kugel liegen und zwar A auf dem positiven Theile der z-Axe, B auf dem negativen Theile derselben. c_1 ist demnach eine negative Grösse. Die Gleichung (47) verschwindet, während die Gleichung (46), sobald man $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ setzt, folgende Form annimmt:

$$(cz - r^2)^2(r^2 + 2c_1z + c_1^2) = (r^2 + c_1z)^2(r^2 - 2cz + c^2),$$

oder wenn man nach Potenzen von z ordnet:

$$z^3 - \frac{r^2(c_1 - c)}{2cc_1}z^2 - r^2z + \frac{r^4(c_1 - c)}{2cc_1} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$z_1 = +r,$$

$$z_2 = -r,$$

$$z_3 = \frac{r^2(c_1 - c)}{2cc_1}.$$

Dies sind die Gleichungen von 3 Ebenen, welche der xy-Ebene parallel laufen. Die beiden ersten berühren die Kugel in den Punkten, in denen sie von der z-Axe durchstochen wird. Die 3te Ebene durchschneidet die Kugeloberfläche in einem Kreise, dessen Radius

$$= \sqrt{\frac{4c^2c_1^2r^2 - r^4(c_1 - c)^2}{4c^2c_1^2}}$$

ist.

Befinden sich also die beiden Punkte A und B auf demselben Durchmesser, so werden die beiden von A in der Richtung des Durchmessers gehenden Strahlen nach der Reflexion durch B gehen, ausserdem alle diejenigen Strahlen, welche die Kugeloberfläche in dem Schnittkreise treffen. Ist $c_1 > c$, so liegt dieser Schnittkreis oberhalb der xy-Ebene, ist $c > c_1$, so liegt er unterhalb derselben, ist endlich $c = c_1$, so fällt er in dieselbe hinein.

§. 12.

Die Grenzfläche werde gebildet durch ein Paraboloid, dessen Gleichung

$$(48) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^2 + y^2 - 2kz = 0$$

ist; es ist dann:

$$\frac{dF}{dx} = 2x, \qquad \frac{dF}{dy} = 2y, \qquad \frac{dF}{dz} = -2k.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe erhält die Gleichung (2^b) folgende Gestalt:

$$\frac{\{(a-x)2x+(b-y)2y-(c-z)2k\}^2}{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}$$
$$=\frac{\{(x-a_1)2x+(y-b_1)2y-(z-c_1)2k\}^2}{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2},$$

oder:

(49)

$$\frac{\{2ax+2by-2kz-2ck\}^2}{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}=\frac{\{2kz-(2a_1x+2b_1y-2kc_1)\}^2}{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}.$$

Die Gleichung (3^b) endlich geht über in:

(50)

$$k\{(a-x)(y-b_1)-(x-a_1)(b-y)\}$$
$$+x\{(y-b_1)(c-z)-(b-y)(z-c_1)\}$$
$$+y\{(a-x)(z-c_1)-(x-a_1)(c-z)\}=0.$$

Die Bestimmung der Werthe von x, y, z aus diesen drei Gleichungen würde mit Schwierigkeiten verbunden sein; wir beschränken uns daher auf die Betrachtung eines besonderen Falles: Die beiden Punkte A und B mögen auf dem positiven Theile der z-Axe liegen; es ist also

$$a=0, \quad b=0; \quad a_1=0, \quad b_1=0$$

zu setzen.

Die Gleichung (50) verschwindet dann, während Gleichung (49) folgende einfachere Gestalt erhält:

$$\frac{(c+z)^2}{2kz+(c-z)^2}=\frac{(z+c_1)^2}{2kz+(z-c_1)^2},$$

oder:

$$z^2+kz-cc_1+\frac{k}{2}(c+c_1)=0; \quad z=0.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt:

$$z=\pm\sqrt{\frac{k^2}{4}+cc_1-\frac{k}{2}(c+c_1)}-\frac{k}{2};$$

das negative Zeichen vor der Wurzel ist unbrauchbar, da das Paraboloid oberhalb der xy-Ebene liegt.

$$(51) \quad \ldots\ldots \quad z = +\sqrt{\frac{k^2}{4} + cc_1 - \frac{k}{2}(c + c_1)} - \frac{k}{2}$$

ist die Gleichung einer Ebene, die der xy-Ebene parallel läuft und das Paraboloid in einem Kreise schneidet. Alle Strahlen die vom Punkte A ausgehen und das Paraboloid in diesem Kreise treffen, werden nach der Reflexion durch den Punkt B gehen. $z = 0$ ist die Gleichung der xy-Ebene, welche das Paraboloid am Scheitel tangirt; demnach wird auch der eine Strahl von A, der den Scheitel trifft, nach der Reflexion durch den Punkt B gehen. Findet die Relation statt:

$$cc_1 = \frac{k}{2}(c + c_1),$$

so geht Gleichung (51) über in

$$z = 0,$$

es wird dann nur ein einziger Strahl nach der Reflexion durch B hindurch gehen.

§. 13.

Die Grenzfläche des Mediums sei ein dreiaxiges Ellipsoid, die Gleichung desselben:

$$(52) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Bilden wir die partiellen Ableitungen nach x, y, z und setzen dieselben in die Gleichung (2^b) ein, so erhalten wir:

$$\frac{\{(a-x)2Ax + (b-y)2By + (c-z)2Cz\}^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$
$$= \frac{\{(x-a_1)2Ax + (y-b_1)2By + (z-c_1)2Cz\}^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2},$$

oder:

$$(53)$$
$$\frac{\{Aax + Bby + Ccz - 1\}^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} = \frac{\{1 - (Aa_1x + Bb_1y + Cc_1z)\}^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2},$$

während (3^b) übergeht in:

$$(54)$$
$$xy\{(c-c_1)(B-A)\} + xz\{(b-b_1)(A-C)\}$$
$$+ yz\{(a-a_1)(C-B)\} + xA(b_1c - bc_1)$$
$$+ yB(ac_1 - a_1c) + zC(a_1b - ab_1) = 0.$$

Durch diese drei Gleichungen sind die Werthe von x, y, z bestimmt. Wir fassen wieder einige besondere Fälle näher in's Auge:

1) Der lichtstrahlende Punkt möge sich im Anfangspunkte des Coordinatensystems, der andere Punkt, durch welchen der reflektirte Strahl gehen soll, in einem Endpunkte der kleinsten Axe befinden. Es wird dann:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0.$$

Die Gleichung (53) nimmt danach folgende Form an:

$$(55) \quad \ldots \ldots \quad y^2 + z^2 = \frac{(a_1 - x)^2 (x^2 - a_1^2)}{x(2a_1 - x)}.$$

Die Gleichung (54) dagegen verschwindet.

(55) ist die Gleichung einer Oberfläche, welche durch Rotation einer Curve um die x-Axe entsteht. Diese Curve, deren Gleichung:

$$(56) \quad \ldots \ldots \quad y = \pm (x - a_1) \sqrt{\frac{a_1^2 - x^2}{x(x - 2a_1)}}$$

ist, besitzt die in Fig. II. angegebene Gestalt. Sie besteht aus zwei vollständig von einander getrennten Theilen, von denen sich jeder symmetrisch zur x-Axe ausbreitet, der eine zwischen $x = -a$ und $x = 0$, der andere zwischen $x = +a$ und $x = +2a$. Die y-Axe und die Parallele $x = +2a$ hat die Curve zu Asymptoten und besitzt zwei Beugungspunkte.

Der links von der z-Axe liegende Theil der Rotationsoberfläche berührt das Ellipsoid in $(-a, 0, 0)$ und schneidet es ausserdem in einer Curve doppelter Krümmung. Der rechts von der z-Axe liegende Theil dagegen hat mit dem Ellipsoid nur den Punkt $(+a, 0, 0)$ gemein.

Ausser dem in der Richtung der x-Axe sich fortpflanzenden Strahle werden also alle diejenigen, welche das Ellipsoid in der doppelt gekrümmten Schnittcurve treffen, nach der Reflexion durch den Punkt B gehen.

2) Der Punkt A möge in dem einen Endpunkte, der Punkt B in dem anderen Endpunkte einer Axe liegen. Setzt man dann

die Coordinaten der Punkte $(a, 0, 0)$ $(-a, 0, 0)$ in die Gleichung (53) ein, so ergiebt sich:

$$x = 0;$$

das ist die Gleichung der yz-Ebene, welche das Ellipsoid in der Ellipse

$$By^2 + Cz^2 = 1$$

schneidet.

Gehen daher die leuchtenden Strahlen von dem einen Endpunkte der Axe, die in der x-Axe liegt, aus, so werden alle diejenigen Strahlen, welche das Ellipsoid in der Ellipse

$$By^2 + Cz^2 = 1$$

treffen, nach der Reflexion sich in dem anderen Endpunkte der Axe schneiden.

§. 14.

Wir wollen jetzt die vorige Betrachtung ebenfalls auf eine Ebene übertragen, d. h. wir wollen annehmen, die beiden Punkte A und B lägen in der xy-Ebene und die von A ausgehenden Lichtstrahlen würden durch eine ebene Curve zurückgeworfen. Die Aufgabe ist, den Punkt der Curve zu bestimmen, der getroffen werden muss, damit der reflektirte Strahl durch den Punkt B geht.

Die Gleichung der Curve sei:

$$(1^c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F(xy) = 0.$$

Da der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist, so werden die Coordinaten des getroffenen Punktes (x, y) der Curve der Relation genügen:

$$(2^c)$$

$$\frac{\left\{(a-x)\frac{dF}{dx} + (b-y)\frac{dF}{dy}\right\}^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2}$$

$$= \frac{\left\{(x-a_1)\frac{dF}{dx} + (y-b_1)\frac{dF}{dy}\right\}^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}.$$

Diese beiden Gleichungen (1^c) und (2^c) werden zur Bestimmung der beiden Coordinaten x, y ausreichen.

§. 15.

Die Grenze des durchsichtigen Mediums sei die Peripherie eines Kreises, dessen Gleichung:

(57) . . . . $x^2 + y^2 = r^2$,

es ist dann:

$$\frac{dF}{dx} = 2x, \qquad \frac{dF}{dy} = 2y.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in (2^c) erhalten wir:

$$(y^2 - x^2)\{x(b+b_1) + y(a+a_1) - 2xy - (a_1 b + a b_1)\}$$
$$= -2xy\{y^2 - x^2 + x(a+a_1) - y(b+b_1) - (aa_1 - bb_1)\},$$

oder:

(58)

$$(x^2+y^2)\{y(a+a_1) - x(b+b_1)\}$$
$$+ (x^2 - y^2)(a_1 b + a b_1) + 2xy(bb_1 - aa_1) = 0.$$

Schneidet die Curve, welche dieser Gleichung dritten Grades entspricht, die Peripherie des Kreises, so wird jeder Strahl, der auf einen Schnittpunkt trifft, nach der Reflexion durch den Punkt B gehen.

Eliminirt man aus den Gleichungen (57) und (58) die Unbekannte y, so ergiebt sich zur Bestimmung von x folgende Relation:

(59)

$$x^4(4(a_1 b + a b_1)^2 + 4(bb_1 - aa_1)^2)$$
$$- x^3\{4r^2(b+b_1)(a_1 b + a b_1) + 4r^2(a+a_1)(bb_1 - aa_1)\}$$
$$+ x^2\{r^4(b+b_1)^2 - 4r^2(a_1 b + a b_1)^2 + r^4(a+a_1)^2 - 4r^2(bb_1 - aa_1)^2\}$$
$$+ x\{2r^4(b+b_1)(a_1 b + a b_1) + 4r^4(a+a_1)(bb_1 - aa_1)\}$$
$$+ r^4\{(a_1 b + a b_1)^2 + (a+a_1)^2\} = 0.$$

1) Liegen A und B beide in einem Durchmesser, z. B. in der x-Axe, so ist $b = 0$, $b_1 = 0$; die Gleichung (58) geht für diesen Fall über in:

(60) . . . . . . $\left\{x - \frac{aa_1}{a+a_1}\right\}^2 + y^2 = \frac{a^2 a_1^2}{(a+a_1)^2}$

und

(61) . . . . $y = 0$.

Die Gleichung (60) ist die eines Kreises, dessen Radius

$$= \frac{aa_1}{a + a_1}$$

und dessen Mittelpunktscoordinaten

$$\frac{aa_1}{a + a_1}, \quad 0$$

sind. Die Gleichung (61) die der x-Axe.

Befindet sich A aufdem positiven Theile des Durchmessers, B auf dem negativen, so ist a_1 negativ zu setzen, also wird:

$$\left\{x + \frac{aa_1}{a - a_1}\right\}^2 + y^2 = \frac{a^2 a_1^2}{(a - a_1)^2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

Die drei von A ausgehenden Strahlen, welche die Peripherie des Kreises in

$$\left(-\frac{r^2(a - a_1)}{2aa_1}, \quad \pm\sqrt{\frac{4r^2a^2a_1^2 - r^4(a - a_1)^2}{4a^2a_1^2}}\right)$$

und

$$(-r, 0)$$

treffen, gehen nach der Reflexion durch den Punkt B.

2) Der Punkt A liege in der x-Axe. In welchem Punkte muss die Peripherie des Kreises getroffen werden, damit der Strahl nach der Reflexion der x-Axe parallel läuft?

Wir setzen $b = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = y$; dann zerfällt Gleichung (58) in:

(62) . . . . $y = 0$.

(63) . . . . $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

(63) ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem leuchtenden Punkte A zusammenfällt, und dessen Radius a ist. Dieser Kreis durchschneidet den gegebenen Kreis nur, wenn $a > \frac{r}{2}$ ist.

Ist also $a > \frac{r}{2}$, so werden die drei von A ausgehenden Strahlen, welche die Peripherie des Kreises in

$$\left(\frac{r^2}{2a}, \quad \pm r\sqrt{\frac{4a^2-r^2}{4a^2}}\right)$$

und

$$(r, 0)$$

treffen, nach der Reflexion sich lothrecht zur y-Axe fortbewegen. Ist $a \overline{\overline{<}} \frac{r}{2}$, so verschwinden die beiden ersten Strahlen.

3) Der Punkt A liege wieder in der x-Axe. In welchem Punkte muss die Peripherie des Kreises getroffen werden, damit der Strahl nach der Reflexion der y-Axe parallel läuft?

Wir setzen $b = 0$, $b_1 = 0$, $a_1 = x$; dann nimmt die Gleichung (58) folgende Form an:

$$(64) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Die Curve, welche dieser Gleichung entspricht, hat die in Fig. III. angegebene Gestalt; sie breitet sich zwischen den beiden Geraden

$$x = +a \qquad \text{und} \qquad x = -a$$

symmetrisch zur x-Axe aus, durchschneidet die x-Axe in den Punkten $(+a, 0)$ und $(0, 0)$ und hat die Gerade $x = -a$ zur Asymptote. Culminationspunkte entsprechen der Abscisse

$$x = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{5}-1).$$

Für die Abscisse

$$x = \frac{r^2}{4a} - r\sqrt{\frac{r^2+8a^2}{16a^2}}$$

sind die Ordinaten des Kreises und der Curve gleich, der Kreis wird daher von den beiden Armen, die sich in die Unendlichkeit erstrecken, geschnitten. Die beiden von A ausgehenden Strahlen, welche die Peripherie des Kreises in diesen beiden Schnittpunkten treffen, werden nach der Reflexion der y-Axe parallel laufen.

§. 16.

Die Grenze des durchsichtigen Mediums sei gebildet durch eine Parabel, die Gleichung derselben:

$$(65) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y^2 = px;$$

dann ist:

$$\frac{dF}{dy} = 2y, \quad \frac{dF}{dx} = -p.$$

Durch Einführung dieser Werthe erhält die Gleichung (2ᵉ) folgende Gestalt:

$$(66)$$

$$\{4y^2 - p^2\}\{x(b+b_1) + y(a+a_1) - 2xy - (a_1 b + a b_1)\}$$
$$-4py\{y^2 - x^2 + x(a+a_1) - y(b+b_1) + (bb_1 - aa_1)\} = 0.$$

Wenn die Curve, welche dieser Gleichung 4ten Grades entspricht, die Parabel schneidet, so wird jeder Strahl, der auf einen Schnittpunkt trifft, nach der Reflexion durch den Punkt B gehen.

Einige besondere Fälle mögen hier genauer erörtert werden:

1) Die beiden Punkte A und B mögen in der x-Axe liegen; dann ist $b = 0$ und $b_1 = 0$ zu setzen.

Die Gleichung (66) geht dadurch über in:

(67) . . . . $y = 0$

und

$$-8xy^2 + y^2\{4(a+a_1) - 4p\}$$
$$+ x\{2p^2 - 4p(a+a_1)\} + 4x^2 p - \{p_2(a+a_1) - 4paa_1\} = 0,$$

oder nach einigen Umformungen:

$$(68)$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{p\left\{x^2 - x\left(a + a_1 - \frac{p}{2}\right) + aa_1 - \frac{p}{4}(a+a_1)\right\}}{2\left(x - \frac{(a+a_1) - p}{2}\right)}}.$$

Die Curve, welche dieser Gleichung entspricht, hat die in Fig. IV. angegebene Form.

Für alle negativen Werthe von x, ebenso für alle Werthe von x zwischen 0 und

$$\frac{a + a_1 - \frac{p}{2}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{a_1}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{16}}$$

und ferner zwischen

$$\frac{a+a_1-p}{2}$$

und

$$\frac{a+a_1-\frac{p}{2}}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}-\frac{a_1}{2}\right)^2+\frac{p^2}{16}}$$

ist y imaginär.

Die Curve besteht demnach aus zwei getrennten Theilen, von denen der eine sich zwischen

$$x=\frac{a+a_1-\frac{p}{2}}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}-\frac{a_1}{2}\right)^2+\frac{p^2}{16}}$$

und

$$x=\frac{a+a_1-p}{2},$$

der andere dagegen sich zwischen

$$x=\frac{a+a_1-\frac{p}{2}}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}-\frac{a_1}{2}\right)^2+\frac{p^2}{16}}$$

und

$$x=+\infty$$

symmetrisch zur x-Axe ausbreitet. Der erste von diesen beiden besitzt zwei Beugungspunkte, hat die Gerade

$$x=\frac{a+a_1-p}{2}$$

zur Asymptote und schneidet die Parabel in zwei Punkten; der andere dagegen hat keinen Punkt mit der Parabel gemein.

Aus den Gleichungen (67) und (68) folgt demnach, dass ausser dem in der Richtung der x-Axe sich fortpflanzenden Strahl noch zwei andere, welche die Parabel in den Schnittpunkten treffen, nach der Reflexion durch den Punkt B gehen.

2) Die Directrix der Parabel laufe der x-Axe parallel und der Scheitel falle mit dem 0-Punkte zusammen. Die Gleichung derselben ist dann:

(69) . . . . $x^2-py=0$

und

$$\frac{dF}{dx} = 2x, \qquad \frac{dF}{dy} = -p.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe erhält die Gleichung (2*) die Gestalt:

(70)

$$\{p^2 - 4x^2\}\{x(b+b_1) + y(a+a_1) - 2xy - (a_1 b + a b_1)\}$$
$$-4xp\{y^2 - x^2 + x(a+a_1) - y(b+b_1) + bb_1 - aa_1\} = 0.$$

Wir wollen annehmen, der lichtstrahlende Punkt A liege in der x-Axe, und wollen untersuchen, welcher Punkt der Parabel von einem auffallenden Strahle getroffen werden muss, damit der reflektirte Strahl der y-Axe parallel läuft.

Es ist $b = 0$, $b_1 = 0$, $a_1 = x$ zu setzen, dann geht die Gleichung (70) über in:

$$(71) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{(p^2 - 4x^2)(a - x)}{4px}.$$

Die Curve, welche dieser Gleichung entspricht, hat die in Fig. V. angegebene Gestalt. Sie besteht aus zwei getrennten Theilen, die beide die y-Axe zur Asymptote haben. Der rechts von der y-Axe liegende Theil schneidet die x-Axe in den Entfernungen $+\frac{p}{2}$ und $+a$ vom 0-Punkte und besitzt zwischen diesen beiden Punkten einen Culminationspunkt; der links von der y-Axe liegende Theil schneidet die x-Axe nur in der Entfernung $-\frac{p}{2}$ vom 0-Punkte und besitzt für

$$x = -\sqrt[3]{\frac{ap^2}{4}}$$

einen Beugungspunkt. Beide Theile der Curve schneiden die gegebene Parabel. Doch ist für unsere Betrachtung nur der Schnittpunkt brauchbar, welcher der Abscisse:

$$-\frac{p^2}{8a} + \frac{p}{8a}\sqrt{16a^2 + p^2}$$

zugehört.

Derjenige Strahl also, welcher von A ausgehend die Parabel in dem Punkte

$$\left\{-\frac{p^2}{8a} + \frac{p}{8a}\sqrt{16a^2+p^2}, \quad \frac{\{-p^2 + p\sqrt{16a^2+p^2}\}^2}{64a^2p}\right\}$$

trifft, wird nach der Reflexion der y-Axe parallel laufen.

§. 17.

Die Grenze des durchsichtigen Mediums möge endlich gebildet sein durch eine Ellipse, deren Gleichung sei:

$$(72) \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\nu^2} = 1.$$

Es ist dann:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{2x}{\mu^2}, \qquad \frac{dF}{dy} = \frac{2y}{\nu^2}$$

und man erhält durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung (2^c):

$$\frac{\left\{(a-x)\frac{2x}{\mu^2} + (b-y)\frac{2y}{\nu^2}\right\}^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \frac{\left\{(x-a_1)\frac{2x}{\mu^2} + (y-b_1)\frac{2y}{\nu^2}\right\}^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2},$$

oder nach einigen Umformungen:

$$(73) \quad \left(\frac{x^2}{\mu^4} - \frac{y^2}{\nu^4}\right)\{(a-x)(y-b_1) + (x-a_1)(b-y)\}$$
$$+ \frac{2xy}{\mu^2\nu^2}\{(b-y)(y-b_1) - (a-x)(x-a_1)\} = 0.$$

Die Curve, welche dieser Gleichung vierten Grades entspricht, wird die Ellipse in den Punkten schneiden, in denen dieselbe von den auffallenden Strahlen getroffen werden muss.

Wir nehmen an:

1) Der lichtstrahlende Punkt A liege in der x-Axe und die reflektirten Strahlen sollen der x-Axe parallel laufen.

Dann ist:

$$b = 0, \qquad a_1 = 0, \qquad b_1 = y$$

zu setzen, die Gleichung (73) geht dadurch über in:

$$(74) \quad y = 0,$$

$$(75) \quad y^2 + sx^2 - 2rx = 0;$$

wo

$$s = \frac{2\mu^2\nu^2 - \nu^4}{\mu^4},$$

$$r = \frac{a\nu^2}{\mu^2}$$

ist.

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunktscoordinaten $\left(\frac{r}{s}, 0\right)$ und deren Halbaxen $\frac{r}{s}$ und $\frac{r}{\sqrt{s}}$ sind.

Diejenigen Strahlen also, welche von A ausgehend die Schnittpunkte der beiden Ellipsen treffen, laufen nach der Reflexion der x-Axe parallel. Aus Gleichung (74) endlich folgt, dass sich ausserdem ein Strahl auf der x-Axe selbst fortbewegt.

2) Der lichtstrahlende Punkt A liege wieder auf der x-Axe. In welchem Punkte muss dann die Ellipse von einem auffallenden Strahle getroffen werden, damit der reflektirte Strahl der y-Axe parallel läuft?

Es ist für diesen Fall

$$b = 0, \quad b_1 = 0, \quad a_1 = x$$

zu setzen; dann geht die Gleichung (73) über in:

$$(76) \quad \ldots \ldots \quad y = \pm \frac{\nu^2}{\mu} \sqrt{\frac{a-x}{x(2\nu^2-\mu^2)+\mu^2 a}}.$$

Die Gestalt der Curve, welche dieser Gleichung entspricht, ist abhängig von dem Verhältniss der Halbaxen der Ellipse. Wir haben daher drei verschiedene Fälle zu berücksichtigen:

$$2\nu^2 > \mu^2, \quad 2\nu^2 = \mu^2, \quad 2\nu^2 < \mu^2.$$

α) Es möge $2\nu^2 > \mu^2$ sein; dann stimmt die Curve in der Form fast ganz mit der in Fig. III. angegebenen überein; die beiden Zweige, welche sich in die Unendlichkeit erstrecken, haben die Gerade

$$x = -\frac{\mu^2 a}{2\nu^2 - \mu^2}$$

zur gemeinschaftlichen Asymptote.

β) Es sei $2\nu^2 = \mu^2$. Die Gleichung (76) nimmt dadurch die einfachere Form an:

$$(77) \quad \ldots \ldots \ldots \quad y = \pm \frac{x}{2\sqrt{a}} \sqrt{a-x}.$$

Die Curve hat dann die in Fig. VI. angegebene Gestalt; sie schneidet die Abscissenaxe für $x = 0$ und $x = +a$ und besitzt für $x = +{}^2/_3 a$ zwei Culminationspunkte. Die auf der linken Seite der y-Axe liegenden Zweige erstrecken sich in die Unendlichkeit, besitzen aber keine gemeinschaftliche Asymptote.

γ) Es sei $2\nu^2 < \mu^2$; Wir fassen hier einen bestimmten Fal

in's Auge, indem wir annehmen: $\mu = 2\nu$. Dann geht die Gleichung (76) über in:

$$(78) \quad y = \pm \frac{x}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a-x}{2a-x}}.$$

Die Curve, welche dieser Gleichung entspricht, hat die in Fig. VII. angegebene Gestalt; sie besteht aus zwei getrennten Theilen, von denen der eine zwischen $x = +a$ und $x = -\infty$, der andere zwischen $x = +2a$ und $x = +\infty$ liegt. Der erste von diesen schneidet die x-Axe in den Punkten (0, 0) und $(+a, 0)$ und besitzt für

$$x = +{}^7\!/_4 a - \sqrt{\frac{17}{16} a^2}$$

zwei Culminationspunkte. Der zweite Theil besteht aus zwei getrennten Zweigen, welche die Gerade $x = +2a$ zur gemeinschaftlichen Asymptote und für

$$x = +{}^7\!/_4 a + \sqrt{\frac{17}{16} a^2}$$

Culminationspunkte haben.

Die Ellipse wird in jedem dieser drei Fälle nur von den beiden Zweigen geschnitten, die sich symmetrisch zum negativen Theile der Abscissenaxe ausbreiten.

Die beiden von A ausgehenden Strahlen, welche die Ellipse in diesen Schnittpunkten treffen, werden nach der Reflexion der y-Axe parallel laufen.

3) Der Punkt A möge sich in dem einen Brennpunkte der Ellipse, der Punkt B dagegen in dem andern befinden.

In der Gleichung (73) ist dann $a = e$, $b = 0$, $a_1 = -e$, $b_1 = 0$ zu setzen; es ergiebt sich dadurch:

$$(79)$$
$$\left\{\frac{x^2}{\mu^4} - \frac{y^2}{\nu^4}\right\} \{(e-x)y - (x+e)y\} + \frac{2xy}{\mu^2\nu^2}\{-y^2 - (e-x)(x+e)\} = 0,$$

oder da $e = \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ ist:

$$(80) \quad x^2\nu^2 + y^2\mu^2 = \mu^2\nu^2,$$

d. i. die Gleichung der gegebenen Ellipse selbst. Daraus folgt das bekannte Resultat: Befindet sich der leuchtende Punkt A in dem einen Brennpunkte einer Ellipse, so werden alle Strahlen nach der Reflexion durch den andern Brennpunkt hindurchgehen.

XXXIII.

Miscellen.

Ueber eine graphische Methode zur Bestimmung des Schwerpunkts eines beliebigen Vierecks.

Von dem Herausgeber.

(Fig. s. Taf. XI.)

Es giebt verschiedene Methoden zur Bestimmung des Schwerpunkts eines beliebigen Vierecks durch Construction. Die Methode, auf welche ich neulich zufällig geführt wurde, die ich im Folgenden als einen Beitrag zu der sogenannten graphischen Statik mittheilen werde, scheint mir manche Vorzüge vor anderen bekannten Methoden zu besitzen. Dieselbe erfordert nur eine sehr einfache Construction, welche mit grosser Genauigkeit ausführbar ist, da sie eigentlich nur die Theilung einer Geraden in zwei und drei gleiche Theile erfordert, was sich bekanntlich praktisch bei einigem Probieren immer mit sehr grosser Schärfe bewerkstelligen lässt; ausserdem nimmt dieselbe nur einen geringen Raum in Anspruch, da sie niemals über den von dem gegebenen Vierecke eingeschlossenen Raum hinausreicht.

In Fig. 1. sei $ABCD$ das gegebene Viereck, dessen Schwerpunkt gesucht wird. Zieht man die Diagonale AB, halbirt dieselbe in E, zieht CE und DE, und macht EF und EG den dritten Theilen dieser Linien gleich, so sind bekanntlich F und G beziehungsweise die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ABD. Zieht man also die Linie FG, so muss in dieser Linie der Schwerpunkt des Vierecks $ABCD$ liegen, und nach den Lehren

der Statik haben wir, wenn wir uns denselben durch S bezeichnet denken, die Gleichung:

$$FS.\Delta ABC = GS.\Delta ABD$$

oder:

$$\frac{FS}{GS} = \frac{\Delta ABD}{\Delta ABC}.$$

Da die Dreiecke ABC und ABD die gemeinschaftliche Grundlinie AB haben, so verhalten sich dieselben wie ihre Höhen; zieht man aber, wie in der Figur geschehen, diese Höhen, und dann noch die Diagonale CD des Vierecks $ABCD$, welche die Diagonale AB in M schneidet, so erhellet auf der Stelle, dass die in Rede stehenden Höhen sich wie $CM:DM$ zu einander verhalten, und dass also:

$$\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = \frac{DM}{CM},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\frac{FS}{GS} = \frac{DM}{CM}$$

ist. Eben so leicht erhellet aber, dass

$$\frac{DM}{CM} = \frac{GN}{FN},$$

und daher nach dem Vorstehenden

$$\frac{FS}{GS} = \frac{GN}{FN}$$

ist, woraus sich, da

$$FS + GS = GN + FN$$

ist, ferner sogleich schliessen lässt, dass

$$FS = GN, \qquad GS = FN$$

ist.

Denkt man sich nun noch durch die Punkte F und G Parallelen mit der Diagonale AB des gegebenen Vierecks gezogen, welche die Seiten des Vierecks in den Punkten H, J und K, L schneiden, so ist klar, dass

$$AH = \tfrac{1}{3}AC, \quad BJ = \tfrac{1}{3}BC \text{ und } AK = \tfrac{1}{3}AD, \quad BL = \tfrac{1}{3}BD$$

ist, so wie auch, dass die Geraden HJ und KL in den Punkten F und G halbirt werden.

Alles dieses zusammengenommen, führt nun unmittelbar zu der folgenden graphischen Bestimmung des Schwerpunkts des beliebigen Vierecks $ABCD$ in Fig. 2.

Man nehme

$$AH = \tfrac{1}{3}AC, \quad BJ = \tfrac{1}{3}BC \text{ und } AK = \tfrac{1}{3}AD, \quad BL = \tfrac{1}{3}BD$$

ziehe HJ und KL, halbire diese Linien in F und G, ziehe die Linie FG und die Diagonale AB, welche FG in N schneidet. Nimmt man dann $FS = GN$ oder $GS = FN$, so ist S der gesuchte Schwerpunkt des Vierecks $ABCD$.

Ich zweifle, dass es eine leichtere und praktisch genauer auszuführende Construction giebt.

Die punktirten Linien in der Figur deuten die zweite — so wie die erste mittelst der Punkte A und B — mittelst der Punkte C und D sich ergebende Construction an; beide Constructionen können einander zur Controle dienen und zu noch manchen anderen Betrachtungen Veranlassung geben.

Macht man beide Constructionen, so ist es ganz unnöthig die Diagonalen des gegebenen Vierecks zu ziehen, und der Schwerpunkt S wird dann durch den Durchschnitt zweier Geraden erhalten, was durch Fig. 3. erläutert wird. Alle vier Seiten des Vierecks werden hierbei in drei gleiche Theile getheilt.

Berichtigung.

Im Literarischen Bericht No. CCVII. S. 15. Z. 11 und 12 muss es statt:

„ciascuna di tale opera"

heissen:

„ciascuna delle edizioni di tale opera"

was zu verbessern gebeten wird.

Berichtigung zu Thl. LII:

S. 362, Z. 8 v. o. lies x statt r.

Literarischer Bericht
CCV.

Einen grossen Verlust hat die Wissenschaft erlitten durch den am 18. Juni 1870 im 66. Lebensjahre leider erfolgten Tod des trefflichen schwedischen Astronomen und Mathematikers

R. G. Selander,

Mitgliedes der Königlich-Schwedischen Akademie der Wissenschaften in Stockholm, welcher namentlich auch um die geodätische Aufnahme seines Vaterlandes sich sehr grosse Verdienste erworben hat. Mehrere Jahre war er Mitglied des Reichstags, zuerst in der zweiten, später nach Durchführung der Repräsentationsreform in der ersten Kammer.

Wir entlehnen diese betrübende Nachricht vorläufig aus den Zeitungen, wünschen aber sehr — und bitten dringend darum — dass wir recht bald von kundiger Hand in den Stand gesetzt werden mögen, einen ausführlichen Necrolog des verdienten trefflichen Gelehrten in unserer Zeitschrift zum Abdruck bringen zu können. G.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato dâ B. Boncompagni. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCIII. S. 1.).

Tome II. Settembre 1869. Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collége de France. Par

M. L. Am. Sédillot, Secrétaire du même Collége. — Deuxième Période. Les derniers Valois, 1547—1589. p. 387.

Tomo II. Ottobre 1869. Les professeurs de mathématiques et de physique génerale etc. (ganz wie vorher). Deuxième Période. Les derniers Valois, 1547—1589. p. 427. — Annunzi di recenti pubblicazioni. p. 449.

Tomo II. Novembre 1869. Les professeurs de mathématiques et de physique générale etc. (ganz wie vorher). Troisième Période. 1589—1774.

Tome II. Dicembre 1869. Les professeurs de mathématiques et physique générale etc. (ganz wie vorher). Troisième Période. 1589—1774. p. 493. — Annunzi di recenti pubblicazioni. p. 511. — Indice degli articoli. p. 530. — Indice dei nomi. p. 531.

Tomo III. Gennaio 1870. Das erste Heft des dritten Theils dieser trefflichen und wichtigen Publication, welches wir hiermit zur Anzeige bringen zu können die Freude haben, enthält zunächst drei höchst interessante Abhandlungen über die Arbeiten und das Leben des berühmten Conte di Fagnano, welche wir unseren Lesern dringend zu sorgfältigster Beachtung empfehlen, nämlich erstens: Sul teorema del Conte di Fagnano. Nota di F. Siacci. p. 1. (In dieser höchst interessanten und verdienstlichen Abhandlung hat Herr Siacci nicht bloss eine einfache Geschichte des berühmten Theorems, sondern auch eine überaus lehrreiche Zusammenstellung der verschiedenen für dieses wichtige Theorem gegebenen Beweise geliefert, so dass wir alle die, welche sich von demselben eine ausführliche Kenntniss verschaffen wollen, auf nichts Besseres als auf diese lehrreiche Abhandlung verweisen können. Da Herr Siacci auch der hierher gehörenden Arbeiten des Herausgebers des Archivs freundlichst gedacht hat, wofür derselbe Herrn Siacci sich zu dem verbindlichsten Danke verpflichtet fühlt: so glaubt der Herausgeber sich wohl erlauben zu dürfen, bei dieser Gelegenheit auch an den von ihm in seinem Buche: „Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme. Von Johann August Grunert, Professor zu Greifswald. Greifswald und Leipzig. 1857. S. 243 — S. 247“ gegebenen Beweis der gleichfalls von Conte di Fagnano gefundenen Rectification der Lemniscate durch die Ellipse und Hyperbel zu erinnern, da überhaupt das obige Buch über Deutschland hinaus keine grosse Verbreitung gefunden zu haben scheint.) — Ferner zweitens: Intorno ad uno scritto intitolato: Memorie concernenti il Marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano, fino al

mese di Febbraio dell'anno 1792 *). (B. Boncompagni.) p. 27. — Endlich drittens: Memorie concernenti il Marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano, fino al mese di Febbraio dell'anno 1752, inviate dal Padre Don Angelo Calogerà, Abate Benedettino Comaldolese al Conte Giovanni Maria Mazzuchelli e contenute nel codice Vaticano No. 9281. p. 37. — Ausser diesen drei Abhandlungen enthält das vorliegende Heft noch die folgende gleichfalls sehr interessante und wichtige Abhandlung: Rassegna d' alcuni scritti relativi all' addizione degl' Integrali ellittici ed Abeliani. Nota del Prof. Angelo Genocchi. p. 47.

Geometrie.

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung. Von Dr. Ludwig Cremona, Professor der höheren Geometrie an der Königl. polytechnischen Schule zu Mailand. Unter Mitwirkung des Verfassers ins Deutsche übertragen von Maximilian Curtze, ordentlichem Lehrer am Gymnasium zu Thorn. Autorisirte Ausgabe. Berlin 1870. S. Calvary & Comp. 8°.

Das Original des in deutscher Uebersetzung hier vorliegenden Werks ist zuerst in den Schriften der Akademie der Wissenschaften des Instituts zu Bologna (II^a Serie, T. 6°, p. 91—136; T. 7°. p. 19—78), und als Separatausgabe unter dem Titel:

Preliminari di una Teoria geometrica delle superficie. Di Luigi Cremona, Professore presso il R. Istituto Tecnico Superiore di Milano. Si vendo presso il Tipografo Francesco Zanetti, Milano, via del Senato, 26.

erschienen.

Dieses treffliche Werk ist als eine Fortsetzung der:

Introduzione ad una Teoria geometrica delle curve piane. Pel Dr. Luigi Cremona etc. Bologna, Tipi Gamberini e Parmeggiani. 1862.,

durch deren unter dem Titel:

Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen

Curven. Von Dr. Ludwig Cremona, Professor der höheren Geometrie an der Universität in Bologna. Nach einer für die deutsche Ausgabe zum Theil umgearbeiteten Redaction ins Deutsche übertragen von Maximilian Curtze, ordentlichem Lehrer am Königl. Gymnasium zu Thorn. Mit einer lithographirten Tafel. Greifswald 1865. 8⁰.

herausgegebene Uebersetzung sich Herr M. Curtze schon so sehr um die mathematische Literatur und alle diejenigen, welche die geometrische Theorie der ebenen Curven nach ihrem heutigen Standpunkte in möglichster Kürze und in einer sehr ansprechenden Darstellung kennen lernen wollen, verdient gemacht hat, zu betrachten, und liefert — wie dieses letztere Werk eine systematische Darstellung der geometrischen Theorie der ebenen Curven — eine systematische Darstellung der geometrischen Theorie der krummen Flächen, natürlich mit sehr vielen eigenen Untersuchungen des hochverehrten Herrn Verfassers, von welchem diese Domäne in der Wissenschaft vorzüglich beherrscht wird.

Ueber die Trefflichkeit und Wichtigkeit des Werkes an sich hier Worte zu verlieren, würde Raumverschwendung sein, da dieselben schon längst anerkannt sind und überdies durch den Namen des Verfassers an sich vollkommen verbürgt werden. Wir können hier unser Urtheil nur in den kurzen Worten zusammenfassen:

Dass wir gegenwärtig die **„Introduzione“** und die **„Preliminari“** des Herrn Professors **L. Cremona**, für die **einzigen** Werke halten, aus denen man sich wegen der Vollständigkeit der Behandlung ihrer Gegenstände, wegen der in ihnen überall durchgeführten streng systematischen Entwickelung, so wie wegen der mit besonderem Glück erstrebten Einfachheit und grossen geometrischen Eleganz der Darstellung u. s. w., mit möglichster Leichtigkeit eine vollständige und eingehende Kenntniss der geometrischen Theorie der ebenen Curven und der krummen Flächen zu verschaffen im Stande ist.

Die in jeder Beziehung verdienstliche und von den deutschen Geometern mit besonderem Danke aufzunehmende deutsche Uebersetzung, welche Herr M. Curtze nun auch von dem neueren Werke des Herrn Cremona geliefert hat, ist, wie wir uns hinreichend überzeugt haben, vollständig treu, und giebt den Gegenstand überall mit vollkommener Sachkenntniss wieder, wobei noch

besonders hervorzuheben ist, dass Herr Cremona selbst die Probeabzüge vor dem Druck einer genauen Durchsicht resp. Correctur unterzogen hat, wofür ihm deutsche Leser natürlich gleichfalls besonderen Dank schulden. Ausserdem hat die Uebersetzung dem Original gegenüber Seitens des Herrn Verfassers und des Herrn Uebersetzers sehr viele wesentliche Vervollständigungen und Erweiterungen erhalten, indem z. B. die Capitel IV—XI des wichtigen Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*) des Herrn Verfassers in der Uebersetzung verarbeitet worden sind, ganz abgesehen von vielen anderen wichtigen Zusätzen, welche hier namhaft zu machen uns leider die Beschränktheit des Raumes verbietet.

Wegen der Wichtigkeit des Werkes glauben wir unseren Lesern schuldig zu sein, im Nachstehenden wenigstens die Ueberschriften der einzelnen Kapitel anzugeben, um einigermassen eine Vorstellung von der grossen Reichhaltigkeit des Inhalts zu geben:

Vorrede des Verfassers. — Erster Theil. I. Kegel. II. Developpable Flächen und Raumcurven. III. Oberflächen beliebiger Ordnung. IV. Oberflächen zweiter Ordnung. V. Oberflächen beliebiger Classe. Reciproke Polaren. VI. Lineare Flächensysteme. VII. Einhüllende Flächen. VIII. Windschiefe Flächen. — **Zweiter Theil.** I. Polarflächen in Bezug auf eine Fläche beliebiger Ordnung. II. Gemischte Polarflächen. III. Enveloppen der Polarebenen und Orte der Pole. IV. Anwendungen auf developpable Flächen. V. Projectivische Flächenbüschel. VI. Projectivische Flächennetze. VII. Projectivische lineare Flächensysteme dritter Stufe. VIII. Projectivische lineare Flächensysteme beliebiger Stufe. IX. Symmetrische Complexe. X. Eigenschaften der conjugierten Kernflächen. — **Dritter Theil.** I. Anwendung der allgemeinen Theorie auf eine Fundamentalfläche dritter Ordnung. II. Eigenschaften der Hessiana einer Fundamentalfläche dritter Ordnung. III. Die siebenundzwanzig Geraden einer Fläche dritter Ordnung. IV. Abbildung einer Fläche dritter Ordnung. V. Quadriflächen, welche aus einer Fläche dritter Ordnung Kegelschnitte ausschneiden. VI. Verschiedene Eigenschaften. VII. Classification der Flächen dritter

---

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Thl. 68.

Ordnung unter Berücksichtigung der Realität der 27 Geraden. Zusatz zu Nr. 214.

Wir hoffen mit Bestimmtheit, dass dieses treffliche Werk sehr viel zur weiteren Verbreitung der Kenntniss der allgemeinen geometrischen Theorie der krummen Flächen beitragen wird, was bei dem grossen Interesse, welches dieselbe hauptsächlich durch die Klarheit und Bestimmtheit, mit welcher sie uns in die eigentliche Natur dieser oft sehr complicirten räumlichen Gebilde eindringen und ihr Wesen vollständig erkennen lässt, nothwendig darbieten muss, im höchsten Grade zu wünschen ist.

Möge daher dem in so vielen Beziehungen ausgezeichneten Werke sorgfältigste Beachtung und Würdigung seines Werthes im weitesten Kreise zu Theil werden!

Physik.

Lehrbuch der Physik zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbstunterrichte von Dr. W. Eisenlohr, Grossherzogl. Bad. Geheimrathe und em. Professor der Physik an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe u. s. w. Zehnte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 739 Holzschnitten. Stuttgart. J. Engelhorn. 1870. 8°.

Die neunte Auflage dieses trefflichen, durch den vielfachsten und weitesten Gebrauch vollkommen bewährten „Lehrbuchs der Physik“ ist von uns im Literarischen Berichte Nr. CLXII. S. 17. (Theil 41) angezeigt worden, und Alles, was dort und bei früheren Ausgaben zu dessen näherer Charakterisirung und seinem so wohlverdienten Lobe gesagt worden ist, gilt natürlich auch vollkommen von dieser zehnten Auflage. Wahrhaft gefreuet haben wir uns aber in dem Herzen des von uns hochverehrten so vielfach um die Physik und den physikalischen Unterricht verdienten Herrn Verfassers, dass dieses Werk, welchem er eine sehr lange Reihe von Jahren seine besten Kräfte in hingebendster Weise gewidmet hat, immer noch fortfährt, zur Verbreitung gründlicher und umfassender, zugleich für d.e Anwendung im Leben brauchbarer physikalischer Kenntnisse zu wirken, und zur Förderung derselben beizutragen, — und dass nach unserer Meinung dieser in so reichem Maasse Seitens des Publikums dem ausgezeichneten Werke geschenkte Beifall

ein sehr wohlverdienter und vollkommen gerechtfertigter ist, brauchen wir wohl hier nicht noch besonders auszusprechen und zu versichern. Bei der so weit verbreiteten Bekanntschaft, welcher das Werk sich erfreuet, können und dürfen wir hier nur noch so viel sagen, dass eine sehr sorgfältige Durchsicht uns zu der Ueberzeugung geführt hat, dass der Herr Verf. in dieser zehnten Auflage allen neueren Fortschritten der Wissenschaft mit der grössten und ausgebreitetsten Sachkenntniss und mit der sorgfältigsten Umsicht bei der Sonderung des Wichtigen von dem weniger Wichtigen, zugleich in sehr zweckentsprechender Kürze, Rechnung getragen hat, so dass wir diese neue Auflage allen denen, welche sich in aller Kürze eine gründliche Kenntniss von dem gegenwärtigen Zustande der Physik verschaffen wollen, vorzugsweise empfehlen können, indem dem Werke durch diese neue Auflage die hervorragende Stellung, welche es unter den deutschen Lehrbüchern der Physik längst eingenommen hat, auch für die Folge vollkommen gesichert ist. Möge uns schliesslich der Herr Verf. erlauben, die Worte am Schluss der Vorrede, wo er in bescheidenster Weise sagt: „Mag es nachher mit dem Buche kommen, wie es will, und mein Werk auch in Vergessenheit gerathen; wenn nur der Antheil an der Naturwissenschaft, zu deren Verbreitung ich Einiges beigetragen habe, im deutschen Volke immer allgemeiner wird und immer tiefere Wurzeln schlägt" in **seinem** Sinne und mit der Ueberzeugung, dass das Werk gewiss noch lange nicht der Vergessenheit anheim fallen wird, ganz zu den unsrigen zu machen.

Vermischte Schriften.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. VII. Fasc. I. Upsaliae 1869. 4°.

Seriei tertiae Vol. VI. Fasc. II. dieser sehr wichtigen Societäts-Schriften ist von uns im Literar. Ber. Nr. CLXXXXV. S. 13. angezeigt worden; der an diesen Band sich unmittelbar anschliessende vorliegende neue Band enthält die folgenden in den Kreis des Archivs gehörenden Abhandlungen:

Description d'un Météorographe enregistreur construit pour l'observatoire d'Upsal par Dr. A. — G. Theorell.

Der hier beschriebene sinnreich eingerichtete selbstregistrirende meteorologische Apparat, welcher von Herrn **Theorell** für die Sternwarte in **Upsala** construirt worden ist, scheint uns die weiteste Beachtung recht sehr zu verdienen. Die Beschreibung ist sehr deutlich und durch eine Tafel äusserst sorgfältig und genau ausgeführter Zeichnungen trefflich erläutert. Die Genauigkeit der von dem Apparat gelieferten Resultate ist durch eine Reihe von Herrn **Rubenson** im Jahre 1868 angestellter Beobachtungen, deren Vergleichungen mit directen Beobachtungen auf S. 16—S. 18 in einer Tafel in übersichtlicher Weise zusammengestellt sind, in vollkommen überzeugender Weise nachgewiesen, indem kleine Abweichungen der beiderseitigen Resultate von einander höchstens in der ersten Decimale in einigen Fällen vorkommen.

Distinction des Maxima et des Minima dans un Problème insopérimétrique. Par C.-E. Lundström.

Wie sehr die Variationsrechnung gerade bei der Unterscheidung der Maxima und Minima von einander noch der Vervollkommnung und weiteren Ausbildung bedarf, ist bekannt genug, und wir halten die vorliegende Abhandlung des Herrn **Lundström** in dem Kreise, welchen er sich selbst gezogen hat, für einen der Beachtung in jeder Beziehung sehr werthen Beitrag zu diesem wichtigen Gegenstande. Durch die Deutlichkeit, Bestimmtheit und Eleganz der Darstellung, welche Eigenschaften namentlich bei einer so intricaten Theorie gewiss nicht zu unterschätzen sind, sind wir besonders angezogen worden, und weisen namentlich auch hin auf die drei S. 26—S. 39 als Anwendungen der entwickelten Methode sehr vollständig und genau durchgeführten Beispiele.

In der Einleitung sagt Herr L.:

„Pour donner plus d'homogénéité à l'exposition, nous avons jugé nécessaire d'embrasser, sommairement et à titre d'introduction, les autres point cardinaux du calcul des isopérimètres.

Quoique nous espérions arriver par cette méthode à une solution générale de la question proposée, nous nous bornerons ici à considérer uniquement les problèmes dans lesquels on cherche les maxima et les minima d'une intégrale simple, tout développement naturel d'une théorie devant, selon nous, commencer par ce qu'elle a de moins compliqué.

Le contenu général des problèmes qui feront l'objet de cette esquisse, peut donc être formulé dans ces termes:

Trouver une courbe de telle forme et à de telles limites, que, tout en satisfaisant aux conditions du problème, elle fasse prendre à une intégrale dépendant cette forme et ayant les mêmes limites, une valeur maxima ou minima".

Wir haben diese Worte hier angeführt, um den Kreis genau zu bezeichnen, in welchem Herr L. sich für jetzt zu bewegen vorgenommen hat.

Upsala Universitets Årsskrift. 1868. Upsala. Akademiska Bokhandeln. (C. J. Lundström). 8°.

Die Jahrgänge 1866 und 1867 dieser ausgezeichneten und wichtigen „Årsskrift" sind im Literar. Ber. Nr. CLXXXXVIII. S. 16. angezeigt worden.

Der vorliegende neue Jahrgang 1868 enthält nur eine in den Kreis des Archivs gehörende, von 1—81 paginirte Abhandlung unter folgendem Titel:

Theori för Ytor af andra graden af **Göran Dillner.**

In derselben liefert Herr G. Dillner in ihm eigenthümlicher, von der meistens gewöhnlichen sich mehrfach unterscheidender und abweichender Weise eine sehr ausführliche analytische Theorie der Flächen des zweiten Grades, welche diesen schon vielfach in Angriff genommenen Gegenstand sehr eingehend und sorgfältig behandelt, und namentlich auch die verschiedenen möglichen Arten dieser Flächen sehr sorgfältig und scharf von einander unterscheidet und charakterisirt, wie man aus der Tabelle S. 70 ersehen wird, wobei zugleich eine grössere Anzahl von Beispielen vollständig entwickelt ist. Die Darstellung ist überall sehr elegant und zeichnet sich auch meistens durch Einfachheit in den nöthigen Rechnungen vortheilhaft aus. Besonders geeignet sind uns die von dem Herrn Verfasser in Anwendung gebrachten Methoden erschienen, um auch ein recht anschauliches Bild von der geometrischen Gestalt der betreffenden Flächen zu geben. So oft nun auch schon dieser Gegenstand behandelt worden ist, müssen wir doch die hier gegebene Behandlung wiederholt als eine dem Herrn Verf. mehrfach eigenthümliche bezeichnen, und die Abhandlung allen denen, welche sich mit dieser wichtigen Theorie beschäftigen, recht sehr zu sorgfältigster Beachtung empfehlen.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets

Års-Skrift. För År 1868. Lund, 1868—9. Berlingska Boktryckeriet. 4°.

Ueber die früheren Jahrgänge dieser trefflichen Årsskrift s. m. Literar. Ber. Nr. CLXXXXVIII. S. 17.

Der vorliegende neue Band enthält eine grössere Anzahl in den Kreis des Archivs gehörender Abhandlungen, auf welche wir unsere des Schwedischen hinreichend kundige Leser recht sehr aufmerksam machen, weil dieselben nach unserer Ueberzeugung sämmtlich für die Wissenschaft wichtig und in vielen Beziehungen sehr interessant sind. Dieselben sind die folgenden:

I. Om Solvärmens användande som mekanisk drifkraft af **John Ericsson.** ' p. 1 — p. 13 *).

II. Sur une forme générale de développement et sur les Intégrales definies par **C. J. Hill.** p. 1 — p. 24.

In den Fällen, wo die Form der Maclaurin'schen Reihe sich nicht anwendbar zeigt, kann man nach den anderen Formen fragen, in welchen die betreffenden Entwickelungen sich ausführen lassen. Der Herr Verf. der vorliegenden Abhandlung zieht vorzüglich die Form der doppelt unendlichen Reihen, welche er durch

$$+x^{-\infty}f_{\overline{\infty}}+\ldots+x^{-2}f_{\overline{2}}+x^{-1}f_{\overline{1}}+f_0+xf_1+x^2f_2+\ldots.$$

bezeichnet, in Betrachtung, was allerdings auch nahe lag, wenn man nur etwa an die Cosecante denkt. Wir empfehlen die Abhandlung recht sehr zur Beachtung.

III. Nagra satser om plana algebraiska kurvor, som gå genom samma skärningspunkter. Af **A. V. Bäcklund.** p. 1 — p. 28.

Diese Abhandlung enthält eine ziemlich grosse Anzahl neuer interessanter allgemeiner Sätze über die ebenen algebraischen Curven, und ist denen, die sich mit der geometrischen Theorie der algebraischen Curven beschäftigen, sehr zur Beachtung zu empfehlen. Auf die trefflichen Arbeiten Cremona's (in der bekannten Uebersetzung von Curtze) ist mehrfach Bezug genommen. Die Darstellung ist eine geometrisch sehr elegante, und die Abhandlung verdient auch von dieser Seite recht sehr der Aufmerksamkeit empfohlen zu werden.

---

*) Jede Abhandlung ist für sich paginirt.

IV. Om potenser af en complex variabel. Af **Mac. Berlin.** p. 1—p. 31.

Eine sehr ausführliche und gründliche, für die weitere Ausbildung ihres Gegenstandes wichtige Abhandlung über einen Theil der Theorie der Functionen der variabeln complexen Grössen, die wir gleichfalls recht sehr zur Beachtung empfehlen.

V. Planet-och Komet-Observationer, anställda År 1868 på Lunds Observatorium, utgifna af **Axel Möller.** p. 1—p. 105.

Eine lange Reihe höchst sorgfältiger Planeten- und Kometen-Beobachtungen aus dem Jahre 1868, mit genauen Reductionen, die für die Planeten- und Kometen-Theorie jedenfalls von nicht geringer Wichtigkeit sind, und von dem Fleisse der Sternwarte zu Lund das schönste Zeugniss ablegen.

Tidskrift för Matematik och Fysik, tillegnad den svenska Elementar-Undervisningen, utgifven af D: R. **Göran Dillner,** Adjunkt i Matematik vid Upsala Akademi (Hufvudredaktör); D: R. **Frans W. Hultman,** Lektor vid Stockholms högre Elementar-Läroverk: D: R. **T. Rob. Thalén,** Adjunkt i Fysik vid Upsala Akademi. Upsala, W. Schultz (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCII. S. 10.).

Tredje Årgången. Häft 1. Januari 1870. Mit diesem Hefte beginnen die drei verdienten Herrn Herausgeber den dritten Jahrgang ihrer trefflichen Zeitschrift, dessen Hauptinhalt wir im Folgenden anzeigen.

Das Heft beginnt mit einer Darstellung der Lehre von den gleichlaufenden (parallelen) Linien von Herrn G. Dillner, welcher Herr D. einen ihm eigenthümlichen Grundsatz zu Grunde legt, übrigens dabei die neueren Ansichten über diesen Gegenstand nicht unberücksichtigt lässt; seine Darstellung ist jedenfalls in zweckmässiger Weise auf den geometrischen Elementarunterricht berechnet. — In dem zweiten Aufsatze setzt Herr F. W. Hultman seine aus den früheren Heften bekannten verdienstlichen Untersuchungen über die Geschichte der Arithmetik in Schweden fort, in diesem Aufsatze mit besonderer Rücksicht auf Anders Engelbrektsson Bure, 1571—1646, und Henrik Olofsson Hortulanus. — Unter den auf S. 11—S. 22 von den Herren X.; J. Mattson, elev vid Teknologiska institutet i Stockholm; O. J. Fjortoft, student i Kristiania;

O. J. Stenborg, student; Ernst Pfannenstiehl, student; V. H. O. Madsen, premierlöjtnant af artilleriet. Kjöbenhavn; F. Ossbahr, student; gelösten Preisaufgaben für 1869 werden unsere Leser manches Beachtenswerthe finden. — Auf S. 24 — S. 30 werden neue Lösungen der von Herrn Malmsten im zweiten Jahrgange S. 69 in sehr interessanter Weise gelösten Differentialgleichung

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = f(x^2+y^2)$$

von den Herren Adolph Steen (von dem sich weitere beachtenswerthe Bemerkungen über Integration der Differentialgleichungen auf S. 44—S. 47 finden) und G. Mittag Leffler mitgetheilt. — Endlich setzt Herr G. Dillner seine aus den früheren Heften bekannten sehr zur Beachtung zu empfehlende Entwickelung des Calculs mit geometrischen Grössen auf S. 30—S. 43 fort. — Auch einige Preisaufgaben für 1870 werden aufgestellt.

Wir wünschen sehr, die Aufmerksamkeit unserer Leser von Neuem auf diese sehr verdienstliche Zeitschrift zu lenken, und bedauern nur, dass uns zu ausführlicheren Mittheilungen der Raum fehlt. G.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CCIV. S. 8.).

Anno VIII. Maggio e Giugno 1870. Sulle forme ternarie quadratiche; per G. Battaglini. p. 129. — Metodo per calcolare con approssimazioni successive certe le radici reali delle equazioni algebriche; per G. Janni. p. 157. — Disegno assonometrico; per D. Pantanelli. p. 161. — Dimostrazione di un teorema nella teoria dei numeri; per Vito Eugenio. p. 162. — Sopra un'estensione di proprietà spettanti a curve algebriche piane di un ordine qualunque, alle superficie di qualunque grado; per O. Tognoli. p. 166.

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona (Presso il R. Istituto Tecnico Superiore di Milano) in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal Prof. Tortolini. Milano. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCIV. S. 8.).

Serie II^a. Tomo III°. Fascicolo 4°. (Maggio 1870.). Dini: Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un' altra. p. 269. — M. Roberts: Sur les lignes de courbure d'un ellipsoïde. p. 294. — Riemann: Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie (Traduit de l'allemand par Mr. J. Hoüel, prof. à Bordeaux). p. 309. — W. Roberts: Sur une intégrale double définie. p. 327. — Tardy: Sopra alcuni teoremi aritmetici. p. 331.

Sitzungsberichte der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München. Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXXVII. S. 15.

1869. I. Heft III. Seidel: Ueber eine eigenthümliche Form von Functionen einer complexen Variabeln. S. 382. (nicht mitgetheilt.). — Necrologe von K. F. P. von Martius. S. 383; — F. B. W. von Hermann (berühmter National-Oekonom, aber früher — 1821 — Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Erlangen.). S. 387; — J. Plücker. S. 393. — Carlo Mateucci. S. 395. — A. F. Möbius. S. 396. — J. D. Forbes. S. 398. — Carl Kuhn. S. 400.

1869. I. Heft. IV. Enthält in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze nicht.

1869. II. Heft I. Pfaff: Ueber das Eindringen des atmosphärischen Wassers in den Boden (mit einer Tafel). S. 125.

1869. II. Heft II. v. Bezold: Ueber eine neue Art elektrischer Staubfiguren (vorläufige Mittheilung). S. 145.

1869. II. Heft III. v. Steinheil: Ueber constructive Auflösung der sphärischen Dreiecke. S. 369. — v. Bezold: Elektrische Staubfiguren als Prüfungsmittel für die Art der Entladung (mit einer Tafel). S. 371.

1869. II. Heft IV. Enthält in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze nicht.

1870. I. Heft I. v. Steinheil: v. Steinheil's vollständiger Comparator zur Vergleichung der Toise mit dem Meter und zur Bestimmung der absoluten Längenausdehnung der Stäbe (mit einer Tafel.). S. 1. (Für die Praxis sehr zu beachten. Der Comparator soll dem Uebelstande begegnen, dass nach v. Baeyer's Feststellung der Ausdehnungs-Coefficient des Zinks in längeren Zeitperioden sich ändert, eine Thatsache, die gewiss auch

für andere Metalle gültig ist, wodurch für alle genaueren Maassbestimmungen eine neue noch nicht gekannte und gar nicht unerhebliche Unsicherheit eintritt.). — Pfaff: Ueber den Betrag der Verdunstung einer Eiche während der ganzen Vegetationsperiode. S. 27.

1870. I. Heft II. v. Bezold: Untersuchungen über die elektrische Entladung. S. 113.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXXVII. S. 13.).

Jahrgang 1869. Juni — December. Durège: Ueber fortgesetzte Tangenten an Curven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte. S. 41. (Der Vortrag selbst wird erst im Actenbande 1869 erscheinen.).

Jahrgang 1869. Januar — Juni. E. Weyr: Ueber die Doppelelemente projectivischer Gebilde und deren Bedeutung für Curven dritter Ordnung und Classe. S. 3. — Studnička hielt einen Vortrag „Ueber Integration von linearen Differentialgleichungen.“ S. 16. (nicht mitgetheilt.). — Durège: Ueber fortgesetztes Tangentenziehen von Curven dritter Ordnung vierter Klasse (erscheint im Actenbande 1869.). S. 16. — Weyr: Ueber die Erweiterung der Giltigkeit der Entwickelung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch. S. 18. — Weyr: Ueber den Zusammenhang der Raumcurven dritter Ordnung mit den ebenen Curven dritter Ordnung vierter Classe, und jener dritter Classe vierter Ordnung. S. 22. — v. Waltenhofen: Ueber die Grenzen der Magnetisirbarkeit des Eisens und des Stahles. S. 51. — Grünwald: Neue Methode, die Differentialgleichungen des astronomischen Problems der n Körper und ähnliche viel allgemeinere Gleichungen zu integriren. S. 55. (nicht mitgetheilt.). — Durège: Ueber eine leichte Construction der Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurch gehen. S. 55. — Weyr: Ueber die Curven der kleinsten und grössten elektromagnetischen Wirkung. S. 59. — Grünwald: Ueber eine bemerkenswerthe Gattung simultaner linearer Differenzialgleichungen mit variablen Coefficienten. S. 63. — Gintl: Ueber Gust. Hinrichs Atommechanik. S. 79. (kurze Notiz über eine eingesandte Schrift.).

Jahrgang 1869. Juli — December. Weyr: Ueber Kegelschnitte, welche einem Dreieck ein- oder umgeschrieben sind und

einen festen Kegelschnitt doppelt berühren. S. 5. — **Blažek**: Ueber das dreiachsige Ellipsoid als Deformation der Kugel. S. 29. — **Weyr**: Ueber algebraische Curven. S. 33.

Preisaufgabe.

Die Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique hat die folgende Preisaufgabe gestellt:

Prix perpétuel institué par le Baron de Stassart pour la meilleure notice sur un Belge celèbre.

Conformément à la volonté du fondateur et aux généreuses dispositions prises par lui, la classe des lettres ouvre deux concours extraordinaires dont les prix seront decernés en 1871, savoir:

1°. Un prix de six **cents Francs** à l'auteur de la meilleure notice sur GÉRARD MERCATOR *).

Les manuscrits devront être écrits lisiblement rédigés en latin., français ou flamand, et adressés, francs de port, à M. Ad. **Quetelet**, secrétaire perpétuel, avant le 1er décembre 1870.

L'Académie exige la plus grande exactitude dans les citations; les auteurs auront soin, par conséquent, d'indiquer les éditions et les pages des ouvrages cités.

Les auteurs ne mettront point leur nom à leur ouvrage, mais seulement une dévise, qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse. Les mémoires remis après le terme prescrit, ou ceux dont les auteurs se feront connaitre, de quelque manière que ce soit, seront exclus du concours.

L'Académie croit devoir rappeler aux concurrents, que dès que les mémoires ont été soumis à son jugement, ils sont déposés

---

*) Hierher gehört nur dieser erste Concours. Durch die Stellung dieser Preisaufgabe an sich nimmt die Königliche Belgische Akademie der Wissenschaften (s. die obige Ueberschrift) schon jetzt Gérard Mercator als einen **„Belge celèbre"** in Anspruch, als welcher er wahrscheinlich auch in der Geschichte der Mathematik u. s. w. immer anerkannt und genannt werden wird. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CC. S. 1.).

dans ses archives comme étant devenus sa propriété. Toutefois, les auteurs peuvent en faire prendre des copies à leurs frais, en s'adressant, à cet effet, au secrétaire perpétuel.

Le Secrétaire perpétuel.
Ad. Quetelet.

Wir bedauern sehr, dass es uns erst jetzt möglich gewesen ist, die Anzeige dieser sehr zeitgemässen Preisaufgabe, für deren Stellung die Königliche Akademie in Brüssel ganz besonderen Dank verdient, zur Kenntniss unserer Leser zu bringen.

Greifswald Ende Juni 1870.

Grunert.

Nach dem uns eingesandten

Preis-Verzeichniss der physiologisch-chemischen Präparate und physikalischen Apparate von H. Sittel, Gehilfe am physiologischen Institut der Universität Heidelberg

kännen von Herrn Sittel zu den nachfolgenden, wie es uns scheint, mässigen Preisen, auch bezogen werden:

Lösliches **Berlinerblau** (als Injectionsfarbe) 500 Gramme zu fl. 9, 100 Gr. zu fl. 2.

Modell über die Mechanik der Gehörknöchelchen (nach Helmholtz) zu fl. 25.

Phakoskop zur Beobachtung der Veränderungen der Krystall-Linse bei der Accomodation, zu fl. 9, 30.

Monocort als Resonator mit gekrümmter Membran, nach Helmholtz (Pflüger's Archiv für Physiologie. I. Bd. S. 52.) zu fl. 9, 45.

Wheatstone's Apparat zur Erklärung der Schallwellen mit mehreren verschiedenen Wellensystemen, zu fl. 13—30.

Meridianasymetrie (regulärer Astigmatismus), Fadenmodell aus verschiedenfarbiger Seide zur Veranschaulichung des Gangs der Lichtstrahlen in den Augen, mit verbesserter Construction, zu fl. 7.

worauf wir Lehrer der Naturwissenschaften aufmerksam zu machen nicht verfehlen. G.

Literarischer Bericht
CCVI.

Schriften über Unterrichtswesen.

Programm der Königlichen Rheinisch-Westphälischen Polytechnischen Schule zu Aachen für den Cursus 1870—71. (Von der Direction und den Aachener Buchhandlungen Benrath und Vogelgesang oder J. A. Mayer gegen Einsendung von 3 Groschen-Marken franco zu beziehen).

Mit dem besten Danke für die Uebersendung dieses sehr vollständigen Programms machen wir alle diejenigen, welche sich eine genaue Kenntniss von der Einrichtung der betreffenden neu errichteten sehr wichtigen polytechnischen Schule, an der ausser dem Director Baurath v. Kaven noch 32 Lehrer unterrichten, verschaffen wollen, recht sehr auf dasselbe aufmerksam.

G.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma 1870. 4⁰. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCV. S. 1.).

Tomo III. Febbraio 1870. Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Von Dr. G. Friedlein, Rector in Hof. Mit 11 Tafeln. Erlangen 1869. Angezeigt von J. Hoüel. p. 67. — Intorno a due edizioni di Marco Michele

Bousquet. Brano di lettera del Prof. Ing^re^. Ferdinando Jacoli a D. B. Boncompagni, in data di Genova 10 Gennaro 1870. (Betrifft das bekannte ausgezeichnete, rein geometrisch verfasste Werk: „Davidis Gregorii Astronomiae physicae et geometricae elementa". Ueber den berühmten Buchhändler M. M. Bousquet vergl. Literar. Ber. Nr. CCIII. S. 3.). p. 91. — Annunzi di recenti pubblicazioni. p. 93.

Sul Teorema del Conte di Fagnano. Nota di F. Siacci. Estratto dal Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo III. Gennaio 1870. 4⁰.

Diese nicht bloss historisch, sondern auch in wissenschaftlich analytischer Rücksicht wichtige und interessante Abhandlung ist schon in der vorigen Nummer des Literarischen Berichts (S. 2.) ausführlicher von uns besprochen worden; hier kommen wir nur deshalb auf dieselbe zurück, um die Mathematiker auf den vorliegenden besonderen Abdruck aufmerksam zu machen, für dessen Veranstaltung Herr Boncompagni jedenfalls grossen Dank verdient.

Otto von Guericke als Physiker von Dr. Ad. Hochheim, ord. Lehrer an der höh. Gewerbeschule zu Magdeburg. Magdeburg 1870. Hof-Buchdruckerei von C. Friese. 4⁰.

Je spärlichere Nachrichten wir bis jetzt über den berühmten Erfinder der Luftpumpe und seine Arbeiten auf dem Gebiete der Physik überhaupt besitzen: mit desto grösserem Interesse haben wir die vorliegende sehr fleissig und mit vollkommener Kenntniss des Gegenstandes verfasste, vielfaches Interesse darbietende Schrift (wahrscheinlich ein Schulprogramm?) gelesen, und empfehlen dieselbe recht sehr zur Beachtung. Natürlich bespricht der Herr Verfasser zuerst Guericke's Verdienste um die Aerostatik und sagt S. 10. mit Recht: „Es unterliegt keinem Zweifel, dass Otto v. Guericke, indem er die Schwere und Elasticität der Luft nachwies, die Grundlage für das ganze Gebäude der Mechanik luftförmiger Körper gelegt hat." — Hierauf werden Guericke's Verdienste um andere Theile der Physik — die Lehre vom Schall, vom Lichte, von der Wärme (eingehend beschäftigte er sich experimentell mit der Flamme), von der Elektricität — besprochen.

Mit so vielem Interesse man diese Darstellung der wissen-

schaftlichen Verdienste **Guericke's** lesen wird: so möchte doch vielleicht Mancher mit uns wünschen, dass der Herr Verfasser auch einige eingehendere Nachrichten über die äusseren Lebensverhältnisse des trefflichen Mannes geliefert hätte, die er vielleicht später einmal an einem passenden Orte nachfolgen lässt.

Arithmetik.

Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Abiturienten-Prüfungen an preussischen Gymnasien und Realschulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Resultate zu einem Uebungsbuche vereint von H. C. E. Martus, Oberlehrer an der Königstädtischen Realschule in Berlin. Zweiter Theil: Resultate. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Greifswald 1870. C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung. 8° *).

Mit Bezugnahme auf unsere Anzeige des die „**Aufgaben**" enthaltenden ersten Theils dieser ausgezeichneten mit grosser Sorgfalt und Umsicht bearbeiteten Aufgabensammlung im Literar. Ber. Nr. CLXXXXIX. S. 4. genügt es hier, auf das nunmehrige Erscheinen des vorliegenden, die „**Resultate**" enthaltenden zweiten Theils hinzuweisen. Die sehr grosse Sorgfalt und Umsicht, mit welcher der Herr Verfasser namentlich auch diesen zweiten Theil bearbeitet hat, lässt der flüchtigste Blick in das Buch auf der Stelle erkennen, und die Schulen und deren Lehrer sind dem Herrn Verfasser wahrlich den wärmsten Dank schuldig für die durch die sehr ausführliche Lösung dieser mehr als 1500 Aufgaben verursachte ungemein grosse Mühe und Arbeit. Einige Veränderungen für den ersten Theil sind am Anfange, und einige Verbesserungen und Zusätze für den zweiten Theil am Ende dieses zweiten Theils beigefügt.

Möge der am Ende unserer Anzeige des ersten Theils von uns ausgesprochene Wunsch in der weitesten Ausdehnung in Erfüllung gehen!

---

*) Weshalb dieses Buch hier unter die Rubrik „**Arithmetik**" und nicht unter die Rubrik „**Vermischte Schriften**" gestellt ist, s. m. Literar. Ber. Nr. CLXXXXIX. S. 6. (Anmerkung).

Geodäsie.

Das Höhenmessen mit Metall-Barometern (Baromètres holostériques) und die Ausmittelung der Ablese-Correctionen (des Standes) derselben. Nebst 4 Hilfstafeln für barometrische Arbeiten. Eine Studie für Freunde der Hypsometrie, namentlich aber für Eisenbahn-Tracirungs-Ingenieurs, von Josef Höltschl, Assistenten der Lehrkanzel der practischen Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien. Mit einem in den Text eingedruckten Holzschnitt. Wien 1870. Beck'sche k. k. Universitäts-Buchhandlung. (Alfred Hölder). 8⁰*).

Bekanntlich giebt es zwei Arten von Metall-Barometern: das ältere vor ungefähr 25 Jahren erfundene Baromètre anéroïd des Engländers Vidi, und das neuere Baromètre holostérique von Naudet, Hulot & Compagnie in Paris, welches ausser einer kleinen Verbesserung nahezu denselben Mechanismus mit dem Vidi'schen Anéroïd hat. Herr Höltschl hat in der vorliegenden Schrift fortwährend das Holostérique vor Augen gehabt und giebt S. 11. ff. eine sehr deutliche, durch eine Abbildung des inneren Mechanismus erläuterte Beschreibung der Einrichtung desselben.

Man weiss, dass das Holostérique überhaupt, namentlich aber auf Reisen, und vorzüglich auch für das barometrische Höhenmessen, auf Schiffen u.s.w. ein äusserst bequemes, besonders leicht transportables, und — unter Voraussetzung der nöthigen Vorsicht — Beschädigungen nicht leicht ausgesetztes Instrument ist. Auf der anderen Seite weiss man aber auch, dass das Holostérique, auch bei dem sorgfältigst ausgeführten Mechanismus, ein ziemlich unvollkommenes Instrument ist und wohl auch immer bleiben wird, und nur, wenn eine grössere Anzahl von Correctionen an den von ihm gelieferten Ablesungen angebracht wird, die nur durch sorgfältige und vielfache Vergleichung jedes Holostérique's als eines Individuums mit einem Quecksilber-Normal-Barometer gewonnen werden können, zuverlässige Resultate zu liefern im Stande ist.

Ohne bei der nicht zu umgehenden Kürze der Anzeigen in diesen Literarischen Berichten auf Einzelnheiten eingehen zu kön-

---

*) Könnte auch unter der Rubrik „Physik" stehen.

nen, bemerken wir, dass Herr Höltschl in der vorliegenden Schrift eine im Allgemeinen treffliche, sorgfältige und sehr eingehende Anleitung zur Bestimmung aller in Rede stehenden nöthigen Correctionen geliefert hat, wobei ihm eine reiche Erfahrung zur Seite stand, weil er seit längerer Zeit für den Optiker Herrn J. Feiglstock (Wien, verlängerte Kärtnerstrasse Nr. 51. Todesco-Palais), welcher immer eine grössere Anzahl in Paris (H. Hagenbroock, 47, Rue Rivoli, Firma: Naudet, Hulot & Cie) verfertigter Holostériques auf Lager hält *), die erforderlichen Corrections- oder Stand-Tabellen berechnet hat, welche den verkäuflichen Instrumenten beigegeben werden oder wenigstens auf Verlangen beigegeben werden können.

Herr Höltschl hat nun aber in dieser Schrift nicht bloss eine sehr sorgfältige Beschreibung des Holostérique's und Anleitung zu dessen Correction mit sehr grosser Sachkenntniss geliefert, sondern zugleich eine vorzügliche Anleitung zu Höhenbestimmungen mit diesem Instrumente und Tafeln zur Erleichterung der betreffenden Rechnungen gegeben, ja selbst die allgemeine Theorie des Höhenmessens mit dem Barometer keineswegs unberücksichtigt gelassen (— Alles in mathematischer oder eigentlich analytischer Fassung und Darstellung, der wir unsere Anerkennung zollen, da die Durchführung überall sehr deutlich und streng ist, daher die Schrift besonders auch in dieser Beziehung allgemeine Beachtung verdient —), so dass wir das vorliegende Werkchen als eine vollständige Anleitung zu dem Höhenmessen mit dem Holostérique betrachten können, und der Meinung sind, dass dasselbe von Keinem, der sich solchen Höhenbestimmungen zu widmen, oder überhaupt einen genauen wissenschaftlichen Gebrauch von dem genannten Instrumente zu machen gedenkt, fernerhin wird entbehrt werden können.

Auf weiteres Detail können wir, wie schon erinnert, in diesen Literarischen Berichten nicht eingehen**), halten aber das Werkchen für so wichtig, dass wir nachstehend noch seinen Hauptinhalt angeben werden.

---

*) Herr Feiglstock führt zwei Gattungen in seinem Geschäft: solche von 7^{cm} und solche von 11^{cm} Durchmesser, diese letzteren zu dem Preise von 40 Fl. österr. Währung in Banknoten pr. Stück, ohne die Rectifications-Tabellen, die besonders berechnet werden. Die grösseren Instrumente gestatten, abgesehen von anderen Vorzügen, namentlich eine sehr genaue Ablesung, und verdienen mit den Tabellen in jeder Beziehung recht sehr empfohlen zu werden.

**) Und unterlassen dies um so mehr, weil der Herr Verfasser nach uns

Band V. Nr. 8. Ueber ein neues Aneroid-Barometer bestimmt zu barometrischen Höhenmessungen. Von J. Goldschmid. S. 177.

Band V. Nr. 9. Ueber das Klima der höchsten Alpenregion. Von Dr. J. Hann. (Schluss) S. 193. — Ueber atmosphärische Elektricität. VI. Der Passat und Antipassat. Von Dr. Dellmann. S. 206.

Band V. Nr. 10. Ueber das Klima des Isthmus von Suez. Von G. Rayet. S. 225. — Normale Temperaturmittel für Russland. Von Dr. Alex. von Wojeikoff. S. 232.

Band V. Nr. 11. Bahn der mit dem Golfstrom von Südwest nach Nordost über dem nordatlantischen Oceane längs der Küsten von Nordwest-Europa fortschreitenden Sturmfelder. Von Dr. M. A. F. Prestel. S. 257. — Der tägliche Gang der Witterungsverhältnisse in Tiflis. Von Dr. Berger. S. 261.

Band V. Nr. 12. Der mittlere Luftdruck und die vorherrschende Windesrichtung auf der Erdoberfläche für die einzelnen Monate und für das Jahr. Nach Alexander Buchan. S. 289. — Ueber die tägliche Periode der Regenmenge zu Batavia. Von Director Dr. Bergsma. S. 300. — Ueber einen Apparat mit beweglichem Conductor zur Beobachtung der Luftelektricität. Von L. Palmieri. S. 306.

Band V. Nr. 13. Dove's Untersuchungen über die Gesetze normaler Wärmezustände auf der Erdoberfläche. Besprochen von Dr. Hann. S. 321. — Ueber einen Apparat mit beweglichem Conductor zur Beobachtung der Luftelektricität. Von L. Palmieri (Schluss). S. 329.

Die grosse Beschränktheit des Raums zwingt uns auch bei der Anzeige der obigen Nummern der wichtigen und interessanten österr. meteorologischen Zeitschrift, uns auf die Angabe der grösseren Aufsätze zu beschränken. Alle Nummern enthalten aber auch wieder eine grosse Anzahl sehr interessanter kleinerer Mittheilungen und Literaturberichte.

Unter der Rubrik „Geodäsie“ s. m. die Schrift von Höltschl über Höhenmessen mit Metall-Barometern.

Statistik.

Physique sociale ou essai sur le développement des facultés de l'homme, par Ad. Quetelet, Directeur de l'observatoire royal de Bruxelles, Secrétaire perpétuel de l'Académie royale de Belgique, Président de la Commission centrale statistique du royaume etc. etc. Tome I, Tome II. Bruxelles. — C. Muquardt. — Paris. J.—B. Ballière et fils. — Saint-Pétersbourg. Jaques Issakoff. — 1869. 8⁰.

Als die Frucht langjähriger eifriger Studien und Arbeiten liegt uns hier ein wichtiges Werk über eine neue Wissenschaft vor, welche der berühmte Verfasser desselben die „Sociale Physik" genannt hat, die auch das Interesse des Mathematikers in hohem Grade in Anspruch nimmt, einestheils wegen ihres wichtigen Inhalts an sich, anderntheils wegen ihrer innigen Verbindung mit der Probabilitäten-Rechnung, in welcher sie ihre eigentliche Grundlage findet und ohne welche sie in streng wissenschaftlicher Gestalt nicht bestehen kann.

Schon im Jahre 1835 gab Herr A. Quetelet sein bekanntes wichtiges Werk:

Sur l'homme et le développement de ses facultés ou essai de Physique sociale. Tome I. Tome II. Paris, Bachelier, imprimeur-libraire. 1835. 8⁰.

heraus, und als eine neue Ausgabe dieses Werks ist das vorliegende von dem Herrn Verfasser selbst zwar bezeichnet worden; dasselbe ist aber — wie schon sein viel grösserer Umfang (988 Seiten in grösstem Format der neuen gegen 654 Seiten in kleinem Format der alten Ausgabe) ersehen lässt — als ein ganz neues Werk zu betrachten, und enthält überall sehr wichtige Resultate langjähriger überaus sorgfältiger Untersuchungen über den Menschen.

Einen allgemeinen Begriff der „Socialen Physik" in der Kürze zu geben, ist schwer, ja wohl kaum möglich; indess mag man sagen, dass dieselbe bezwecke, allgemeine Gesetze der körperlichen und geistigen Entwickelung des Menschen und der Organisation des socialen Systems aufzufinden und aufzustellen, was natürlich nur auf dem Wege langjähriger und vielfacher Beobachtungen und Verwerthung derselben nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung möglich ist. Herr Quetelet sagt

selbst in der Vorrede zur ersten Ausgabe: „L'ouvrage que je présente au public, est en quelque sorte le résumé de tous mes travaux antérieurs sur la statistique. Il se compose de deux parties bien distinctes: les trois premiers livres ne renferment que des faits; le quatrième contient mes idées sur la théorie de l'homme moyen et sur l'organisation du système social. Cette dernière partie est entièrement indépendante de la première; j'ai taché de la resserrer le plus possible, et trop peut-être pour ne pas avoir à craindre d'être mal compris dans l'exposé d'une théorie qui pourra froisser bien des opinions."

Dass alles in der älteren Ausgabe Entwickelte in der neueren viel weiter ausgeführt und schärfer begründet worden ist als in der älteren, können wir unsere Leser versichern; auch enthält die neue Ausgabe viel mehr eigenthümliche mathematische Entwickelungen als die ältere, bei denen mit Recht die graphische Darstellung angestellter Beobachtungen durch Curven vielfache Anwendung gefunden hat.

Bei der in diesen Literarischen Berichten uns nothwendig gebotenen Kürze können wir unser Urtheil über dieses in jeder Beziehung treffliche, als die Frucht der eifrigsten Studien eines langen Lebens zu betrachtende Werk ganz im Allgemeinen nur in den Worten zusammenfassen, dass wir dasselbe für die bei Weitem wichtigste neuere Erscheinung auf dem Gebiete der wahrhaft wissenschaftlichen Statistik halten, und die feste Ueberzeugung haben, dass dasselbe von Niemand ungelesen bleiben wird und darf, der an der Entwickelung der socialen Verhältnisse des Menschengeschlechts warmen Antheil nimmt. Dasselbe macht seinem Verfasser die grösste Ehre und wird seinen Namen auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Statistik für alle Zeiten erhalten.

Die grosse Wichtigkeit des Werks legt uns die Pflicht auf, wenigstens Einiges aus seinem reichen Inhalte hier anzugeben, um dadurch unseren Lesern einigermassen eine Einsicht in das Wesen desselben zu verschaffen.

Tome I.

Introduction. Sur la théorie des probabilités et ses applications aux sciences physiques et sociales, par Sir John Herschel. Diese Einleitung sollte von keinem sich für Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendung Interessirenden ungelesen

gelassen werden. — **Livre premier.** 1. Développement de l'homme physique. 2. Les actions de l'homme moral et intellectuel sont elles soumises à des lois? 3. Naissance et progrès de la statistique. 4. Etendue des travaux statistiques. 5. Plan général d'une statistique administrative. 6. Phénomènes périodiques. 7. Études des lois relatives à l'homme. 8. La théorie des probabilités sert de base à l'étude des lois naturelles. 9. Des causes qui influent sur l'homme. 10. Objet de cet ouvrage: importance des recherches relatives à l'homme. — **Livre deuxième.** Division générale de l'ouvrage: Qualités physiques de l'homme. Chap. I. 1. De la conception et de la naissance. 2. De la fécondité. 3. Influence des sexes dans le nombre des naissances. 4. Influence de l'âge sur la fécondité des mariages. 5. Influence des climats. 6. Influence des années. 7. Influence des saisons. 8. Influence des heures du jour. — Chap. II. Action des causes perturbatrices sur le nombre des naissances. 1. Influence des professions, de la nourriture etc. 2. Influence de la moralité. 3. Influence des institutions civiles et religieuses. — Chap. III. Des morts-nés. — Chap. IV. 1. Mariages et naissances comparés entre l'époque actuelle et les années qui ont précédé 1834. 2. Résultats du mouvement dans les divers États vers 1860. 3. Mariages. — Chap. V. Influence des causes naturelles sur les décès. 1. lieux. 2. sexes. 3. âge. 4. années. 5. saisons. 6. heures du jour. Chap. VI. Progrès de la statistique sur l'étude de la mortalité. — Chap. VII. De l'influence des causes perturbatrices sur le nombre des décès (avant 1835). 1. professions etc. 2. moral. 3. lumières et institutions politiques et réligieuses. 4. De l'emploi de la statistique dans les sciences médicales. 5. Administrations gouvernementales. — Chap. VIII. 1. De la population et de ses accroissements (avant et après 1835). 2. Des tables de population. 3. Les données relatives à la population peuvent-elles fournir des renseignements sur la prospérité d'un peuple? — Appendice. Population, naissances, décès et mariages pendant les dernières années et dans la plupart des pays de l'Europe. — Théorie des chances et des probabilités statistiques. 1°. Le nombre des chances est connu. 2°. Ce nombre est inconnu. — L'accord entre le calcul et l'experience est d'autant moins précis qu'on fait moins d'expériences. — De la moyenne et des limites extrêmes dans l'appréciation des mesures. (Alles höchst beachtenswerth für jeden wissenschaftlichen Bearbeiter der Statistik).

Tome II*).

Livre troisième. Développement des qualités physiques de l'homme. — Chap. I. Développement de la taille? Loi de distribution des tailles quand le nombre des chances est illimité. — Chap. II. 1. Poids et tailles aux différents ages. 2. Poids d'une population. Poids et taille du squelette humain. — Chap III. Du développement de la force. — Chap. IV. Inspirations et pulsations, poids du sang. — Chap. V. De la vitesse, de l'agilité et de quelques autres qualités physiques de l'homme. — **Livre quatrième.** De l'homme moyen sous le rapport des qualités intellectuelles. — Chap. I. Développement des facultés intellectuelles. — Chap. II. Développement des qualités morales. — **Livre cinquième.** De l'homme moyen et du système social. Progrès ultérieures de cette étude. — Chap. I. Propriétés de l'homme moyen. — Chap. II. Des progrès ultérieures de nos connaissances sur les lois de développement de l'homme. — Chap. III. Résumé général.

Möge der Herr Verfasser noch viele Jahre die Früchte seiner langjährigen schwierigen, aber so erfolgreichen Studien über den Menschen geniessen, und seinem trefflichen und wichtigen Werke die in allen Beziehungen so sehr verdiente Anerkennung im reichsten Maasse zu Theil werden!

Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXXVIII. S. 12).

38me Année, 2me Sér. T. XXVII. Note sur l'interprétation infinitésimale de Poisson, par M. Manilius. Rapport par M. E. Catalan (La note, soumise au jugement de l'Académie semble complétement dépourvue d'intèrêt.). Wenn wir auch die Note des Herrn Manilius nicht kennen, so glauben wir doch, dass das von Herrn Catalan gefällte Urtheil ein auf alle Versuche, welche die älteren Vorstellungen über das sogenannte, eine gewisse Realität besitzen

*) Der knappe Raum zwingt uns, uns hier etwas kürzer zu fassen als bei Tome I.

sollende Unendliche zu rechtfertigen suchen, anwendbares ein wird. G. p. 9. — Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes, par M. E. Catalan. Rapport de M. Gilbert. „Par un point fixe O, et dans le plan passant par la normale mn en un point quelconque m d'une surface donnée s, on méne la droite OM, égale et perpendiculaire à Om. Le lieu géométrique du point M est une nouvelle surface S, dérivée de la surface primitive s." Die beiden Flächen s und S nennt Herr Catalan „surfaces conjuguées"*), und der Untersuchung und Vergleichung dieser Flächen ist das nach dem ausführlichen sehr lehrreichen Rapport des Herrn Gilbert sehr interessante Mémoire des Herrn Catalan gewidmet. p. 129. — Sur les roulettes et les polaires; par M. E. Catalan. p. 144. — Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce par M. E. Catalan. p. 145. — Taille de l'homme à Venise, pour l'age de vingt ans; communication par M. Ad. Quetelet. p. 196. — Eine Reihe von Aufsätzen über in Liège, Bruxelles, Anvers, Ostende im Jahre 1868 beobachtete Gewitter von den Herren Leclercq, Ad. Quetelet, Dewalque, Coomans, Cavalier. p. 249. — p. 274. — Note sur un nouveau système de chronométrie electrobalistique, par M. le major Navez. Rapport de M. le colonel Brialmont. p. 367. — M. Catalan communique l'extrait suivant d'une lettre de M. Folie: „**Théorème.** Considérons n points sur une conique; ces n points déterminent $\frac{n(n-1)}{2}$ polygones: les produits des distances d'un point quelconque de la conique aux n côtés de chacun de ces polygones sont entre eux, deux à deux, en raison **constante.**" p. 385. — Note sur un nouveau système de chronométrie électrobalistiqne, par le major d'artillerie Navez en nonactivité de service. p. 386. — Note complémentaire au mémoire du major Navez sur un nouvean système de chronométrie électrobalistique. p. 417. — Études de mécanique abstraite, par M. le capitaine d'artillerie J.-M. De Tilly. Rapport du colonel Liagre. p. 615. — Rapport de M. Ern. Quetelet. (Hängt mit den neueren Ansichten über die Theorie der Parallelen eng zusammen, und verdient rücksichtlich der Mechanik Beachtung, so viel sich aus diesen Rapports ersehen lässt). p. 618. — Aurores boréales des 15 avril et 13 mai 1869, notice de M. Ern. Quetelet. p. 628. — Bolide observé à Bruxelles le lundi 31 mai 1869, notice par M. Ern. Quetelet. p. 631. — Sur les météores

*) Herr Salmon hat dieselben „surfaces apsidales" genannt, s. nachher in Tome XXVIII. p. 31. einen Aufsatz von Herrn Ph. Gilbert.

Sitzungsberichte der Königl. Bayerishen Akademie der Wissenschaften in München. Vergl. Literar. Ber. Nr. CCV. S. 13.

1870. I. Heft III. Seidel: Einige Bemerkungen in Bezug auf die Beobachtung der im Jahre 1874 bevorstehenden Durchgänge der Venus durch die Sonne. S. 297.

1870. I. Heft IV. Lommel: Das Leuchten der Wasserhämmer. S. 532. — Riefler: Ueber das Passagen-Prisma (mit einer Tafel). S. 545.

Anzeige.

Nachdem das älteste bekannte Bild des Copernicus im Besitze der hiesigen St. Johannes-Kirche, das ungefähr 50 Jahre nach seinem Tode in seiner Vaterstadt gefertigt, aber vor ungefähr 150 Jahren in sehr roher Weise übermalt wurde, auf Anstiften und auf Kosten des hiesigen „Copernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst" in seiner ursprünglichen Gestalt durch einen namhaften Künster wiederhergestellt ist, habe ich auf Anrathen des erwähnten Vereines eine Photographie des Bildes in Visitenkartenformat aufgenommen, von der ich hierdurch eine Anzahl Exemplare zum Preise von 5 Sgr. pro Stück zum Verkauf stelle. Bestellungen bitte ich durch eine der hiesigen Buchhandlungen oder direct an mich gelangen zu lassen.

Thorn, im Juli 1870.

Alexander Jacobi,
Photograph.

Ich kann die mir mitgetheilte Photographie des grossen Mannes allen Verehrern desselben recht sehr empfehlen.

Grunert.

Literarischer Bericht
CCVII.

Dr. Karl August von Steinheil.

Nekrolog.

In diesen Tagen des Waffenklangs und begeisterter Volkserhebung hält es schwer aufmerksame Leser zu finden für die Angelegenheiten der friedlichen Künste und Wissenschaften; aber dennoch möchten wir heute die Aufmerksamkeit der Leser dieser Zeitschrift ein wenig in Anspruch nehmen, um ihnen in kurzen Zügen das Lebensbild eines Mannes vorzuführen, der in der Physik und verwandten Wissenszweigen Bedeutendes geleistet hat und nun seine letzte Ruhestätte auf dem Münchener Friedhofe fand.

Dr. Karl August v. Steinheil wurde geboren zu Rappoltsweiler im Elsass am 12. October 1801. Sein Vater war pfalzzweibrückischer Hofrath in Diensten des nachmaligen Königs Maximilian I. von Bayern; er ist also zwar auf damals französichem Boden geboren, gehört aber entschieden der deutschen Nationalität an und brachte nur seine ersten Kinderjahre im Elsass zu, denn schon im Jahre 1807 zog er mit seinem Zwillingsbruder und seinen Eltern nach München; ersterer starb dort schon in frühster Jugend und auch unser Steinheil war ein zartes Kind. Er hatte viele Krankheiten durchzumachen, lag sogar schon scheintodt und zur Beerdigung geschmückt im Sarge! Der Hausarzt tröstete seine Mutter, eine Frau von ungewöhnlichen Geistesgaben und seltener Energie, mit den nachmals oft belächelten Worten: Seien Sie froh, dass der Kleine todt ist; bei seinem schwachen Körperbau wäre doch nie etwas Rechtes aus ihm geworden!

Die zarte Constitution des Knaben veranlasste denn auch seinen Vater, der inzwischen als General-Zoll- und Mauth-

Directionsrath in den Staatsdienst des jungen Königreichs Bayern eingetreten war, in der Nähe von München das Gut Perlachseck zu kaufen. Die ländlichen Arbeiten in der freien Natur kräftigten auch bald den jungen Körper; der talentvolle Knabe zeichnete mit besonderer Vorliebe und wollte Maler werden. Als er 16 Jahre alt war brachte ihn seine Mutter zu ihrem Schwiegersohn, dem Obersten v. Glady nach Nancy, damit er Französisch lerne. Hier im Hause seiner einzigen ihn überlebenden, um 21 Jahre älteren Schwester genoss er den fördernden Umgang vieler gebildeten Familien und fasste den Entschluss zu studiren; aber es trat eine neue Verzögerung ein. Er siedelte mit seinem Schwager nach Tours über, erkältete sich hier beim Baden, wurde aufs Krankenlager geworfen und kam dem Tode nahe. Kaum genesen wurde er von seinem Vater nach München abgeholt und begann nun dort mit grossem Eifer den Studien obzuliegen. Da er mit ausserordentlicher Leichtigkeit lernte, hatte er durch Privatunterricht die früher entbehrte systematische Schulbildung bald ersetzt, besuchte dann 2 Jahre lang das Lyceum in München, erhielt im Jahre 1821 das Gymnasial-Absolutorium und gieng als cand. juris auf die Universität Erlangen. Hier schloss er bald Freundschaft mit den nachmaligen Ministern Heintz und Stahl; sie waren vom wohlthätigsten Einfluss auf seine geistige Entwicklung, vermochten ihm aber doch keinen rechten Geschmack an der juridischen Laufbahn beizubringen; seine Neigung für mathematische Studien und namentlich Astronomie trat immer deutlicher hervor und führte ihn schon im Jahre 1822 nach Göttingen zu Gauss. Da jedoch damals dieser geniale Altmeister der Mathematik nicht las, blieb Steinheil nur ein Semester in Göttingen und bezog dann die Universität Königsberg, um Bessel zu hören. Hier war er an seinem Platze. Mit wahrem Feuereifer widmete er sich astronomischen Studien und zog bald Bessel's besondere Aufmerksamkeit auf sich. Diese steigerte sich in Kurzem zu väterlicher Freundschaft: Bessel gewann Steinheil so lieb, dass er seinen ganzen Einfluss daran setzte ihn in Königsberg zu behalten, als die damalige preussische Regierung den jungen Studenten, der sich der Burschenschaft angeschlossen hatte, wegen vermeintlicher demagogischer Umtriebe durchaus des Landes verweisen wollte. Mit einigen Tagen Carcer waren die hochmögenden Herren auch zufrieden gestellt, und Steinheil verkürzte sich die Gefangenschaft mit astrononomischen Rechnungen. Die Freundschaft Bessel's für Steinheil dauerte bis zum Tode des unvergleichlichen Astronomen, von dem sich in Steinheil's Nachlass eine Reihe der interessantesten Briefe vorfindet. Steinheil wurde öfters ersucht dieselben zu veröffentlichen, lehnte dies aber aus Bescheidenheit ab, weil er selbst

Ph. Gilbert. Rapport de M. Steichen. p. 528. — Études sur les coordonnées tétraédriques, par M. Neuberg. Rapport de M. Gilbert. p. 529. Note annexée au rapport précédent. p. 535. — Sur une modification de la machine électrique de Nairne, par M. Pérard. p. 540. — Sur les étoiles filantes du mois de novembre 1869, communication de M. Ad. Quetelet. p. 543.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1869. Nr. 684—711. Mit sechs Tafeln. Bern 1870. 8°.

Diese Nummern der sehr verdienstlichen Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern enthalten nur den folgenden in den Kreis des Archivs gehörenden Aufsatz:

G. Hasler: Telegraphischer Wasserstandsanzeiger. S. 179. — In den Sitzungsberichten sind aber mehrere in den Sitzungen gehaltene physikalische Vorträge von A. Forster (Ueber tönende Flammen. Ueber das Absorptionsvermögen der Metalle für Gase. Ueber die Ausbreitung der Wärme in festen Körpern), von Henzi (Ueber ein hellleuchtendes Meteor), von Sidler (Bericht über die Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 18. August 1868) ihrem allgemeinen Inhalte nach angezeigt.

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona (Presso il R. Istituto tecnico superiore di Milano) in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal Prof. Tortolini. Milano. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCV. S. 12).

Serie II^a. Tomo IV°. Fascicolo I^a. (Luglio 1870). Christoffel: Sopra un problema proposta da Dirichlet. p. 1. — Codazzi: Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio. Memoria quarta. p. 10. — Geiser: Sopra un problema fondamentale della Geometria. p. 25. — Ascoli: Dimostrazione di un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di variabili complesse. p. 31. — Fuchs: Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires. p. 36. — Armenante: Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p = 0$ sopro un piano. p. 50. — Sturm: Sur la surface enveloppée par les plans qui coupent une courbe gauche du 4e ordre et 2e espèce en quatre points d'un cercle. p. 73.

Helligkeit der Fixsterne — veranlasste ihn „Elemente der Helligkeits-Messungen“ zu schreiben. Diese Arbeit wurde von der Göttinger Societät der Wissenschaften mit einem Preise gekrönt. Neben solchen optischen Arbeiten fand Steinheil auch Zeit sich mit ganz fernliegenden Problemen eingehend zu beschäftigen. So construirte er ein eigenthümliches Artillerie-Geschoss, „Fugal-Maschine“ genannt, eine Verwendung des Fugalschwungs zum Schleudern eines Stromes von Projectilen mit der Initial-Geschwindigkeit unserer Feuergewehre. Steinheil bot diese Maschine der bayrischen Regierung an, dieselbe gieng jedoch nicht auf Ausführung im Grossen ein. Dagegen wurden Modelle hergestellt, welche bei Artillerie-Offizieren hohes Interesse erregten. Noch unter der Regierung des letzten Kaisers der Franzosen wurde ein eigener Abgesandter zu Steinheil nach München beordert, welcher dringend bat, ein Modell der Fugalmaschine, angeblich zu wissenschaftlichen Versuchen, abzutreten. Steinheil lehnte jedoch als charakterfester deutscher Mann diese Bitte auf's entschiedenste ab. Eine schriftliche Abhandlung über diese Construction hat er nie veröffentlicht.

Im Jahre 1835 wurde Steinheil, ohne sich darum beworben zu haben, in den bayrischen Staatsdienst gezogen und als ordentlicher Professor der Physik und Mathematik und zugleich als Conservator der mathematisch-physikalischen Sammlungen des Staats angestellt. Vorlesungen an der Universität hielt Steinheil jedoch nur wenige, da er stets überzeugt war, in anderer Weise mehr für die Wissenschaft leisten zu können, als wenn er sich speciell dem Lehrfach widmete. Im gleichen Jahre unternahm er eine wissenschaftliche Reise über Wien, Berlin und Göttingen, welche ihn in nähere Verbindung mit Gauss und Weber brachte. In Göttingen holte er die magnetischen Mess-Instrumente von Gauss ab und hier war es, wo er von letzterem aufgefordert wurde, dem galvanischen Telegraphen, welcher in Göttingen bestand, eine praktischere Gestalt zu geben. Wir werden hierauf zurückkommen. Mit den Gauss'schen Mess-Instrumenten wurden in den Localitäten der Münchener Akademie magnetische Termin-Beobachtungen eingerichtet und mehrere Jahre hindurch fortgesetzt.

Im Winter 1836 unternahm Steinheil eine neue wissenschaftliche Reise nach Altona und nach Paris, um in Altona die Toise von Bessel, welche sich bei Staatsrath v. Schumacher befand, in Paris aber den Meter der Archive zu copiren, um aus beiden Messungen den französischen Normal-Meter auf die Bes-

sel'sche Einheit zurückzuführen. In Paris fand Steinheil vielfache Unterstützung seiner Arbeiten und führte in beständigem Verkehr mit den ersten damaligen Physikern Frankreichs, mit Arago, Dulong, Poisson, Savart, Biot, Gay-Lussac u. a. nicht nur die Copie des Meters in Glas, sondern auch des Kilogramms der Archive in Berg-Krystall aus. Die glückliche Wahl dieser unveränderlichen Stoffe, gegenüber den nicht controllirbaren Aenderungen weit mehr ausgesetzten französischen Platina-Orginal-Massen, erregte Arago's besondere Aufmerksamkeit und veranlasste ihn zu der charakteristischen Aeusserung: „Es scheint, Sie sind nicht nach Paris gekommen, um sich zu belehren, sondern um uns zu unterrichten".

Von Paris zurückgekommen, stellte Steinheil seinen galvanischen Telegraphen her. König Ludwig I. hatte zu diesem Versuche eigens 1000 Gulden anweisen lassen und es entstand im Sommer 1837 zwischen der Akademie in München und der Sternwarte in Bogenhausen der erste galvanische Telegraph, welcher zugleich spricht und schreibt. Die Sprache war gebildet aus 2 verschiedenen Tönen und hervorgerufen durch Anschlagen von abgelenkten Magnetstäben an kleine Glocken. Die Schrift wurde hervorgebracht durch schwarze Punkte, die sich auf bewegten Papierstreifen in zwei übereinander liegenden Linien fixirten. Aus der Combination dieser Punkte oder Töne und ihren Abständen wurde ein Alphabet gebildet (z. B. A tief, hoch tief .·.) gleich für Schrift und Sprache. Das Princip dieses Alphabets hat sich bis auf den heutigen Tag erhalten und ist jetzt über die ganze Erde ausgebreitet. Steinheil beschrieb seinen Telegraphen schon damals im Jahre 1837 in der Augsburger Allgemeinen Zeitung und eben diese Beschreibung veranlasste Morse zur Herstellung seines bekannten Schreibapparats, was er selbst bei einer Tischrede in Paris bei Gelegenheit der ihm gewordenen Nationalbelohnung öffentlich aussprach. Im Herbste 1837 hatte Steinheil den glücklichen Gedanken, die Leitungsfähigkeit des feuchten Erdbodens für galvanische Ströme zu benutzen und die Erde selbst als einen der zwei Leiter für den Telegraphen in Anspruch zu nehmen. Erst hiedurch wurde der Telegraph auf seine einfachste Form gebracht und seine allgemeine Einführung ausserordentlich erleichert. Eingeführt aber wurde er leider nicht zuerst bei uns, wo er doch entstanden war, sondern erst 11 Jahre später im Jahr 1849, nachdem die schöne Erfindung eine Reise durch England und Amerika gemacht hatte und in fremdem Kleide in ihre Heimath zurückkehrte!

Bald zeigten sich auch die nachtheiligen Einflüsse des Blitzes auf die Telegraphen-Apparate und hier war es wieder Steinheil, welcher zuerst zeigte, wie diese Einflüsse durch Blitzplatten unschädlich gemacht werden können.

Mit Absicht haben wir hier Steinheil's Antheil an der Erfindung des Telegraphen etwas ausführlich dargelegt, da seltsamerweise selbst in Steinheil's eigenem Vaterlande dieser Antheil durchaus nicht so allgemein bekannt ist, als man wohl annehmen dürfte.

Im Jahre 1838 stellte Steinheil die ersten galvanischen Uhren her und zwar solche, die durch den galvanischen Strom bewegt werden, als auch solche, bei welchen er nur als Regulator auftritt; er darf somit als Erfinder derselben betrachtet werden. In Folge einer Aufforderung des Magistrats von München construirte Steinheil für die Feuerwacht auf dem Petersthurm daselbst ein Pyroskop, das auch von Feuerwächtern benutzt werden kann, die des Lesens und Schreibens unkundig sind. Auch controlirte er den Dienst der Feuerwächter durch einen kleinen galvanischen Telegraphen zwischen der Feuerwacht, dem Magistratsgebäude und Spritzenhaus, wodurch den Bedrängten schneller als vorher Hülfe zukommt. Längs der Eisenbahn von München nach Nannhofen (halbwegs Augsburg) legte Steinheil einen Control-Telegraphen an, der die Fahrgeschwindigkeit der Züge, ihren Aufenthalt an den Zwischenstationen, sowie die Anwesenheit der Bahnwächter controlirt. Auffallenderweise sind alle diese Erfindungen trotz ihrer Veröffentlichung in eigenen Abhandlungen von der bayrischen Regierung nicht weiter benutzt worden.

Inzwischen bethätigte sich Steinheil auch an der Förderung von hervorragenden Erfindungen Anderer. Das erste Daguerreotyp, das in Deutschland angefertigt wurde, war von ihm. Er stellte die Bedingungen des Gelingens der Galvanoplastik fest und ihm zuerst gelang es runde Figuren in Hohlformen auszuführen. In dieser Zeit beschäftigte er sich auch mit der galvanischen Vergoldung und führte sie in vielen Werkstätten Münchens ein; dann vereinfachte er die Regulirung und Ermittelung des Alkoholgehalts im Weingeiste und die Herstellung Tralles'scher Normalspindeln durch Einführung einer Schubtafel zur Reduction auf Normaltemperatur. Seine Methode, jede Senkspindel mit richtiger Skala zu versehen, ist im Münchener Kunst- u. Gewerbeblatt veröffentlicht. Eine neue Methode genauer Analysen begründete er durch seine Arbeit über quantitative Analyse mittelst physikalischer Beobachtungen. Seine optisch-aräometrische Bier-

probe ist eine Anwendung derselben und lässt an Genauigkeit, wie an Leichtigkeit der Handhabung nichts zu wünschen übrig. Gleichwohl musste Steinheil dieser Bierprobe wegen viele Anfeindungen erdulden; sie sollte nämlich in Bayern obligatorisch eingeführt werden und der bezügliche Entwurf gelangte zur Genehmigung vor die Kammern. Da jedoch in beiden Kammern die Bierbrauer zahlreich vertreten waren, welche sich durch die Steinheil'sche Probe controlirt sahen, so machten sie einstimmig Chorus gegen den Gesetz-Entwurf und einer der ersten Bierbrauer des Landes rief mit Wehmuth in der Kammer: „alle Bierproben wollen wir uns gefallen lassen, nur die Steinheil'sche nicht". In Folge dieser heftigen Opposition fiel denn auch richtig der Entwurf und harrt einer Zeit, da man nicht nur den Produzenten, sondern auch den Consumenten des edlen Gerstensafts Rechte einräumen wird.

Die genauen und unveränderlichen Copieen, welche Steinheil von den französichen Urmassen angefertigt hatte, veranlassten im Jahre 1846 die neapolitanische Regierung dieselben anzukaufen. Zugleich berief sie Steinheil nach Neapel zur Regulirung ihrer Masse und Gewichte, die durch Definition aus den französischen Einheiten zwar gesetzlich festgestellt, aber noch nicht practisch ausgeführt waren. Bei dieser Arbeit fand Steinheil die freundliche Unterstützung von Seiten des Astronomen Peters, jetzt Director der Sternwarte in Hamilton College, Clinton. Gegen Ende des Jahres kehrte Steinheil nach München zurück.

Als im Jahre 1847 der erste galvanische Telegraph mit Morse-Apparat zwischen Hamburg und Cuxhaven hergestellt war, sandte die bayrische Regierung Steinheil auf eine Rundreise nach Deutschland zur Berichterstattung über den Stand der Telegraphie. Allein es war ihm nicht vergönnt, die Früchte seiner reichen Erfahrung in diesem Gebiet seinem engeren Vaterlande Bayern zu gut kommen zu lassen. Man hatte hier vielfach vergessen, selbst angefeindet, was Steinheil in dieser Sphäre geleistet und so folgte er 1849 einem Rufe der österreichischen Regierung nach Wien, wo er zum Sectionsrath und Chef des Telegraphen-Departements im Handels-Ministerium ernannt wurde, und siedelte im Jahre 1850 mit Familie vollständig nach Wien über. Bei Steinheil's Berufung war es die Absicht des damaligen österreich. Handels-Ministers v. Bruck rasch zu einem vollständigen Telegraphenlinien-System über alle Kronländer zu gelangen und das bis dahin in Oesterreich eingeführte unvollkommene Bain'sche System durch ein allgemein angenommenes zu ersetzen. Steinheil ging mit grossem Eifer an diese Arbeit,

bereiste persönlich einen Theil der Kronländer, entwickelte in beständigem Verkehr und Einverständniss mit dem genialen Bruck eine bedeutende administrative und organisatorische Thätigkeit und ehe zwei Jahre verstrichen, war die Aufgabe erfüllt. Oesterreich gab damals die Initiative zu Conferenzen in Dresden und Wien, aus welchen unter Steinheil's thätigster Mitwirkung, der Oesterreich auf denselben vertrat, der deutsch-österreichische Telegraphen-Verein hervorgieng. Aber die Wirksamkeit Steinheil's in dieser Sphäre sollte nicht von langer Dauer sein, denn Bruck schied schon 1851 aus dem Handels-Ministerium und hatte Baumgartner zum Nachfolger, der früher das Bain'sche System in Oesterreich eingeführt hatte. Damit musste Steinheil's Thätigkeit in dieser Sphäre aufhören; man wollte ihn zur Schadloshaltung zum Director der Porzellanfabrik ernennen; er dankte aber höflichst dafür und nahm einen ihm eben erwünscht kommenden Ruf des schweizerischen Bundesraths als Experte bei der Organisation und Herstellung des schweizerischen Telegraphenwesens an. Ende 1851 gieng Steinheil nach Bern und nach 6 Monaten hatte die Schweiz 400 Stunden Telegraphenleitungen mit mehr als 40 Stationen und etwa 80 Postbeamten, die in einem Lehrcurs vollständig eingeübt waren, welchen Steinheil's zweiter Sohn, Adolf, damals erst 19 Jahre alt, mit bestem Erfolge leitete. Da der Schweizer Bundesrath allen grösseren Orten den Vortheil telegraphischer Verbindung zugestand, war Gelegenheit geboten, ein ganzes Netz von Telegraphenlinien anzulegen, wie es damals noch in keinem Lande bestand. Diese Organisation wurde nur möglich durch Einführung der Translatoren, welche Steinheil in Wien erfunden hatte.

Vor seinem Abgang nach Wien hatte Steinheil dem König Max II. von Bayern, der ihn in Folge der unruhigen Jahre 1848 und 1849 etwas aus den Augen verloren hatte und persönlich höchst ungern von München scheiden sah, feierlich versprechen müssen, früher oder später wieder nach Bayern zurückzukehren. Der treffliche König erinnerte ihn selbst durch eigenhändige Briefe an dieses Versprechen; als daher Steinheil seine Missionen, sowohl in Oesterreich als in der Schweiz vollendet hatte, stellte er sich dem Könige wieder zur Disposition. Max II. empfieng ihn mit offenen Armen und schuf ihm denn auch eine Stellung, wie sie Steinheil sich selbst wünschte. Er wurde wieder zum Conservator der mathem.-physik. Sammlungen des Staats, jedoch ohne Professur ernannt und mit Titel und Rang eines Ministerialraths in den bayrischen Staatsdienst aufgenommen. Steinheil hatte sich nunmehr der besonderen Gunst von König Max zu

erfreuen; er musste ihm einen Cyclus von Vorträgen halten, wurde häufig zu Hof und in des Königs Abendcirkel gezogen. Seine freie, fast ganz unabhängige Stellung zog ihm mancherlei kleinliche Anfeindung zu; Steinheil wusste sich aber darüber hinweg zu setzen. Ein besonderer Wunsch von König Max veranlasste Steinheil im Jahre 1854 in München eine optisch-astronomische Werkstätte zu gründen, um durch diese zur Erhaltung des Ruhmes beizutragen, welchen Fraunhofer in dieser Beziehung Bayern erworben hatte. Obgleich schon in einem Alter stehend, in welchem sich viele von angestrengter Thätigkeit zurück zu ziehen pflegen, widmete sich Steinheil mit jugendlichem Eifer seinem jungen Institut und arbeitete vom frühesten Morgen an ohne Unterbrechung. Es gelang ihm denn auch bald demselben Ruf zu verschaffen. Schon die Pariser Welt-Ausstellung von 1855, welche Steinheil als Jury-Mitglied und zugleich als Aussteller seiner optischen Instrumente besuchte, gab Gelegenheit die höhere Vollkommenheit seiner Fernrohre anderen, namentlich den französischen gegenüber thatsächlich nachzuweisen und so das Renomé der Anstalt schnell zu heben. Dieselbe hatte denn auch bald grosse Refractoren nach Upsala, Leipzig, Mannheim und Utrecht zu liefern. Steinheil's Bestreben gieng vorzüglich dahin, das Objectiv zu verbessern und die wesentlichen Bedingungen seiner richtigen Construction festzustellen. Er führte auch die versilberten Teleskopspiegel von Glas ein Jahr früher aus, als sie Léon Foucault dem Institut de France als eigene Erfindung vorlegte. Steinheil's Sphärometer und sein Fühlspiegel setzten ihn in den Stand, den Gläsern genauere Gestalten zu geben, als dies vorher möglich gewesen war. In seiner optischen Anstalt ward Steinheil von deren Gründung an durch seinen oben genannten zweiten Sohn Dr. Adolf Steinheil unterstützt; derselbe widmete sich unter Anleitung seines Vaters speziell den optischen Berechnungen. Im Jahre 1860 trat auch Steinheil's ältester Sohn Eduard in die sich vergrössernde Anstalt ein. Von 1862 an zog sich Vater Steinheil mehr und mehr von der Werkstätte zurück und ertheilte seinen beiden Söhnen Procura. Im Jahre 1865 gieng die Anstalt in den Besitz der beiden Brüder über, die sich in ihren Eigenschaften in glücklicher Weise ergänzen, indem Eduard Steinheil den technischen und kaufmännischen Theil besorgt, während Dr. Adolf Steinheil den wissenschaftlichen Theil übernommen hat. Ganz im Geiste des Gründers fortgeführt, wurde die Anstalt auf der Pariser Welt-Ausstellung im Jahre 1867 und auf der Hamburger photographischen Ausstellung vom Jahre 1868 durch goldene Medaillen ausgezeichnet.

Trotz seines Zurückziehens von der Werkstätte war Steinheil's Thätigkeit keineswegs beendigt. Mit dem jugendlichen Eifer, womit er alle Dinge anzugreifen pflegte, welche sein Interesse erregten, warf er sich nunmehr auf eine Liebhaberei seiner frühen Jugend, die Landschaftsmalerei. In wenigen Jahren lieferte er eine unglaublich grosse Zahl von Landschaftsbildern, theils nach der Natur, theils nach tüchtigen Meistern. Daneben studirte er — ein Beweis seiner Vielseitigkeit — mit Eifer strenge Kirchenmusik und componirte auch einiges.

Auf Antrag der bayrischen Akademie der Wissenschaften und mit Genehmigung der beiden Kammern erhielt Steinheil 1862 für seine hervorragenden Verdienste um die Entwickelung der Telegraphie eine lebenslängliche Rente. Die Akademie hatte eine Nationalbelohnung beantragt; eine solche konnte jedoch von der bayrischen Regierung wegen des damaligen traurigen Verhältnisses der deutschen Staaten zu einander nicht mit Aussicht auf Erfolg vor den sel. Bundestag gebracht werden.

Im Jahre 1866 wies Steinheil der deutschen Mass- und Gewichts-Commission in der Augsburger Allgemeinen Zeitung nach, dass die Berliner Etalons von Meter und Kilogramm die von der Wissenschaft verlangte Unzweideutigkeit und Unveränderlichkeit nicht besitzen. Eine Folge davon war, dass die k. k. Akademie in Wien mit Zustimmung des Handelsministers von Wüllerstorf und durch Vermittelung von Prof. Schrötter die Steinheilschen Etalons, welche von den Mängeln der Berliner frei sind, für Oesterreich ankaufte. Sie sollen bei Einführung des metrischen Systems in Oesterreich als Normal-Etalons dienen. Steinheil hat in den Denkschriften der Wiener Akademie (Jahrg. 1867) diese Copieen und die Mittel zu ihrer Vervielfältigung beschrieben *).

Noch bis unmittelbar vor seiner letzten Krankheit war Steinheil auch in wissenschaftlicher Beziehung thätig. Er construirte in den letzten Jahren ein neues, höchst einfaches Chronoskop, einen Längen-Comparator mit Fühlspiegel und einen neuen Prismenkreis mit Objectiv-Prisma. Im Jahre 1868 wurde er zum Mitglied der europäischen Gradmessungs-Commission ernannt, und diese Ernennung veranlasste seine letzte Arbeit. Er unternahm und vollendete dieselbe 1870 mit Herrn Generallieutenant von Bayer, dem Präsidenten des Centralbureaus der genannten

*) Auch in Berlin wurde man auf diese Berichtigung aufmerksam und die Berliner Akademie wählte Steinheil zu ihrem Mitglied.

Gradmessungs-Commission, zu dem er in ein sehr freundliches Verhältniss trat, und unter fernerer Mitwirkung von Prof. Ernst Voit in München. Sie betraf die wissenschaftliche Feststellung der Längenmass-Einheit, sowie eine ganz genaue Basismessung auf Eisenbahnen mittelst eines eigens hiezu construirten Messrads.

Ende August 1870 traf Steinheil das Unglück fast plötzlich zu erblinden — ein doppelt schwerer Schicksalsschlag für einen Mann von seiner Thätigkeit; aber die seltene Energie, welche ihn nie verliess, zeigte sich auch hier; wenige Tage genügten für ihn sich in die neue schwere Lage zu finden, er gedachte sich fernerhin mit Musik und Bossiren zu beschäftigen und keine Klage kam über seine Lippen. Das gütige Schicksal ersparte ihm jedoch einen traurigen Lebensabend im Dunkel der Nacht; es traten bald schlagflussähnliche Erscheinungen auf; am 2. September musste er sich niederlegen, um nicht wieder aufzustehen. Das Bewusstsein verschwand bald völlig; nur in einzelnen lichten Momenten sprach er wenige Worte; später trat heftiges Herzklopfen, Fieberhitze und kurzer Athem ein und schon am frühen Morgen des 14. September erlag er einer, wie es scheint, seltenen Krankheit, über welche selbst die Section keine genügenden Anhaltspunkte verschaffte.

In seinem Privatleben war Steinheil ein Mann von strengen aber durch und durch rechtlichen Grundsätzen. Er hatte den Muth offen aufzutreten, wenn es galt Unwahrheit und Betrug zu entlarven und liess sich nicht davon abhalten, wenn er sich auch voraussichtlich dadurch Feinde zuzog. Von seiner Umgebung pflegte er viel zu verlangen, bot aber doppelten Ersatz in verschiedenster Beziehung.

Nach Art genialer Leute setzte er sich gerne über allerlei Gewohnheiten und Convenienzen der Alltagsmenschen hinweg; aber alle, welche ihn näher kannten, gewöhnten sich bald an seine Auffassung der Dinge. Nach Ehren geizte er nie und that nie den mindesten Schritt zur Erlangung eines Ordens, doch wurden ihm deren 4 zu Theil, ein dänischer und 3 bayrische, von welchen ihm der Civilverdienstorden in seinen letzten Lebensjahren den persönlichen Adel brachte. Von politischen und Gemeinde-Angelegenheiten pflegte er sich ferne zu halten; seine Zeit war von tausend anderen Dingen vollauf in Anspruch genommen. Dass ein Mann von seiner Klarheit in religiösen Dingen sehr frei dachte, bedarf kaum der Erwähnung. Geschrieben hat er eine grosse Anzahl wissenschaftlicher Abhandlungen, die im Jahrgang 1867 des Almanachs der bayrischen Akademie der Wissenschaften

verzeichnet stehen. Dickleibige Bücher schrieb er nie; er war der Meinung, wahre Forscher sollten nur Abhandlungen schreiben und die Verfassung von Lehrbüchern anderen überlassen. In einem besonders reichen Leben, das er sich wie selten einer nach seinem Willen zu gestalten wusste, war es ihm vergönnt, auf vielen Gebieten Hervorragendes zu leisten, und er hätte an seinem Lebensabend wie Newton ausrufen dürfen: Gottlob, ich habe nicht umsonst gelebt! Möge die Erde ihm leicht sein!

Am 1. November 1870 starb in Erfurt im 83. Lebensjahre der Königliche Professor

Dr. Ephraim Salomon Unger,

bekannter Verfasser vieler geschätzer mathematischer Schriften.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma 1870. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCVI. S. 1.).

Tomo III. Marzo 1870. Les Professeurs de Mathématiques et de Physique générale au Collége de France. Par M. L. AM. Sédillot, Secrétaire du même Collége. Quatrième Période 1774—1869.

Tomo III. Aprile 1870. Les Professeurs de Mathématiques etc. (ganz eben so wie vorher). Quatrième Période 1774 —1869. Fin.

In diesen beiden Heften liefert Herr Sédillot die neuere Geschichte des berühmten Collége de France von 1774—1869. War schon die in früheren Heften des Bullettino enthaltene ältere Geschichte im höchsten Grade wichtig und interessant, so gilt dies um so mehr von der jetzt vorliegenden neueren und neuesten Geschichte, weil die Zeit, welche dieselbe betrifft, uns neueren Mathematikern näher liegt, und wir — ausser mit der allgemeinen Geschichte des so hoch berühmten Collége — mit

den Lebensverhältnissen und wissenschaftlichen Verdiensten vieler neueren französischen Mathematiker bekannt werden, in denen wir Koryphäen der Wissenschaft verehren; zunächst der unterzeichnete Herausgeber bekennt von sich mit besonderem Danke gegen Herrn Sédillot, dass er diese Geschichte mit dem grössten Interesse gelesen hat, und den Lesern des Archiv's ein gleiches Interesse jedenfalls mit vollkommenster Ueberzeugung glaubt versprechen zu dürfen. Wer sollte sich denn nicht gern näher bekannt machen mit Männern wie: I. **Astronomie 1769 —1861; Mécanique céleste, 1861.** Joseph-Jérome le Français de Lalande aus Bourg-en-Bresse (11 Juillet 1732 — 4 Avril 1807.). — Jean-Baptiste Delambre aus Amiens (19 Septembre 1749 — 19 Août 1822.). — Jacques-Philippe-Marie Binet aus Rennes (2 Février 1786 — 12 Mai 1856.). — Joseph Alfred Serret, geboren in Paris am 30. August 1819. — II. **Chaire de Mathématiques.** Antoine Rémi Mauduit aus Paris (17 Janvier 1731 — 6 Mars 1815.). — Silvestre-François Lacroix aus Paris. (1765 — — 25 Mai 1843.). — Guillaume-Brutus-Jcilius-Timoléon Comte Libri-Carucci della Sommaia, geboren in Florenz am 2. Januar 1803. — Augustin Cauchy (auf dessen ausführliche Lebensbeschreibung in früheren Heften des Bullettino, durch deren Mittheilung, wie schon damals von uns hervorgehoben worden ist, Herr B. Boncompagni sich ein sehr grosses Verdienst erworben hat, wird hier mit Recht im Allgemeinen verwiesen, besonders aber gedacht seines Verhältnisses zu dem Collége de France, an welchem er J.-B. Biot ersetzte). — Joseph Liouville aus Saint Omer, geboren am 24. März 1809. — III. **Chaire de Physique générale et mathématique.** Jacques-Antoine-Joseph Cousin aus Paris (29 Janvier 1739 — 29 Décembre 1800.). — Jéan Baptiste Biot aus Paris (21 Avril 1774 — 3 Février 1862.). — Joseph-Louis-François Bertrand, geboren zu Paris im Jahre 1822. — IV. **Chaire de Physique générale et expérimentale.** Louis Lefèvre-Gineau aus dem Dorfe Anthe in den Ardennen (27 Mars 1751 — 3 Février 1829.). — André-Marie Ampère aus Lyon (22 Janvier 1775 — 10 Juin 1836). — Felix Savart aus Mézières (Ardennen) (30 Juin 1791 — 16 Mars 1841.). — Henri-Victor Regnault, geboren in Aix-la-Chapelle am 21. Julius 1810.

Alle diese trefflichen Männer, in denen sehr viele der neueren Mathematiker und Physiker aller Länder mehr oder weniger ihre Lehrer verehren, bilden Glanzpunkte in der Geschichte der exacten Wissen-

schaften, und werden hier in oft sehr interessanter Weise charakterisirt, so dass wir nochmals recht sehr auf diese beiden neuesten Hefte des trefflichen Bullettino aufmerksam machen.

Das April-Heft enthält ausserdem noch: Annunzi di recenti Pubblicazioni.

Tomo III. Maggio 1870. Sulla vita e le opere di Giovanni Battista Amici per F. Palermo. p. 187. Herr F. Palermo liefert hier in dankenswerthester Weise eine sehr ausführliche und eingehende Lebensbeschreibung — natürlich mit der weitesten Berücksichtigung seiner grossen und vielfachen wissenschaftlichen Verdienste — des am 25. März 1786 in Modena gebornen grossen Optikers u. s. w. u. s. w., von der jedoch bis jetzt uns nur der erste Theil vorliegt. Dessenungeachtet müssen wir dieselbe allen unseren Lesern schon jetzt als im höchsten Grade interessant und lehrreich zu sorgfältigster Berücksichtigung dringend empfehlen. G.

Zu unseren Anzeigen (Literarischer Bericht Nr. CCV. S. 2. und Nr. CCVI. S. 2.) der wichtigen und interessanten Mittheilungen über Conte Giulio Carlo di Fagnano in dem Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche bemerken wir — was damals die Beschränktheit des Raumes nicht erlaubte — jetzt nachträglich, dass Herr B. Boncompagni sich dadurch ein ganz besonderes Verdienst erworben hat, dass er (Bullettino etc. Gennaio 1870. S. 30. Z. 8—26; S. 31—35; S. 36. Z. 15—21 und im besonderen Abdruck der betreffenden Abhandlung *) S. 6. Z. 8—26; S. 7—11; S. 12. Z. 15—21) überzeugend nachgewiesen hat:

1. dass Giulio Carlo Conte di Fagnano am 26. September 1682 geboren ist, und nicht am 6. December 1682, wie Conte Giuseppe Mamiani della Rovere und andere Biographen angeben;

2. dass derselbe am 18. Mai 1766 gestorben ist, und nicht am 26. September 1766, wie derselbe C. Mamiani und andere Biographen irrig angeben;

3. dass sein Sohn Giovanni Francesco Fagnani, der gleichfalls ein ausgezeichneter Geometer war (m. s. Bullettino

---

*) S. Literar. Ber. Nr. CCVI S. 2.

etc. Gennaio 1870. S. 35—36) am 31. Januar 1715 geboren und am 14. Mai 1797 gestorben ist, was sich weder in einem biographischen Wörterbuche, noch in der Histoire des Mathématiques von Montucla angegeben findet.

Auch sagt Herr B. Boncompagni a. a. O. S. 36.: „Carlo Denina, celebre scrittore, nato in Revello nel giorno 28 Febbraio del 1731, e morte nel giorno 21 di novembre del 1813, chiamò erroneamente Giulio Carlo Conte di Fagnano „chanoine de Sinigaglia“ confondendolo con Giovanni Francesco suo figliuolo. Questo errore trovasi anche nell' opera de Sig. Cesare Cantù intitolato „Storia degl' Italiani“ leggendosi in ciascuna di tale opera: „Jl conte Giulio Fagnani, canonico di Sinigaglia, tolse pel primo a considerare le differenziali non riducibili delle sezioni coniche, e sta ancora fra i migliori, se non fra i più conosciuti analitici“.

In Literar. Ber. Nr. CCV. S. 3. Z. 1. muss 1752 statt 1792 stehen.

Herr B. Boncompagni verdient für diese historischen Berichtigungen über einen so bedeutenden Mathematiker wie Giulio Carlo Conte di Fagnano gewiss sehr grossen Dank; eben so für seine Bemerkungen über Giovanni Francesco seinen Sohn.

Geodäsie.

Das Bayrische Präcisions-Nivellement. Von Carl Max Bauernfeind. (Mit einer Tafel). Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W. II. Cl. X. Bd. III. Abth. München 1870. Verlag der k. Akademie, in Commission bei G. Franz. 4°.

Dieses Nivellement ist zunächst veranlasst worden durch die erste allgemeine Conferenz der mit einer Mitteleuropäischen Gradmessung betrauten Regierungs-Commissäre, welche in Berlin vom 15. bis 22. October 1864 stattfand, und in welcher es als wichtig erkannt wurde, dass in allen bei dieser Gradmessung betheiligten Ländern neben den trigonometrischen Höhenbestimmungen Nivellements erster Ordnung ausgeführt werden, welche, den Eisenbahnen und Landstrassen folgend, die Meeresspiegel an den Küsten Europa's zu verbinden, und in allen Ländern unseres Continents eine grosse Anzahl von dauerhaften genau einnivellirten Marken

als Grundlagen für Höhenmessungen zweiter Ordnung zu schaffen bestimmt sind.

Dieser Beschluss wurde von der im Jahre 1867 ebenfalls zu Berlin abgehaltenen zweiten allgemeinen Conferenz wiederholt bestätigt und hierbei das geometrische Nivellement mit Anwendung der bekannten Methode des „Nivellirens aus der Mitte der Station" namentlich zur Verbindung der verschiedenen Meere für unentbehrlich erklärt.

Der Thätigkeit und grossen Umsicht des Herrn Verfassers dieser ausgezeichneten Schrift ist es nun zu verdanken, dass wohl Bayern das erste Land ist, in welchem ein solches grosses Nivellement — für das die Königl. Bayerische Staatsregierung die Summe von 10000 Gulden bewilligte — vollständig durchgeführt worden ist, wenn auch in anderen Ländern schon weiter fortgeschrittene Anfänge solcher grossen Messungen gemacht sein mögen, worüber nähere Kenntniss uns für jetzt abgeht. Herr Bauernfeind giebt in der vorliegenden Schrift einen überaus interessanten und lehrreichen Bericht über diese in den Jahren 1868 und 1869 ausgeführten bayerischen Arbeiten, den wir aber besonders auch deshalb für sehr wichtig halten, und namentlich aus dem Grunde hier zu ausführlicherer Anzeige bringen, weil er nach unserer Meinung zugleich die beste allgemeine Anleitung enthält, wie solche grosse Nivellirungs-Arbeiten in der zweckentsprechendsten, genauesten und zeitersparendsten Weise auszuführen sind, eine allgemeine Anleitung, welche man in so ausgezeichneter und so vollständiger Weise bisher noch nicht besitzen dürfte. Herr Baurnfeind unterwirft daher einer sehr vollständigen, lehrreichen und überaus umsichtigen Besprechung nach und nach alle in Betracht kommenden Punkte unter folgenden Ueberschriften: Uebersicht der Nivellirungs-Arbeiten (S. 5. — S. 10.). — Der Nivellir-Apparat (S. 11. — S. 14.). — Das Nivellir-Verfahren (S. 14. — S. 24.). — Die Constanten der Instrumente. 1. Abstand der äusseren Fäden. 2. Winkelwerthe eines Theils der Libellenscale. 3. Ungleichheit der Ringdurchmesser. 4. Tafeln der Entfernungen. 5. Tafeln der Höhencorrectionen. (S. 24. — S. 32.). — Untersuchung der Ziellatten. 1. Breiten der weissen und schwarzen Felder. 2. Prüfung der Meterlänge. (S. 32. — S. 38.). — Die Berechnung der Aufnahmen. (S. 39. — S. 46.).

Hieran schliesst sich in Betreff der Aufnahme selbst auf S. 46. — S. 110. ein sehr ausführliches und vollständiges Verzeichniss der Fixpunkte in 611 Nummern, welches mit der

Linie Neuenmarkt-Eger-Bayreuth-Neuenmarkt beginnt und mit der Linie Lindau-Nonnenhorn-Kressbronn schliesst, worüber man das Weitere in dem Verzeichniss selbst nachsehen muss.

Die Arbeiten im Felde wurden von den Herren Ingenieuren August Vogler aus Wiesbaden und Ferdinand Löwe aus Schweinfurt ausgeführt, unter Leitung und Verantwortlichkeit des Herrn Verfassers.

Wir empfehlen nochmals dieses grosse Bayerische Nivellement als ein Muster für andere ähnliche Arbeiten, und die Schrift des Herrn Verfassers als die beste Anleitung zur Ausführung derselben, indem wir zugleich im Interesse der Wissenschaft sehr wünschen, dass auch recht viele andere Länder sich in gleicher Vollständigkeit ausgeführter ähnlicher Nivellements baldigst erfreuen mögen.

Physik.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von C. Jelinek und J. Hann. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCVI. S. 7.).

Band V. Nr. 14. Ueber die Wärmestrahlung des Mondes. Nach Volpicelli, Marié Davy und Baille in den Comptes Rendus der Pariser Akademie. S. 353. — Dove's Untersuchungen über die Gesetze anomaler Wärmezustände auf der Erdoberfläche. Besprochen von Dr. J. Hann. (Schluss). S. 359.

Band V. Nr. 15. Zur orographischen Meteorologie. V. Ueber die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen auf dem St. Theodul-Pass, in 10260′ Höhe. Von A. Mühry. S. 385. — Bemerkungen über die Wärmeänderung mit der geographischen Breite in Russland. Von Dr. J. Hann. (Schluss). S. 302.

Band V. Nr. 16. Zur orographischen Meteorologie. Ueber die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen auf dem St. Theodul-Pass, in 10260′ Höhe. Von A. Mühry. (Schluss). S. 417. — Gründung eines meteorologischeu Central-Instituts für die Länder der ungarischen Krone. S. 421. — Das Organisations-Statut dieser ungarischen meteorologischen Reichsanstalt ist hier

von dessen neu ernanntem Director, Herrn Dr. Guido Schenzl, mitgetheilt; der Sitz des Instituts ist: Ofen-Pest.

Band V. Nr. 17. Beiträge zur Klimatologie von Südamerika. Von Dr. J. Hann. S. 433. — Der tägliche Gang der Witterungsverhältnisse zu Catharinenburg, Bogoslovsk und Slatoust. Von Dr. Berger. S. 445.

Band V. Nr. 18. Ueber den Ortswechsel der meteorologischen Pole. Von Dr. A. v. Wojeikoff. S. 465.

Band V. Nr. 19. Theorie der Berg- und Thalwinde. Von Dr. Berger in Frankfurt a. M. S. 481. — Zur Frage über die Temperaturzunahme mit der Höhe in den untersten Luftschichten. Von Karl Fritsch. S. 490. — Ueber das Regensystem Algeriens, nach den Beobachtungen der Strassen- und Brücken-Verwaltung. Von V. Raulin, Professor an der Facultät zu Bordeaux. S. 495.

Theil V. Nr. 20. Ueber die Erscheinung der Wärmezunahme mit der Höhe in den Wintermonaten. Von Dr. J. Hann. S. 513.

Auch diese Nummern enthalten wieder eine ungemein grosse Menge der interessantesten und wichtigsten kleineren Mittheilungen und Literaturberichte.

Vermischte Schriften.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr CCV. S. 12.).

Anno VIII. Luglio e Agosto. Sopra un' estensione di proprietà spettanti a curve algebriche piane di un ordine qualunque, alle superficie algebriche di qualunque grado; per O. Tognoli. p. 193. — Nota sul triangolo coniugato di due coniche; per P. Cassani. p. 200. — Soluzione della quistione N°. 178 dei Nouvelles Annales; per P. Cassani. p. 202. — Dimostrazione dei Teoremi proposti da V. N. Bitonti; per D. Orlando. p. 204. — Memoria sull' attrazione degli Sferoidi; per R. del Grosso. p. 206. — Teorema a dimostrare; per V. N. Bitonti. p. 221. —

Sopra un' applicazione dei principii di omologia alla Prospettiva; per D. Regis. p. 222. — Sul numero delle rodice reali che quó avere l'equazione $x^m - px + q = 0$; per D. Regis. p. 226. — Quistioni a risolvere, tratte dall' Educational Times. p. 228. — Sopra un complesso del 2^0. grado. — Generazione geometrica dei complessi del 1^0. grado; per F. Aschieri. p. 229. — Dimostrare del Teorema I. Vol. VIII. Giornale di Napoli, pag. 96; per G. Yung. p. 235. — Nota su' punti, piani e rette in coordinate omogenee; per E. d'Ovidio. p. 241.

Anno VIII. Settembre e Ottobre 1870. Nota su' punti, piani e rette in coordinate omogenee; per E. d'Ovidio. p. 257. — Considerazioni intorno a taluni determinanti particolari; per V. Eugenio. p. 285. — Annunzio bibliografico. p. 296. — Dimostrazione delle quistioni 2, 3 e 4. (Vedi pag. 228.); per V. N. Bitonti. p. 291. — Sopra due teoremi del signor Neumann; per E. Padova. p. 296. — Esposizione della nuova Geometria di Plücker; per G. Janni. p. 302.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, rédigé par M. G. Darboux, avec la collaboration de MM. Hoüel et Loewy, sous la direction de la commission des hautes études. Paris. Gauthier-Villars, 1870. 8°.

Seit Januar 1870 erscheint regelmässig in monatlichen Heften dieses neue kritische Journal unter der Redaction der Herren Darboux, Hoüel und Loewy, und unter der Direction der Commission der hohen Studien. Das Comité de Rédaction bilden die Herren

Chasles . . . . Président
Bertrand . . . . . .
Delaunay . . . . . .
Puiseux . . . . . .
Serret . . . . } Membres du Comité.

Die Namen aller dieser bei der Herausgabe betheiligten Herren bürgen für die Trefflichkeit des Inhalts, wie wir dieselbe auch überall gefunden und mehrere ausführliche Artikel mit besonderem Interesse gelesen haben. Wir können natürlich bei einem solchen fast*) ganz kritischen und bibliographischen Journal auf eine

*) Zuweilen finden sich auch streng wissenschaftliche Aufsätze, wie z. B. in dem Heft vom Januar 1870. S. 33. der Aufsatz: „Des relations analytiques entre six points situés sur une conique. Par M. Hesse. Traduit de l'allemand (S. Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie von O. Hesse. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1866.).

Angabe des Inhalts der einzelnen Hefte nicht eingehen, heben aber ausdrücklich hervor, dass durchaus nicht bloss die französische mathematische u. s. w. Literatur Berücksichtigung gefunden hat, sondern in ganz gleichem Maasse und gleich sorgfältiger Berücksichtigung namentlich auch die deutsche und italienische. Wir glauben daher, dass diese neue Zeitschrift in jeder Beziehung sehr verdient, unseren Lesern zur sorgfältigsten Beachtung empfohlen zu werden, und wünschen namentlich sehr, dass ihrem regelmässigen Erscheinen nichts hindernd entgegen treten möge, und die Herren Herausgeber immer ruhig in dieser Sphäre wirken können.

Berichtigung.

Im Literarischen Berichte Nr. CCV. S. 14. Z. 11. muss es statt „Jahrgang 1869. Juni — December" heissen: „Jahrgang 1868. Juli — December".

Literarischer Bericht
CCVIII.

‹eschichte der Mathematik und Physik.

‹lius Plücker, Professor der Mathematik und ‹k an der Rhein. Friedrich-Wilhelms-Universität ‹nn. Dr. Ad. Dronke. Bonn 1871. 8°.

‹ir empfehlen diese Schrift zur Beachtung. Dieselbe ist ‹rme geschrieben, und würde noch einen besseren Eindruck ‹, wenn sie sich weniger in die Mittheilung zum Theil sehr ‹icklicher persönlicher und amtlicher Verhältnisse ver‹tte, die für die Leser gar kein Interesse haben und nach ‹r Meinung nicht vor die Oeffentlichkeit gehören.

G.

‹e Geometrie und die Geometer vor Euklides. Ein ‹rischer Versuch von C. A. Bretschneider, Pro‹r am Gymnasium zu Gotha u. s. w. Leipzig 1870. 8°.

‹r Herr Verfaser hat schon in seinem im Literar. Ber. ‹XXXXVII. S. 3 angezeigten Programm (1869) des Herzogl. ‹siums zu Gotha einige Beiträge zur Geschichte der Griechi‹Geometrie geliefert. Wenn es nun überhaupt sehr erfreu‹, dass in neuester Zeit — besonders in Italien und Deutsch‹- Forschungen über die Geschichte der Mathematik wieder ‹er und Erfolg aufgenommen worden sind: so begrüssen wir ‹lich auch die vorliegende Schrift mit besonderer Freude. ‹Jeder weiss wohl, in welches mystische Dunkel bisher die ‹chte der Geometrie vor Euklides gehüllt gewesen ist, über ‹man kaum etwas Weiteres wusste, als dass die Anfänge ‹ometrie in Aegypten zu suchen seien, veranlasst durch die

wegen der jährlichen Ueberschwemmungen des Nils oft wieder nöthig gewordene neue Vertheilung der Ländereien; überhaupt wusste man nur etwa Das, was Montucla in seiner Histoire des Mathématiques, Paris 1758—1799 (im Ganzen vier Voll.) über diesen Gegenstand beibringt, abgesehen von Heilbronners abschreckend trockenen sogenannten Historia matheseos universae a mundo condito ad seculum p. Chr. n. XVI. Lipsiae, 1742. 4. Der Herr Verfasser verdient daher unzweifelhaft den grössten Dank und ganz besondere Anerkennung, dass er seine historischen Untersuchungen — unterstützt, wie man auf jeder Seite sieht, durch eine sehr gründliche Kenntniss der griechischen Sprache und des griechischen Alterthums überhaupt — gerade dieser vor-euklidischen Zeit gewidmet hat. Die Schrift beruhet unzweifelhaft auf vieljährigem überaus sorgfältigen und ausgedehnten Quellenstudium, wobei der Herr Verfasser für die Bedürfnisse seiner Leser sehr zweckmässig und dankenswerth dadurch gesorgt hat, dass er die als Beweismittel gebrauchten Stellen der benutzten Autoren vollständig in der Ursprache und zugleich in überall daneben gestellten sehr treuen und genauen deutschen Uebersetzungen mitgetheilt hat. Im Allgemeinen ist überhaupt die Schrift so gehalten, dass man für ihren der Natur der Sache nach für Manchen etwas trockenen Inhalt durch eine das Interesse lebhaft in Anspruch nehmende Darstellung reichlich entschädigt wird, und dem Herrn Verfasser gewiss gern bis an das Ende derselben ohne Unterbrechung folgen wird. Wir halten daher diese Schrift für einen in jeder Beziehung überaus werthvollen Beitrag zur Geschichte der Geometrie, und können nur wünschen, dass der Herr Verfasser den betretenen Weg auch fernerhin noch recht lange fortsetzen möge. Weiter in's Einzelne einzugehen, gestatten diese Literarischen Berichte bei einer solchen auf jeder Seite einzelne Resultate zu Tage fördernden Schrift am Wenigsten, und wir müssen uns daher mit der folgenden Angabe des Hauptinhalts derselben begnügen, woraus jeder Leser sich selbst ein hinreichendes Urtheil zu bilden im Stande sein wird.

Nach einer Einleitung S. 1—S. 4 über Zweck und Tendenz der Schrift im Allgemeinen folgen nach einander: **Erster Abschnitt.** Die Geometrie der Aegypter. S. 4—S. 22. — **Zweiter Abschnitt.** Der Uebergang Aegyptischer Mathematik an die Griechen. S. 22—S. 35. — **Dritter Abschnitt.** Thales und die Geometer der Jonischen Schule. S. 35—S. 67. — **Vierter Abschnitt.** Pythagoras und seine unmittelbaren Schüler. S. 67—S. 92. —

Fünfter Abschnitt. Die Geometer von Pythagoras bis auf Platon. S. 92—S. 136. — **Sechster Abschnitt.** Die Geometer von Platon bis Euklides. S. 137—S. 174. — **Anhang.** Das Zeitalter und die Leistungen einiger Geometer der Alexandrinischen Schule. S. 175—S. 184.

Illustrazioni su tre distinti manoscritti del Celebre Galvani. Memoria del Prof. Commend. Silvestro Gherardi preceduta da un suo Ragguaglio sopra altri autografi Galvaniani pur novellamente trovati. Bologna. Tipi Gamberini e Parmeggiani 1868. 25 pp. 4°. — Di due preziosi MSS. del Galvani sulla Torpedine. Relazione del Prof. Commend. Silvestro Gherardi. Bologna. Tipi Gamberini e Parmeggiani 1869. 54 pp. 4°. — Ragguaglio di un altro manoscritto inedito del Celebre Galvani. Memoria del Prof. Comm. Silvestro Gherardi, membro pensionario da quarant' anni dell' Accademia delle Scienze di Bologna, Preside del R°. Istituto Tecnico della Provincia di Firenze. (Letta nella Sessione 12 maggio 1870). Bologna. Tipi Gamberini e Parmeggiani 1871. 29 pp. 4°.

Der Hr. Verf. vorliegender 3 Abhandlungen, rühmlichst bekannt durch seine Einleitung in die Gesammtausgabe der Schriften Galvani's, welche die Accademia di Bologna veranstaltet hat, liefert in denselben theils durch Mittheilungen über neu von ihm aufgefundene Handschriften des Entdeckers der Contactelectricität, theils durch Abdruck derselben wichtige Nachträge zu der genannten schönen Ausgabe. Wie jene sind dieselben durch die Akademie des Bologneser Instituts veröffentlicht. Die erste Abhandlung gibt zunächst eine Beschreibung von 10 handschriftlichen Heften von Galvani's eigener Hand, enthaltend Experimente über das Electrophor, die Leidener Flasche, die Franklinsche Tafel und die Einwirkung der Electricität auf den Körper. Sie stammen aus den Jahren 1781—1786, also noch aus der Zeit vor Erfindung des wahren Galvanismus. Die in dem zweiten Theile der Abhandlung theilweise abgedruckten drei Autographe Galvani's bezeugen unzweideutig, dass die bekannte Annahme, als sei die Frau Galvani's die eigentliche Erfinderin des Galvanismus, nicht in der Wahrheit begründet ist. Von ihr singt z. B. Tongetti:

„Quella donna gentil . . . .
. . . .
— Quella non fu, che novo ardor vitale
In rana ignuda a disvelar pur giunse
Quand' una, ed altra man con vanto eguale
Il conduttor metallo, e i nervi punse?
— Nè a te, Signor, questa fedel consorte
Tacque l'ignoto arcan, per cui tuo nome
Oltre l'italo suolo altero vassi."

Die zweite Abhandlung liefert den Abdruck der lateinischen Abhandlung, welche Galvani vor der Akademie von Bologna, über den Zitteral gehalten, und des Tagesbuches über die Experimente die er über und mit demselben angestellt hat; eingeleitet wird der Abdruck durch eine Darlegung des Verfassers über den Inhalt und eine genaue Beschreibung der Manuscripte. — Die dritte Abhandlung endlich gibt die Beschreibung und Erläuterung, sowie den Abdruck, einer bis dahin vergeblich gesuchten Abhandlung Galvani's, betitelt: „Dissertazione latina sopra l'azione delle Mefiti nel Corpo animale", welche der Verfasser aufgefunden, für sich erstanden und der Akademie zu Bologna zum Geschenk gemacht hat. Alle Physiker, welche sich für die Geschichte ihrer Wissenschaft interessieren, werden mit grossem Vergnügen von diesen Schriften des Herrn Prof. Gherardi Kenntniss nehmen und nicht ohne Staunen manche Idee, die für ganz neu gehalten wird, schon in den Tagebüchern Galvani's entweder experimental nachgewiesen oder als Hypothese ausgesprochen finden. C.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma 1870. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCVII. S. 12.).

Tomo III. Giugno 1870. Sulla vita e le opere di Giovanni Battista Amici per F. Palermo (Fine). p. 227. Schluss des trefflichen Aufsatzes über das Leben und die Werke des grossen italienischen Physikers u. s. w. u. s. w. G. B. Amici im Maihefte (S. Literar. Ber. a. a. O. S. 14) der vorliegenden ausgezeichneten, die Geschichte der Mathematik und Physik mehr als irgend ein früheres dieser Seite der beiden genannten Wissenschaften gewidmetes Werk fördernden Zeitschrift, welchen schönen Aufsatz — durch dessen Publication sich Herr F. Palermo ein grosses Verdienst erworben hat — Jeder mit dem grössten Interesse lesen wird, und der der sorgfältigsten Beachtung dringend empfohlen werden muss. — Annunzi di recenti pubblicazioni. p. 249.

Tomo III. Luglio 1870. Intorno a tre lettere di Galileo Galilei tratte dall' Archivio del Gonzaga. Prof. Gilberto Govi. p. 267 und Lettere di Galileo. p. 279. Diese drei in dem letzteren Aufsatze mitgetheilten Briefe Galilei's sind von den Herren Proff. Willelmo Braghirolli und Gilberto Govi in dem Archivio dei Gonzaga in Mantua aufgefunden, und von dem Letzteren in dem ersteren der beiden vorher genannten Aufsätze mitgetheilt und mit sehr gelehrten historischen und literarischen Bemerkungen begleitet worden, so dass wir wegen der grossen Wichtigkeit dieser historischen Documente unsere Leser recht dringend auf diese Untersuchungen des Herrn Prof. G. Govi aufmerksam machen müssen. — Recherches historiques sur l'invention du niveau à bulle d'air. Par Gilbert Govi, Professeur de Physique à l'Université de Turin. p. 282. Unseren Lesern wird aus unserer Anzeige des Tomo II. Luglio 1869 des Bullettino (m. s. Literar. Ber. Nr. CCIII. S. 1) noch der Aufsatz des Herrn Prof. Wolf in Zürich über den Erfinder des Niveau à bulle d'air erinnerlich sein, nach welchem diese Erfindung ein gewisser Chapotot, mécanicien à Paris, um das Jahr 1666 gemacht haben soll. Gegen diesen Aufsatz des Herrn Wolf ist der vorliegende, auf überaus sorgfältigen und mühseligen historischen und literarischen Nachforschungen beruhende Aufsatz des Herrn Prof. Govi in Turin gerichtet, welche ein für die ganze praktische Mathematik so wichtiges Instrument wie das Niveau à bulle d'air wohl verdiente. Wir machen recht dringend auf diese in vielen Beziehungen höchst interessanten und wichtigen Untersuchungen aufmerksam, müssen uns aber hier begnügen, das Resultat derselben in aller Kürze anzugeben. Auf pag. 293 sagt Herr Novi: „Melchisédec Thévenot a donc bien été en 1661 l'inventeur du Niveau à bulle d'air, et la Note de Viviani que j'avais trouvée d'abord n'était réellement, que ce qu'elle m'avait semblé être, c'est à dire une réminiscence prise pour une nouvelle découverte“, ferner auf pag. 295: „Chapotot n'a donc pas inventé le Niveau à bulle d'air, puisqu'il avait été inventé 25 ans auparavant et il est même fort probable qu'il n'en a jamais construit aucun; l'autorité de Picard, d'Auzout, d'Huygens et d'Ozanam ayant fait alors prévaloir l'usage des Niveaux-pendules et mettre de côté, pour le moment, l'admirable invention de Thévenot“; endlich auf pag. 296: „Je ne regrette cependant pas les recherches que j'ai dû faire, ni ne les crois tout-à-fait inutiles, puisque d'après sa lettre de 1661, nous pouvons affirmer à présent, que Thévenot, en s'attribuant en 1681 la découverte du Niveau à bulle d'air, n'empruntait rien à qui que ce fût, attendu que la Personne intelligente, qui avait autrefois

proposé dans l'assemblée qui se tenait chez **M. Thévenot** cette nouvelle invention n'était autre que Thévenot lui même, dont la lettre à Viviani, contenant la déscription du Niveau, est antérieure de 4 ans à la publication du livre: Machine nouvelle etc. dans lequel se trouve le passage que je viens de rapporter."

„M. Wolf a donc eu raison d'affirmer que le Niveau à bulle d'air a été inventé, au plus tard, en 1661, puis qu'il l'a été effectivement en 1661, mais il s'est mépris en dépouillant Thévenot d'une gloire qui lui appartient incontestablement, et que Charles Hutton et beaucoup d'autres lui avaient accordée, pour en gratifier le sieur Chapotot fabricant d'instruments de Mathématiques, dont l'esprit inventif, en fait de Niveaux, n'alla pas au delà de ce qu'on pouvait attendre d'un habile Maitre Lunettier à la fin du XVIIe siècle." — Möge die grosse Wichtigkeit des Gegenstandes die vorstehenden ausführlicheren Mittheilungen aus den mit dem grössten Danke aufzunehmenden höchst verdienstlichen Untersuchungen des Herrn Prof. G. Govi entschuldigen. —— Intorno ad una edizione degli Elementi d'Euclide, lettera del Prof. Ing^{re}. Ferdinando Jacoli a B. Boncompagni. Betrifft die Ausgabe: Euclidis Elementorum Libri XV. graece et latine. Quibus, cum ad omnem Mathematicae Scientiae partem, tum ad quamlibet Geometriae tractationem, facilis comparatur aditus. Lutetiae. Apud Gulielmum Cauellat, in pingui Gallina, ex aduerso collegij Cameracensis. 1557. 8^{0}. mit Rücksicht auf den Aufsatz von Herrn Sédillot im Bulletino etc. Settembre 1869. p. 419—420.

Tomo III. Agosto 1870. Sur un ouvrage faussement attribué à Aristarque de Samos. Lettre de M. Th. Henri Martin à B. Boncompagni. p. 299. Betrifft die Schrift: Aristarchi Samii de mundi systemate, partibus, et motibus eiusdem, Libellus. Adjectae sunt AE. P. de Roberval, Mathem. Scient. in Collegio Regio Franciae Professoris, Notae in eundem libellum. Parisiis. M.DC.XLIV., welches nur eine Fabrik von Roberval ist. — Annotationes ad historiam matheseos spectantes. Auctore G. Friedlein p. 203. — Annunzi di recenti pubblicazioni. p. 307. — Die beiden vorstehenden Abhandlungen sind in besonderen Abdrücken erschienen.

Auch die beiden im Vorstehenden angezeigten sehr verdienstlichen Abhandlungen des Herrn Professor G. Govi in Turin

sind in besonderen Abdrücken erschienen und können als solche bezogen werden; die Titel dieser beiden Schriften sind die folgenden:

Recherches historiques sur l'invention du niveau à bulle d'air, par Gilbert Govi, Professeur de Physique à l'Université de Turin. Extrait du Bullettino di Bibliografia e di Storia etc. Rome, imprimerie des sciences mathématiques et physiques. Via Lata, Num^o. 211 A. 1870. 4°.

und:

Tre Lettere di Galileo Galilei pubblicate ed illustrate da Gilberto Govi, Professore di Fisica nella Università di Torino. Estratto dal Bullettino di Bibliografia e di Storia ecc. Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. Via Lata No. 211 A. 1870. 4°.

Funfzehnter Jahresbericht der Wiedner Kommunal-Oberrealschule in Wien. Veröffentlicht vom Director Dr. Valentin Teirich am Schlusse des Schuljahrs 1870. Wien 1870. 4°.

Dieses Programm liefert zunächst ein sehr erfreuliches Bild von der Wiedner Kommunal-Oberrealschule in Wien und den österreichischen Realschulen überhaupt nach ihrer neuesten Organisation, von welcher Herr Teirich in dem Aufsatze: „Die Neugestaltung unserer Realschulen" genauere Nachricht ertheilt.

Ausserdem aber enthält dasselbe den sehr lesenswerthen Aufsatz: „Newton oder Pascal? Ein Vortrag von Prof. Dr. Fr. Jos. Pisko," welcher uns die nächste und hauptsächlichste Veranlassung zur Anzeige dieses Programms an diesem Orte giebt. Die Leser des Archivs werden gewiss von dem grossartigen schändlichen literarischen Betruge im Allgemeinen unterrichtet sein *), dessen Opfer der treffliche, um die Mathematik, insbesondere die Geometrie, und ihre Geschichte so hoch verdiente Chasles geworden ist. In dem vorliegenden mit sehr wohlthuender Wärme und Theilnahme für diesen trefflichen Gelehrten geschriebenen Aufsatze hat Herr Pisko — jetzt Professor an

---

*) M. s. unsere kurze Notiz unter der Ueberschrift: „Eine grossartige Mystification" im Literar. Ber. Nr. CCI. S. 8.

der k. k. technischen Militär-Akademie in Wien — diese ganze Angelegenheit in ihrem Verlaufe, mit besonderer Rücksicht auf die Verhandlungen, zu welcher dieselbe in der pariser Akademie der Wissenschaften geführt hat, und unter ganz unpartheiische Würdigung der grossen Verdienste Newtons und Pascals, mit ungemeiner Klarheit dargelegt, so dass dieser Aufsatz des Herrn **Pisko**, so wie die betreffende traurige Angelegenheit selbst, künftig in der Geschichte der exacten Wissenschaften, namentlich der Mathematik, nicht unberücksichtigt und unbeachtet bleiben kann und darf, weshalb auch vielleicht ein separater Abdruck desselben in einer besonderen Schrift anzurathen sein möchte.

Der schändliche Betrüger, dessen Name Lucas Vrain ist, hat eingestanden, dass er alle seit dem Jahre 1861 an Herrn Chasles verkaufte Handschriften, deren Anzahl 20000 übersteigt, selbst angefertigt habe.

Der hochverdiente Chasles, dessen Charakter von Allen, die ihm näher zu treten das Glück hatten, im höchsten Grade gerühmt wird — Herr Pisko, der einigen betreffenden Sitzungen der pariser Akademie beiwohnte, nennt ihn „einen schon damals (1867) 74jährigen Greis, dessen äusserer Anblick sogleich den Mann der Wissenschaft verräth — jeder Zoll ein Gelehrter — von stets sanftem, wohlwollendem und hochgesinntem Charakter“ —*) wird gewiss bei dem Lesen dieser ausgezeichneten Schrift, wenn sie ihm, wie wir sehr wünschen, zu Gesicht kommt, einigen Trost finden. Möge derselbe ein vollständiger sein, und den trefflichen Mann mit vollständiger geistiger Frische recht bald wieder zu solchen schönen wissenschaftlichen Arbeiten zurückführen, durch die er der Wissenschaft schon so viel genützt und dieselbe so sehr gefördert hat. Dies ist **unser** sehnlichster und innigster Wunsch!! G.

Arithmetik.

Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra von Meier Hirsch. Vierzehnte umgearbeitete und vermehrte Auflage von Prof. H. Bertram. Berlin, 1871. Carl Duncker's Verlag. C. Heymons. 8⁰. (Preis 1 Thlr.)

*) Mit der rühmlichsten Offenheit hat er zuletzt selbst zugegeben, dass er betrogen worden sei.

Wir freuen uns sehr, das Erscheinen dieser 14. Auflage der trefflichen algebraischen Aufgabensammlung des am 11. Februar 1851 leider in einem beklagenswerthen körperlichen und geistigen Gesundheitszustande verstorbenen Meier Hirsch hier anzeigen zu können, und sind, nach sorgfältiger Durchsicht dieser neuen Auflage und deren Vergleichung mit den früheren Auflagen, vollkommen der Ueberzeugung, dass das schon an sich treffliche Buch durch die Ueberarbeitung und theilweise Umarbeitung durch Herrn Professor H. Bertram in Berlin wesentlich an Brauchbarkeit gewonnen hat, ohne dass dadurch im Allgemeinen sein ursprünglicher Charakter verwischt worden wäre. Der neue Herr Herausgeber hat sich jedenfalls durch diese mit grosser Umsicht und Sorgfalt, zugleich mit grosser Kenntniss der Bedürfnisse des mathematischen Schulunterrichts, ausgeführte Arbeit ein sehr grosses Verdienst um das Buch und um die Schulen, auf denen dasselbe mit Recht noch vielfach in Gebrauch ist, erworben, und verdient deren Dank in besonderem Grade. Auf weiteres Detail einzugehen, würde an diesem Orte ganz unnütz und überflüssig sein; jeder Lehrer kennt das Buch in seiner früheren Gestalt und wird die Vorzüge der neuen Ausgabe — wie wir — bei sorgfältiger Durchsicht derselben, auf den ersten Blick selbst erkennen.

Tavole dei Logaritmi de 'numeri e delle Funzioni circolari ed iperboliche precedute dalla storia e theoria delle iperboliche, da applicazioni e da altre Tavole di uso frequente del Dott. A. Forti, Professore titolare di Matematiche al R. Liceo Galilei e di Matematiche e Meccanica alle Scuole Tecniche comunali di Pisa, Membro onorario della Società delle Scienze di Bordeaux. Parte Prima. Parte Seconda. G. B. Paravia e Comp. Torino — Firenze — Milano. 1870. 12°.

Unter den in neuester Zeit in ziemlich grosser Anzahl erschienenen mathematischen Tafeln — über die in den nächsten Literarischen Berichten ausführlicher berichtet werden wird — nehmen die vorliegenden wegen ihrer sehr zweckmässigen Einrichtung für den praktischen Gebrauch, wegen ihrer Vollständigkeit u. s. w. nach unserer Meinung jedenfalls eine der ersten Stellen ein, und verdienen der allgemeinsten Beachtung recht sehr empfohlen zu werden.

Besonders zeichnen sich diese Tafeln vor allen übrigen Sammlungen von Tafeln dadurch aus, dass sie wohl zuerst neben den Tafeln der Logarithmen der Kreisfunctionen eine sehr vollständige und schöne Tafel der siebenstelligen Logarithmen der hyperboli-

schen Functionen*) enthalten, welche für dasselbe numerische Argument in ganz gleicher Weise und gleicher Ausdehnung wie die Tafel der siebenstelligen Logarithmen**) der Kreisfunctionen von S. 123 bis S. 571 fortschreitet, und gewiss wesentlich dazu beitragen wird, diesen wichtigen Functionen so sehr zu wünschenden***) grösseren Eingang als, wie es scheint, bisher in den numerischen Calcul zu verschaffen und sie in denselben immer mehr einzuführen. Von der Geschichte und Literatur der hyperbolischen Functionen, von ihren hauptsächlichsten Anwendungen, von den Formeln, welche zur Construction der Tafeln dieser Functionen so wie der Kreisfunctionen gedient haben, hat der Herr Verf. in zwei überaus lehrreichen Abhandlungen ausführlich Nachricht gegeben, welche sich im ersten Theile No. I. und No. II. unter den Titeln:

I. Cenni storici della Teoria delle Funzioni iperboliche, delle loro principali applicazioni e riduzioni in tavole.

II. Teorica delle Formule che hanno servito alla costruzione delle tavole circolari ed iperboliche ordinate per l'angolo comune.

finden, und die wir, wie die ganze Sammlung, zu besonderer Beachtung empfehlen.

Die Tafeln der Logarithmen der Zahlen umfassen die Zahlen 1 bis 10800, und haben sehr zweckmässig die alte einfache Einrichtung der Lalande'schen Tafeln, welche doch vor der jetzt meistens gebräuchlichen Einrichtung immer ihre wesentlichen Vorzüge besitzt, beibehalten. Die Logarithmen sind auf sieben Decimalstellen gegeben, aber so eingerichtet, dass sie auch in der äusseren Anschauung leicht und ohne Irrungen zu befürchten auf fünf Decimalstellen abgekürzt werden können.

Ausser den vorher genannten Tafeln, welche mit den in fünf Decimalen gegebenen Tafeln d. Additions- u. Subtractions-Logarithmen den Hauptinhalt der Sammlung bilden, enthält dieselbe noch eine grosse

---

*) Um welche bekanntlich Herr A. Forti sich schon früher so sehr verdient gemacht hat. M. s. u. A. Literar. Ber. Nr. CLXII. S. 7.

**) Für die ersten 12 Minuten der Argumente schreiten beide Tafeln von Secunde zu Secunde fort und sind in 10 Decimalstellen gegeben.

***) M. vergl. u. A. meine Abhandlung: Grundzüge der Theorie der hyperbolischen Functionen und der Anwendung derselben zur Ausziehung der Wurzeln und der Auflösung der Gleichungen in Thl. XXXVIII. Nr. II. S. 48. G.

Anzahl sehr nützlicher Tafeln, welche diese Sammlung zu einer sehr vollständigen machen.

Druck und Papier entsprechen allen an solche Tafeln zu machenden billigen Forderungen.

Die Beschränktheit des Raumes zwingt uns, im Folgenden nur noch den Inhalt im Allgemeinen anzugeben, woraus aber die Leser den grossen Reichthum an höchst nützlichen Tafeln erkennen werden, der ihnen hier geboten wird.

Parte Prima. Avvertimento. Pag. V. — I. Cenni storici della Teoria delle Funzioni iperboliche, delle loro principali applicazioni e riduzioni in tavole. p. I. — II. Teorica delle formule che hanno servito alla costruzione delle tavole circolari ed iperboliche ordinate per l'angolo comune. p. 33. (sehr vollständig und lehrreich). — III. Principii di Gnomonica e applicazioni delle tavole ai numeri e alle funzioni circolari ed iperboliche. p. 53. (Eine sehr reiche Sammlung von Anwendungen aus fast allen Theilen der mathematischen Wissenschaften, namentlich auch aus der Physik, Geodäsie und Astronomie, die wir zur sorgfältigsten Beachtung dringendst empfehlen). — IV. Tavole dei Logaritmi di addizione e sottrazione. p. 195. — V. Tavole di uso frequente p. 195—269. (Parallasse del sole a diversi gradi di altezza. — Rifrazione meno la Parallasse del sole a $0^m,760$ del barometro e $+10^0$ del termometro centigrado. — Seni di tutti gli angoli del quadrante multipli di tre gradi. — Tavole dei pesi specifici dei principali corpi solidi alla temperatura di 18^0. — Numero delle vibrazioni corrispondenti a un suono dato. — Coefficienti di elasticità e velocità dei suoni. — Tavole dei calorici specifici (sehr vollständig). — Forze elastiche del vapore d'acqua. — Indici di rifrazione (gleichfalls sehr vollständig für feste, flüssige und gasförmige Körper).

Parte Seconda. I. Tavole dei Logaritmi dei numeri intieri da 1 sino a 10800. p. 1. — II. Tavole delle funzioni circolari ed iperboliche estese di secondo in secondo pei primi dodici minuti ed espresse con dieci decimali. p. 123. — III. Tavole delle funzioni circolari ed iperboliche espresse con sette decimali ed estese di dièci in dieci secondi pei primi ed ultimi cinque gradi del quadrante, e di minuto in minuto pei gradi intermedii. p. 173. — IV. Tavole dei valori naturali delle funzioni circolari per ciascun centesimo del quadrante, che danno inoltre la conversione dei gradi,

minuti e secondi in parti decimali del quadrante. p.573 —Numeri di uso frequente e loro logaritmi volgari. p.576.

Wir würden uns sehr freuen, wenn wir, wie wir sehr wünschen, durch die vorstehende Anzeige dieser vorzüglichen Tafeln zu der in jeder Beziehung sehr verdienten weiteren Verbreitung und Bekanntwerdung derselben auch unter den deutschen Mathematikern und Physikern Einiges beitragen sollten. Eigener schon mehrfacher Gebrauch derselben hat uns von ihrer Vorzüglichkeit und Zweckmässigkeit bereits hinreichend überzeugt. G.

Astronomie.

(S. auch „Physik".)

Kalender für alle Stände. 1871. Herausgegeben von Karl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Mit zwei Karten. Wien. Carl Gerold's Sohn. 8.

Wie seine Vorgänger (m. s. über den Jahrgang 1870 den Literar. Ber. Nr. CCII. S. 6.) empfehlen wir auch den neuesten Jahrgang 1871 dieser kleinen astronomischen Ephemeride allen Liebhabern der Astronomie und namentlich auch Lehrern an Schulen recht sehr, da in derselben alle in jedem Jahre vorkommenden Himmelserscheinungen vollständig verzeichnet sind, und eine für die Zwecke der Genannten völlig ausreichende Ephemeride der Sonne, des Monds und der sieben Hauptplaneten nicht fehlt. Die Einrichtung unterscheidet sich von den früheren Jahrgängen nicht; aufmerksam machen müssen wir aber in diesem Jahrgange auf die folgenden sehr interessanten Aufsätze: I. Ueber die physikalische Beschaffenheit der Sonne. — II. Ueber die Gestalt der Kometen. — III. Totale Sonnenfinsterniss am 22. December 1870, mit Karte. — IV. Neue Planeten und Kometen.

Physik.

Die Naturkräfte. Eine naturwissenschaftliche Volksbibliothek, herausgegeben von einer Anzahl von Gelehrten. München. Verlag v. R. Oldenbourg. 8°.

Die beiden ersten Abtheilungen dieses Werks sind im Literar. Ber. Nr. CCII. S. 6 von uns angezeigt worden. Der 3. Band:

Die Wärme. Nach dem Französischen des Prof. Cazin in Paris von Prof. Dr. Carl ist uns leider noch nicht zugegangen und soll, wenn dies geschehen, später angezeigt werden. Der 4. und 5. Band haben die Titel:

Das Wasser. Von Dr. Friedrich Pfaff, o. ö. Professor an der Universität Erlangen. Mit 57 Holzschnitten. München. Verlag v. R. Oldenbourg. 1870. 8°.

und:

Himmel und Erde. Eine gemeinfassliche Beschreibung des Weltalls von Prof. Dr. Zech in Stuttgart. Mit 45 Holzschnitten. München. Verlag von R. Oldenbourg. 1870. 8°.

Auch diese beiden Bände entsprechen ihrem Zwecke recht wohl, und bieten Gelegenheit zu einer mehrfach interessanten Unterhaltung und zu allgemeiner Belehrung dar. Der astronomische Theil ist in der That, wie sein Titel besagt, nur eine gemeinfassliche **Beschreibung** des Weltalls, und setzt mathematische Vorkenntnisse irgend welcher Art nicht voraus. Dass die Anwendung der Spectralanalyse in der Astronomie besondere Beachtung gefunden hat, erkennen wir in einem solchen Buche gern an und empfehlen es auch von dieser Seite unseren Lesern.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von C. Jelinek und J. Hann. (Vergl. Literar. Ber. CCVII. S. 17.)

Band V. Nr. 21. Ueber ein selbstregistrirendes Thermometer zur Bestimmung der Temperatur der Meerestiefe. Von A. Miller. S. 529. — Hydrometrische Beobachtungen im Seine-Becken. Nach M. Belgrand und G. Lemoine von Carl Fritsch. S. 535.

Band V. Nr. 22. Bericht über die grossen Nordlichterscheinungen am 24. und 25. October 1870. S. 561.

Band V. Nr. 23. Ueber den Eisgang und Wasserstand der Wolga in Astrachan in ihrer Beziehung zur Entwaldung. Von Dr. A. v. Wojeikoff. S. 591. — Zur orographischen Meteorologie. VI. Ueber eine Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Meteorologie der Gebirge. Von A. Mühry. S. 594. — Bericht über die grossen Nordlichterscheinungen am 24. und 25. October 1870 (Schluss). S. 601. — Diese Nummer enthält auch den Jahresbericht für 1870 über den höchst erfreulichen

Fortgang der Gesellschaft, die bereits ein Vermögen von 1817.55 Fl. besitzt. Die Zahl der Mitglieder war 326 am 1. October 1870. Präsident und Vicepräsident sind gegenwärtig die Herren Regierungsrath C. v. Littrow und Hofrath A. Ritter v. Schrötter. Erster Secretär ist Herr Sectionsrath (im Unterrichtsministerium) Director C. Jelinek.

Band V. Nr. 24. Zur orographischen Meteorologie. VI. Ueber eine Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Meteorologie der Gebirge. Von A. Mühry (Schluss). S. 625.

Namen- und Sachregister zum V. Bande.

Band VI. Nr. 1. Mit dem sechsten Bande erscheint diese treffliche Zeitschrift in neuer äusserer Ausstattung, namentlich in grösserem Format; möge dieselbe auch in dieser neuen Ausstattung den ungestörtesten Fortgang haben. Der wesentliche Inhalt von Nr. 1 ist: Ueber die Zurückführung der Temperaturcurve des Jahres auf die zu Grunde liegenden Bedingungen. Von H. W. Dove. S. 1. — Zur Temperatur von Ost-Sibirien. Von Dr. A. v. Wojeikoff. S. 6.

Band VI. Nr. 2. Graphisches Verfahren zur Reduction der Angabe eines Aneroïd-Barometers. Von Heinrich Hartl, k. k. Oberlieutenant im Militär-geographischen Institute. (Sehr lehrreich für alle Besitzer eines Aneroïd's oder Holostérique's.) S. 17. — Beiträge zur Klimatologie von Südamerika. IV. Nördliches Chile: Serena, Copiapó. Von Dr. J. Hann. S. 25.

Band VI. Nr. 3. Ueber die Vermehrung des Quellwassers auf Malta und die Verbesserung des Klima's dieser Insel. Nach David Milne Home. S. 33.

Band VI. Nr. 4. Ueber die Vermehrung des Quellwassers auf Malta und die Verbesserung des Klima's dieser Insel. Nach David Milne Home (Schluss). S. 49.

Band VI. Nr. 5. Ueber die Wanderungen des Maximums der Bodentemperatur. Von Prof. Dr. A. Kerner in Insbruck. S. 65.

Wie immer sind auch alle diese Nummern reich an einer sehr grossen Zahl der interessantesten kleineren Mittheilungen und Literaturberichte, deren Inhalt hier anzugeben natürlich ganz unmöglich ist.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München. Vergl. Literar. Ber. Nr. CCVI. S. 16.

1870. II. Heft I. v. Kobell: Ueber Krystallwasser. S. 1.

1870. II. Heft II. v. Bezold: Untersuchungen über den Elektrophor. S. 134.

1870. II. Heft III. Seidel: Ueber die Grenzwerthe eines unendlichen Potenz-Ausdrucks. S. 327. (Wird später in den „Denkschriften" mitgetheilt.)

1870. II. Heft IV. Enthält in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze nicht.

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona. (Presso il R. Istituto tecnico di Milano) in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal Prof. Tartolini. Milano. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCVI. S. 15.)

Serie II^a^. Tomo IV°. — Fascicolo 2°. (Gennajo 1871.) Sturm: Sur la surface enveloppée par les plans qui coupent une courbe gauche du 4e ordre et 2e espèce en quatre points d'un cercle (continuazione e fine). p. 81. — Petersen: Dell' uso del principio delle velocità virtuali con riguardo all' attrito. p. 86. — M. Roberts: Sur les fonctions abéliennes à quatre périodes. p. 95. — Thomae: Les séries Heinéennes supérieurs. p. 105. — Betti: Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. p. 140. — Dini: Sopra la funzioni di una variabile complessa. p. 159.

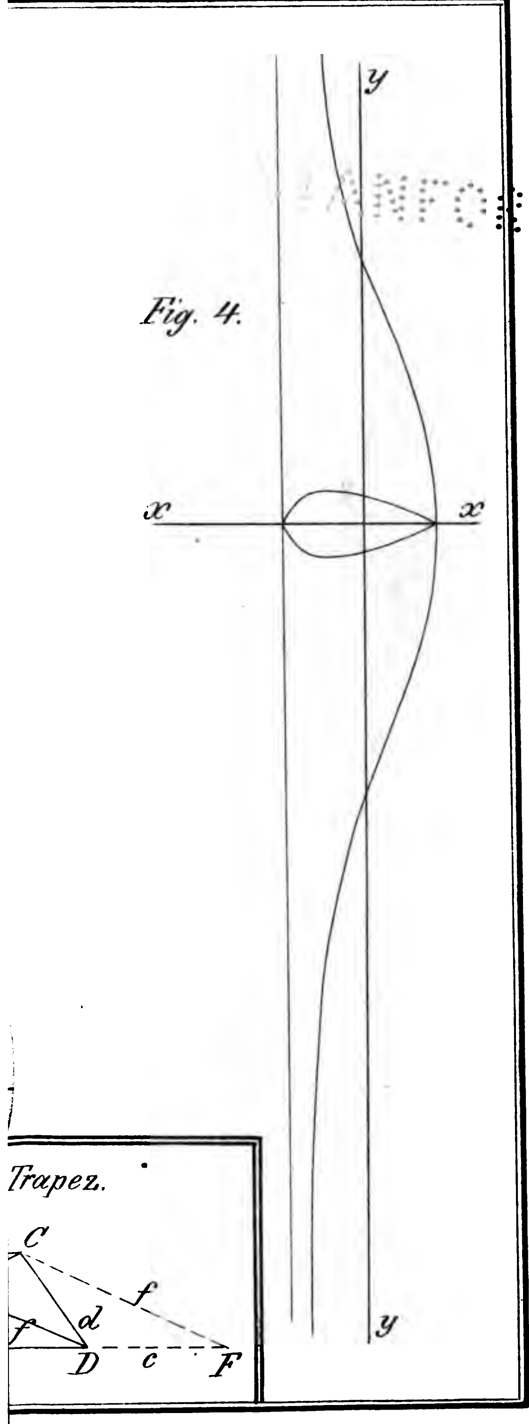
Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CCVII. S. 18.)

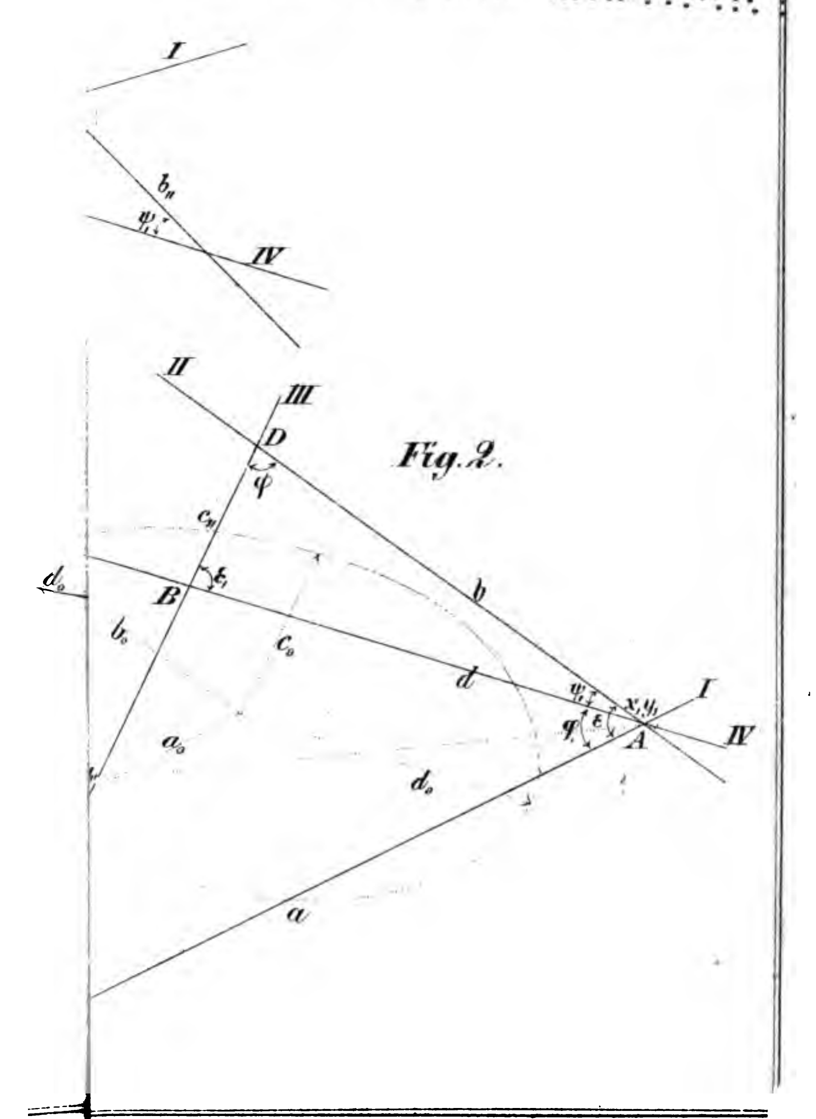
Anno VIII. Novembre e Dicembre 1870. Esposizione della nuova Geometria di Plücker. Per G. Janni. (cont. e fine.) p. 321. — Quistioni a risolvere. Tratte dall' Educational Times, Novembre 1870. p. 326. — Del moto di un ellissoide in un fluido

incompressibile ed indefinito; E. Padova. p. 327. — Men sull' attrazione degli sferoidi pel Prof. Remigio del Gro (Cont. Vedi Vol. VIII. p. 221). p. 333. — Dimostrazione teoremi enunciati 1 e 4 a pag. 228; V. Mollame. p. 366 Quistioni a risolvere, tratte dall' Educational Times, Dice 1870. p. 369. — Quistioni proposte da V. N. Bitonti. p. 37 Soluzione della Quistione 1, pag. 228. Per V. N. Bitonti. p. 37 Nota sulla conica dei nove punti e delle nove rette; P. Cas p. 374. — Annunzi Bibliografici. p. 377.

Anno IX. Gennaio e Febbraio 1871. Sulle f binarie di grado qualunque; per G. Battaglini. p. 1. — Int ad alcune questioni generali sulla teorica dei complessi, ris col metodo geometrico puro; per O. Tognoli. p. 19. — S alcune applicazioni di una formola data da Jacobi; per C. Arz p. 32. — Nota sugli assi principali; per G. Battaglini. p. 38 Dimostrazione di un teorema del sig. V. N. Bitonti; per V. ruti. p. 46. — Dimostrazione di due teoremi di Geometria; T. Fuortes. p. 49. — Quistioni a risolvere, tratte dall' Ed tienal Times, Gennaio 1871. p. 50. — Dimostrazione di un teo di Geometria; per V. Eugenio. p. 51. — Dimostrazione teoremi 1, 2, 3; per V. Bitonti. p. 52. — Dimostrazione d teorema di Geometria; per T. Fuortes. p. 55. — Soluzion una quistione; per V. Mollame. p. 58. — Sopra due seri Gauss e di Heine; per F. Tano. p. 60. — Alcuni teorem Geometria; per V. Mollame. p. 64.

Taf. I.





I
b_{II}
ψ_1
IV
II
III
D
φ
Fig. 2.
c_{II}
d_0
ε_1
B
b
b_0
c_0
d
ψ_1
x, y, b
I
φ_1
ε
A
IV
a_0
d_0
a



